

# 多旋翼飞行器远程控制实践

## 第5章 滤波器设计实验

全权

qq\_buaa@buaa.edu.cn

自动化科学与电气工程学院



北京航空航天大学  
BEIHANG UNIVERSITY



可靠飞行控制研究组

RELIABLE FLIGHT CONTROL GROUP

# 大纲



1. 基本原理
2. 基础实验
3. 分析实验
4. 设计实验
5. 实飞实验
6. 本章小结

# 大纲



**1. 基本原理**

**2. 基础实验**

**3. 分析实验**

**4. 设计实验**

**5. 实飞实验**

**6. 本章小结**

# 1. 基本原理

## □ 概述

卡尔曼滤波是一种递推线性最小方差估计算法。它的最优估计需满足以下三个条件：

1) 无偏性：即估计值的期望等于状态的真值

若  $E(\hat{g}) = g$ ，那么意味着  $\hat{g}$  是参数  $g$  的无偏估计，否则为有偏估计，其中  $E(\cdot)$  表示期望。

2) 估计的方差最小

若  $D(\hat{g}) = E\left(\left(\hat{g} - g\right)^2\right)$ ，如果对于任意一个估计  $\tilde{g}$ ，我们有  $D(\hat{g}) \leq D(\tilde{g})$ ，那么称  $\hat{g}$  为最小方差估计，其中  $D(\cdot)$  表示方差。

3) 实时性。

# 1. 基本原理

## □ 模型描述

假设线性离散系统模型如下：

$$\mathbf{x}_k = \Phi_{k,k-1} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{u}_{k-1} + \Gamma_{k,k-1} \mathbf{w}_{k-1}$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k$$

式中，过程噪声  $\mathbf{w}_{k-1}$  和观测噪声  $\mathbf{v}_k$  的统计特性为

自相关系数  $\mathbf{R}_{\mathbf{w}\mathbf{w}}$

互相关系数  $\mathbf{R}_{\mathbf{w}\mathbf{v}}$

系统噪声方差阵  $\mathbf{Q}_k \geq \mathbf{0}$

观测噪声方差阵  $\mathbf{R}_k > \mathbf{0}$

克罗内克  $\delta$  函数

$$\delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{w}_{k-1}) = \mathbf{0}, \mathbf{E}(\mathbf{v}_k) = \mathbf{0}, \mathbf{R}_{\mathbf{w}\mathbf{v}}(k, j) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{w}\mathbf{w}}(k, j) = \mathbf{E}(\mathbf{w}_k \mathbf{w}_j^T) = \mathbf{Q}_k \delta_{kj} = \begin{cases} \mathbf{Q}_k, & k = j \\ \mathbf{0}, & k \neq j \end{cases}$$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{v}\mathbf{v}}(k, j) = \mathbf{E}(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_j^T) = \mathbf{R}_k \delta_{kj} = \begin{cases} \mathbf{R}_k, & k = j \\ \mathbf{0}, & k \neq j \end{cases}$$

独立不相关

# 1. 基本原理

## □ 模型描述

假设线性离散系统模型如下：

$$\mathbf{x}_k = \Phi_{k,k-1} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{u}_{k-1} + \Gamma_{k,k-1} \mathbf{w}_{k-1}$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k$$

初始状态  $\mathbf{x}_0$  的统计特性为

$$E(\mathbf{x}_0) = \hat{\mathbf{x}}_0, \text{cov}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{P}_0$$

其中,  $\text{cov}(\cdot)$  表示协方差

还假设状态的初始值  $\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_k$  与  $\mathbf{w}_{k-1}, \mathbf{v}_k, k \geq 1$ , 均不相关, 并且噪声向量  $\mathbf{w}_{k-1}$  与  $\mathbf{v}_k$  也不相关, 即有:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{xw}}(0, k) = E(\mathbf{x}_0 \mathbf{w}_k^T) = \mathbf{0}$$

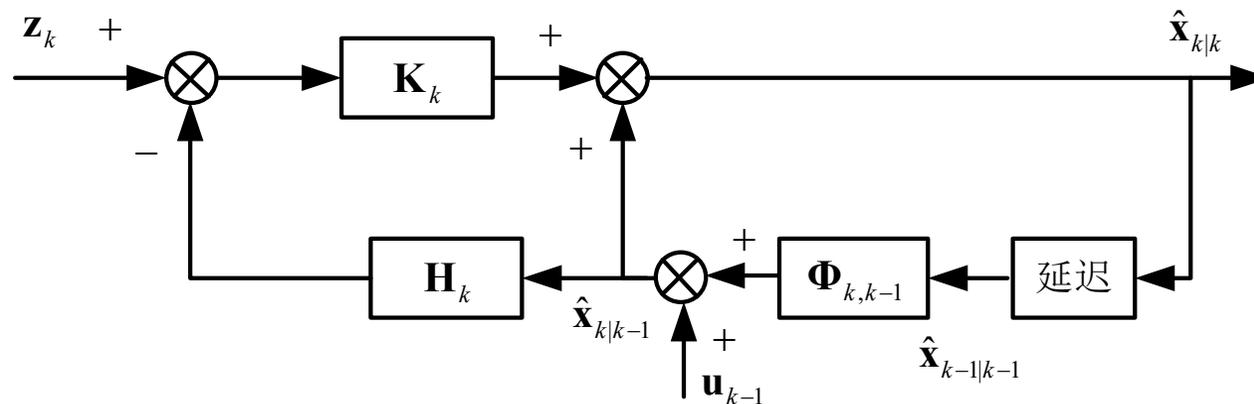
$$\mathbf{R}_{\mathbf{xv}}(0, k) = E(\mathbf{x}_0 \mathbf{v}_k^T) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{uw}}(k, j) = E(\mathbf{u}_k \mathbf{w}_j^T) = \mathbf{0}$$

独立不相关

# 1. 基本原理

## 卡尔曼滤波算法



### 1. 状态预测

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \Phi_{k,k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + \mathbf{u}_{k-1}$$

### 2. 误差协方差预测

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \Phi_{k,k-1} \mathbf{P}_{k-1|k-1} \Phi_{k,k-1}^T + \Gamma_{k,k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \Gamma_{k,k-1}^T$$

### 3. 卡尔曼滤波增益

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T \left( \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k \right)^{-1}$$

### 4. 状态估计校正

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k \left( \mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} \right)$$

其中  $\hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} = \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$

### 5. 误差协方差估计校正

$$\mathbf{P}_{k|k} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k|k-1}$$

# 1. 基本原理

## □ 卡尔曼滤波算法

(1) 一般来说，采样周期合理情况下，连续系统可观，离散化的系统也会可观。然而有时候采样周期选择不当，系统可能失去可控性及可观性。

(2) 卡尔曼滤波器是一种最优的观测器，观测增益  $\mathbf{K}_k$  是时变的。

(3)  $\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k$  需要是非奇异的，否则  $\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1}$  无法实现。

(4) 如果  $(\Phi_{k,k-1}, \mathbf{H}_k)$  不可观，那么卡尔曼滤波器仍然可以运行，只不过不可观的模态没有进行修正，只是递推罢了。极端情况  $\mathbf{H}_k = \mathbf{0}$ ，那么  $\mathbf{K}_k = \mathbf{0}$

整个系统完全不可观，那么

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \Phi_{k,k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + \mathbf{u}_{k-1}$$

$$\mathbf{P}_{k|k} = \Phi_{k,k-1} \mathbf{P}_{k-1|k-1} \Phi_{k,k-1}^T + \Gamma_{k,k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \Gamma_{k,k-1}^T$$

# 1. 基本原理

## 卡尔曼滤波算法

我们假设只有位置是可以观测的，并且将多旋翼看成质点模型，则我们可以选取状态变量

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}(t) & \mathbf{v}(t) & \mathbf{a}(t) \end{bmatrix}^T \text{ 且有如下模型}$$

多旋翼位置      多旋翼速度      多旋翼加速度

$$\text{状态方程: } \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}(t) \\ \dot{\mathbf{v}}(t) \\ \dot{\mathbf{a}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}(t) \\ \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{a}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{W}(t)$$



$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{观测方程: } \mathbf{Z}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}(t) \\ \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{a}(t) \end{bmatrix} + \mathbf{V}(t)$$

$$\mathbf{H}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# 1. 基本原理

## □ 实验所用卡尔曼滤波模型

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \Phi_{k,k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + \mathbf{u}_{k-1}$$
$$\mathbf{P}_{k|k} = \Phi_{k,k-1} \mathbf{P}_{k-1|k-1} \Phi_{k,k-1}^T + \Gamma_{k,k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \Gamma_{k,k-1}^T$$
$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{H}(t) = [1 \quad 0 \quad 0]$$

状态转移阵:  $\Phi(t, t - \Delta t) = e^{\mathbf{A}T} = I + T\mathbf{A} + \frac{T^2}{2!} + \dots = \begin{bmatrix} 1 & T & \frac{T^2}{2} \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

噪声驱动阵:  $\Gamma(t, t - \Delta t) = \int_{t-\Delta t}^t e^{\mathbf{A}(t)T-\tau} \mathbf{B}(t) d\tau = \int_{t-\Delta t}^t \Phi(t, t - \Delta t) \mathbf{B}(t) d\tau = \begin{bmatrix} \frac{T^3}{6} \\ \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix}$

# 1.基本原理

以上原理可以详细参  
Multicopter Design and  
或者“全权著. 杜光勋, 赵  
器设计与控制》, 电子工:



uction to  
Singapore, 2017”

邓恒译. 《多旋翼飞行  
8-9章。

# 大纲



1. 基本原理
2. 基础实验
3. 分析实验
4. 设计实验
5. 实飞实验
6. 本章小结



# 2. 基础实验

## □ 实验目标

### ■ 准备

- 软件：MATLAB R2017b及以上版本，基于Simulink的控制器设计与仿真平台和实验指导包“e2.1”
- 硬件：计算机

### ■ 目标

在包含控制器的多旋翼仿真模型中，将控制器中的速度反馈信号用卡尔曼滤波估计替代。给定期望输入信号为正弦波信号，周期为10s，幅值为1。

- 1) 学习并掌握卡尔曼滤波算法的原理及应用；
- 2) 在仿真1.0中，将输入真实信号与卡尔曼滤波后的信号进行对比，比较卡尔曼滤波器在不同参数下的效果；
- 3) 在仿真2.0中，加入卡尔曼滤波器，同时对比仿真1.0与仿真2.0的滤波效果。

# 2.基础实验

## □ 实验步骤：仿真1.0

### (1) 步骤一：学习软件环境

阅本书第二章的内容，对于Simulink模型有一个初步的了解。

### (2) 步骤二：初始化参数

打开本节课所附带的文件夹中的“e2\2.1\sim1.0”文件夹。打开“e2\2.1\sim1.0\startSimulation.m”文件，并点击“运行”，初始化文件参数。

### (3) 步骤三：滤波器模型

打开“e2\2.1\sim1.0\2\_1\_TF\_KalmanFiltre.slx”模型文件，将看到多旋翼飞行器Simulink仿真平台，详细内容请参考第二章2.2.1小节，如右图所示。

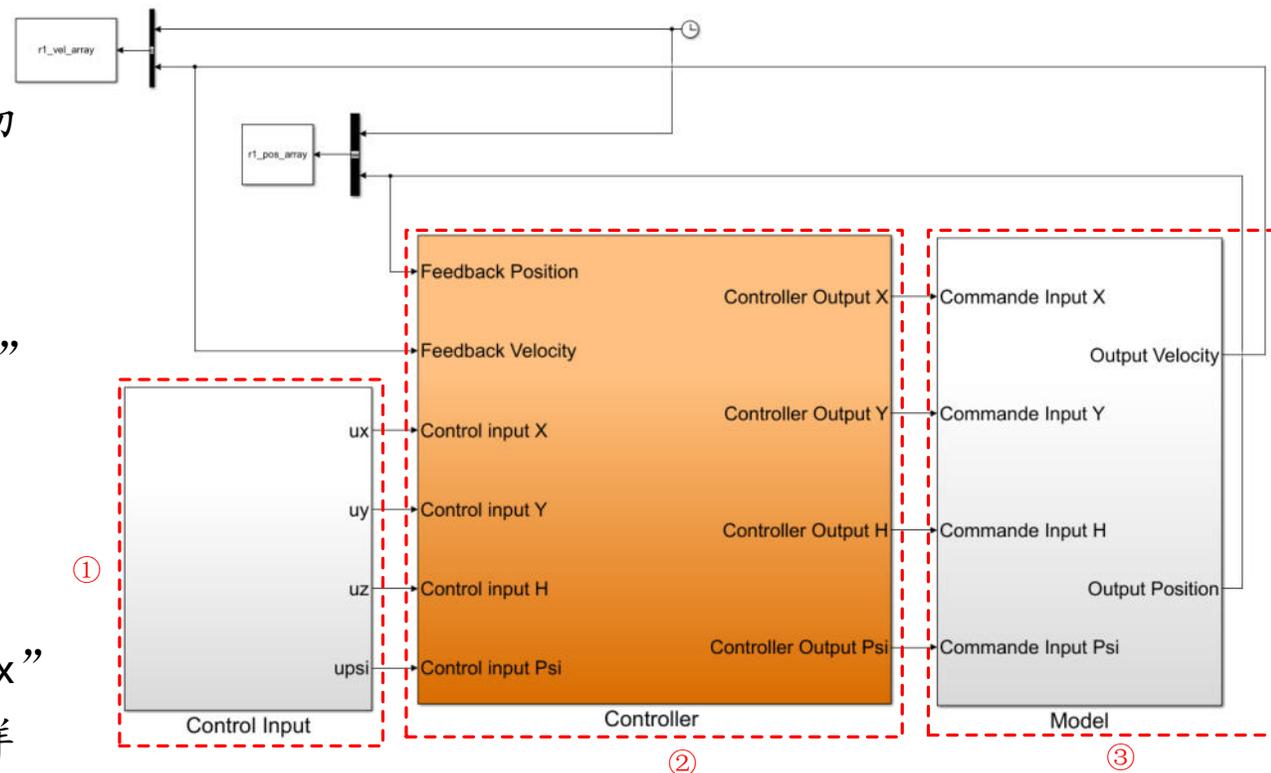


图. 多旋翼飞行器Simulink仿真平台，Simulink模型“e2\_1\_TF\_KalmanFiltre.slx”

# 2.基础实验

## □ 实验步骤：仿真1.0

本实验模型中的控制器模块已经调节好，有所不同的是“Model”模块。该模块内部如下图所示。

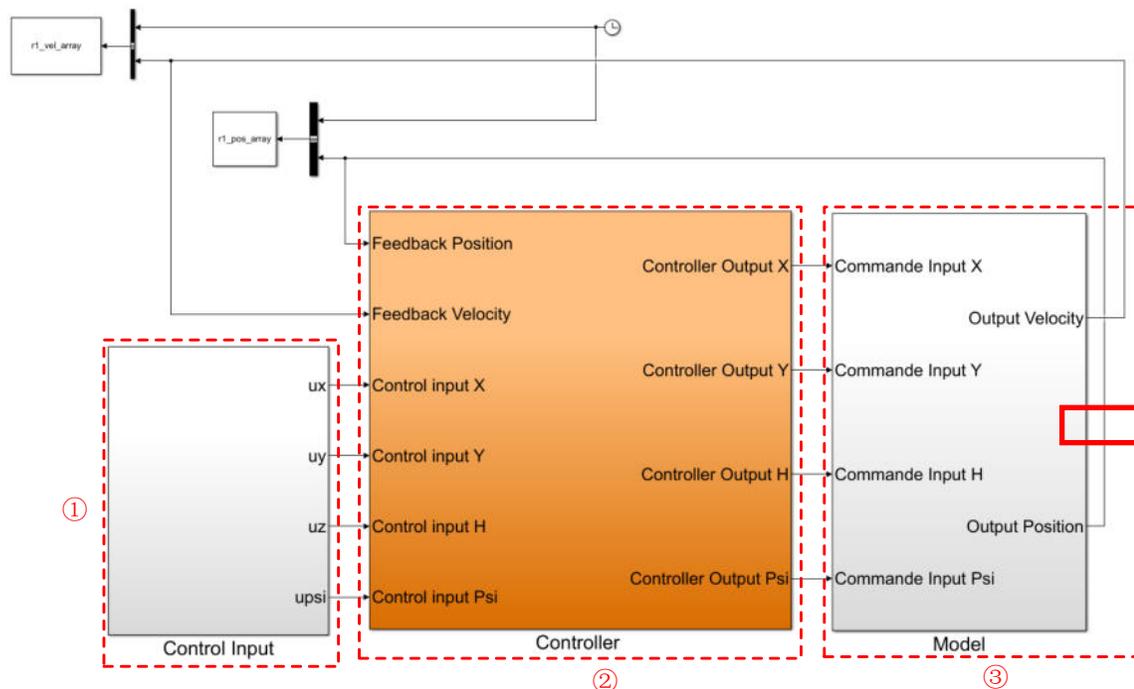


图. 多旋翼飞行器Simulink仿真平台, Simulink模型“e2\_1\_TF\_KalmanFiltre. slx”

红框部分为速度获取的模块，红框内的四个模块分别用来采取卡尔曼滤波的方法改进速度的实时获取。

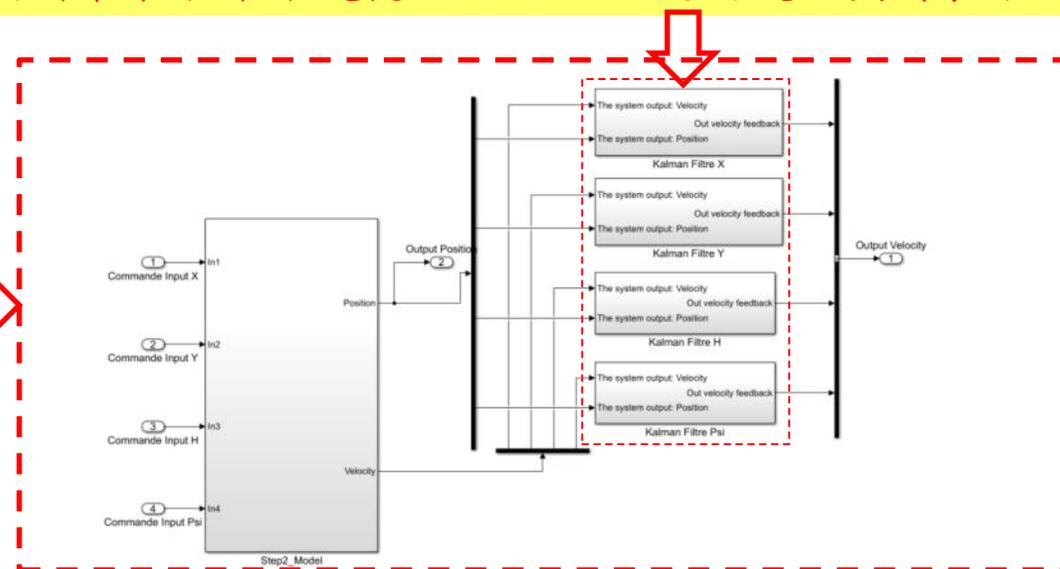


图. 修改后“Model”模块, Simulink模型“e2\_1\_Model\_KalmanFiltre. slx”

# 2.基础实验

## □ 实验步骤：仿真1.0

本实验模型中的控制器模块已经调节好，有所不同的是“Model”模块。该模块内部如下图所示。

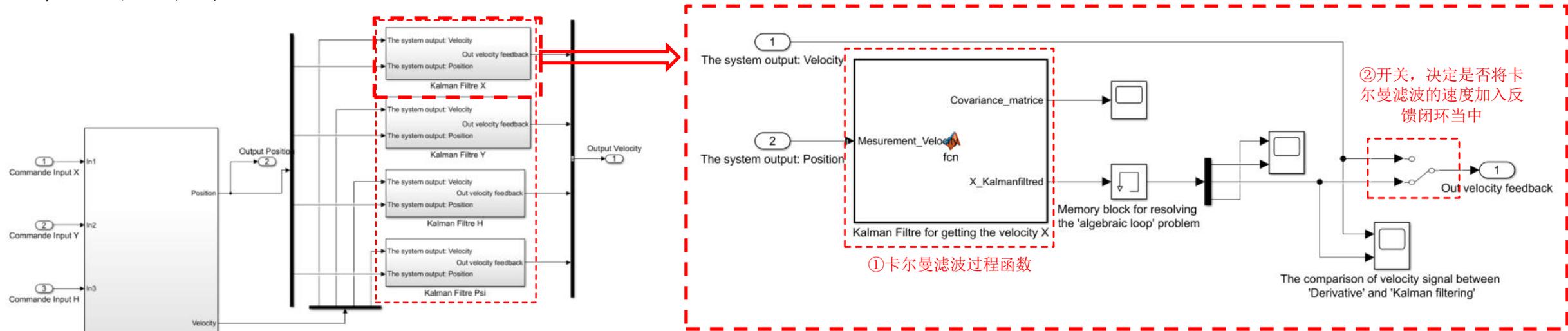


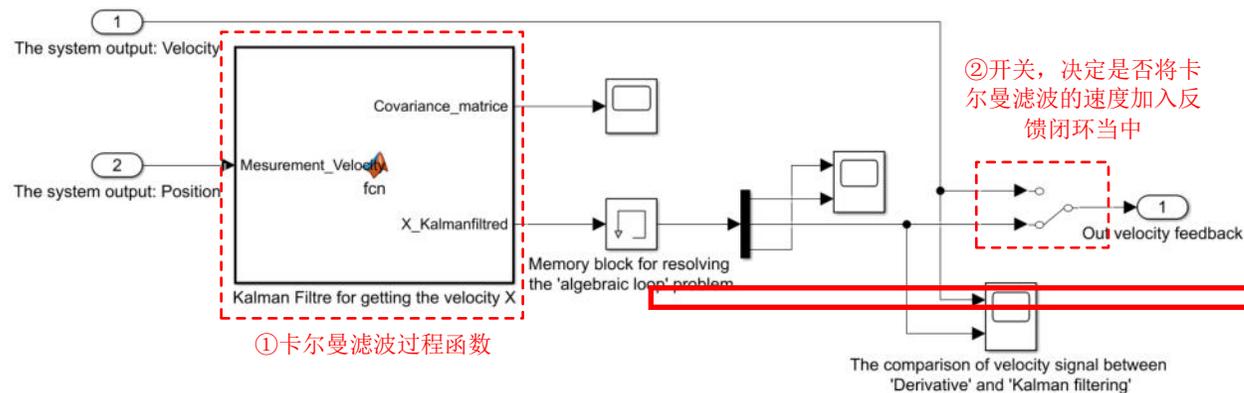
图. 水平前向通道卡尔曼滤波器模块，Simulink模型“e2\_1\_TF\_KalmanFiltre.slx”

图. 修改后“Model”模块，Simulink模型“e2\_1\_Model\_KalmanFiltre.slx”

# 2.基础实验

## □ 实验步骤：仿真1.0

本实验模型中的控制器模块已经调节好，有所不同的是“Model”模块。该模块内部如下图所示。



该模块是一个MATLAB Function函数，通过它实现了卡尔曼滤波的更新过程。第2行表示状态预测；第3行表示误差协方差预测；第4行表示卡尔曼滤波增益计算；第5行和第6行分别表示状态更新和误差协方差更新。

```

1 % 卡尔曼滤波更新过程
2 X_pre=A*Xkf_static; % 状态估计
3 P_pre=A*P0_static*A'+Q; % 误差协方差估计
4 Kg=P_pre*H'*inv(H*P_pre*H'+R); % 卡尔曼滤波增益计算
5 X_Kalmanfiltered=X_pre+Kg*(Measurement_Velocity-H*X_pre); % 状态估计更新
6 Covariance_matrice=(I-Kg*H)*P_pre; % 误差协方差估计更新

```

图. 水平前向通道卡尔曼滤波器模块，Simulink模型“e2\_1\_TF\_KalmanFiltre.slx”

# 2.基础实验

## □ 实验步骤：仿真1.0

本实验模型中的控制器模块已经调节好，有所不同的是“Model”模块。该模块内部如下图所示。

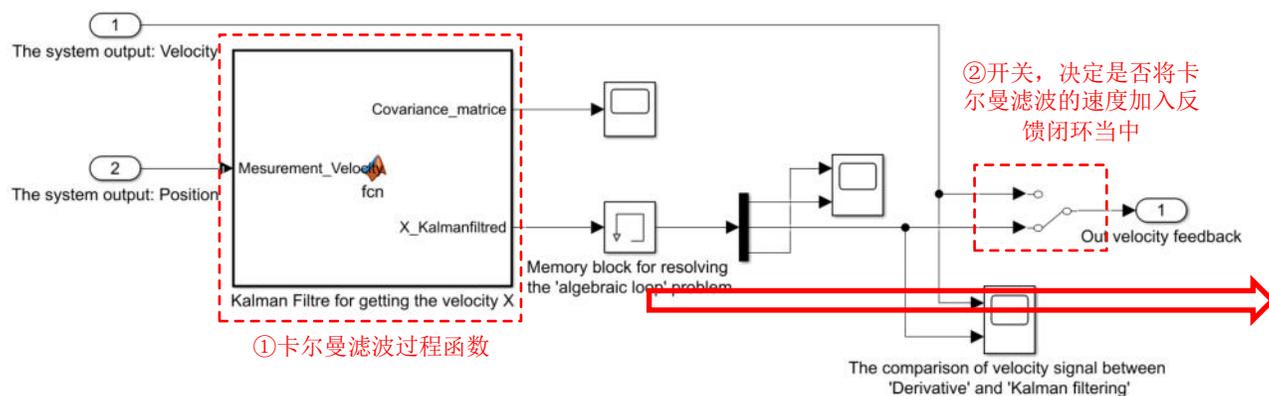


图. 水平前向通道卡尔曼滤波器模块，Simulink模型“e2\_1\_TF\_KalmanFiltre.slx”

这部分是卡尔曼滤波的更新过程，也是最核心的步骤。此外，如下代码修改各个通道的滤波器参数。第2行和第7行是卡尔曼滤波中的过程噪声的标准差以及测量噪声的标准差。修改这两个参数可以改变卡尔曼滤波器的滤波效果。

```

1 % 过程噪声
2 p_var =0.05; % sigma
3 Q = eye(3)*p_var^2; % 噪声协方差矩阵
4 W=Q*randn(3,1); %过程噪声
5
6 %测量噪声
7 m_var = 0.01; % sigma
8 R = [m_var^2 ]; % 测量噪声协方差矩阵
9 V=R*randn; % 测量噪声

```

## 2. 基础实验

### □ 实验步骤：仿真1.0

#### (4) 步骤四：重新初始化参数

在完成了相应的修改后，可以进行实验。开始时已经运行过“startSimulation.m”文件，如果改动该文件中的参数，则需要MATLAB中重新运行该文件。接下来，只需要在Simulink中运行模型文件“e2\ e2.1\sim1.0\ e2\_1\_TF\_KalmanFiltre.slx”即可。

#### (5) 步骤五：观察滤波效果

观察卡尔曼滤波的效果，将每个通道的速度获取模块中的开关调至下部，使得闭环反馈中采用通过卡尔曼滤波器的反馈值，如右图所示。

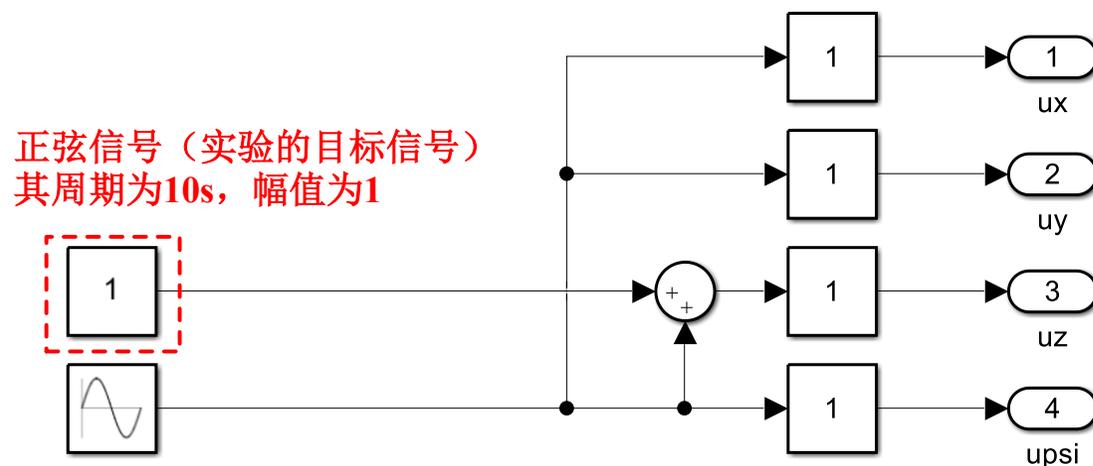


图. 输入信号图，Simulink 模型“e2\_1\_Model\_KalmanFiltre.slx”

# 2.基础实验

## □ 实验步骤：仿真1.0

### (6) 步骤六：与真实输入做对比

将通过卡尔曼滤波后的速度信号与真实速度值进行对比，以便获得一个更直观的对比效果。此处需要注意，在进行信号输入时，应该对每个通道分别进行激励，同时在每次信号输入完成后，应该再次运行仿真模型“e2\2.1\sim1.0\2\_1\_TF\_KalmanFiltre.slx”。之后，将期望值设为0，使得多旋翼仿真模型回到初始位置，再重新进行下一通道的信号激励。

在设定完滤波器参数之后，分别对各通道输入实验目标中的信号。接下来，以高度通道进行举例，读者可以自行分析其它通道。

通过对比可以发现，经过滤波之后，同时**速度**信号也**较为平缓，无较大波动**。同时，多旋翼的**位置输出与位置期望非常吻合**，也表明了使用卡尔曼滤波后的速度信号作为反馈加入闭环也可以非常好地控制多旋翼。综上所述，可以将卡尔曼滤波器处理过的速度信号作为多旋翼的速度反馈加入控制器闭环当中。

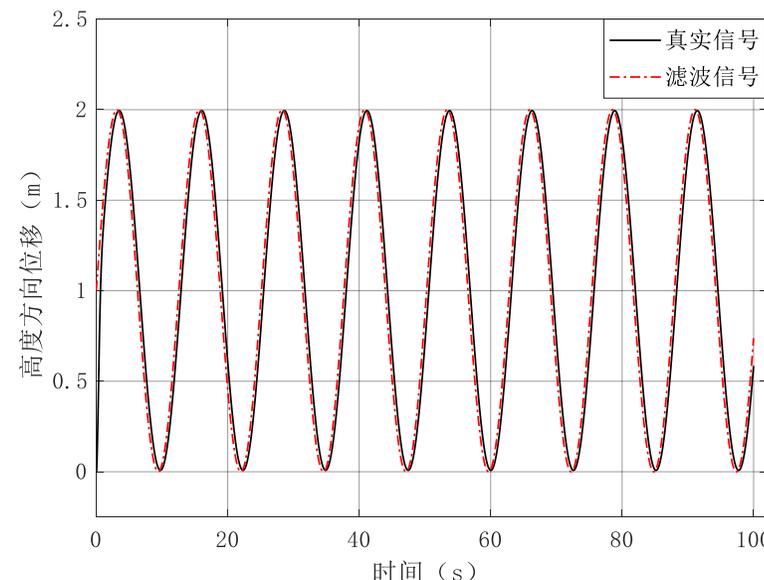
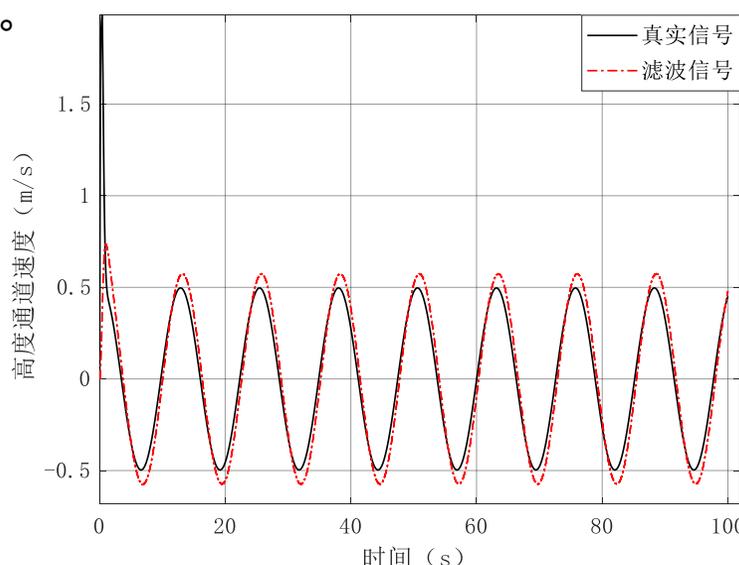


图. 基础实验仿真1.0高度通道真实速度与滤波速度对比图 图. 基础实验仿真1.0高度通道位置期望与真实位置输出对比图

# 第五章滤波器设计实验

基础实验：仿真1.0

# 2.基础实验

## □ 实验步骤：仿真2.0

接下来，我们将进行仿真1.0和仿真2.0的对比。对于在传递函数模型中已经完成的实验过程，在这里需要进一步在非线性模型上进行验证，即在仿真2.0上验证卡尔曼滤波的效果。

(1) 步骤一：打开命名为“e2\2.1\sim2.0”的文件夹，其中的文件与上面的“e2\2.1\sim1.0”文件夹相同，而区别在于文件“e2\2.1\sim2.0”中的模型为非线性模型。

(2) 步骤二：采用与传递函数模型实验中完全相同的实验步骤，观察获得结果，并将两种模型的关键结果进行对比。

从图中可以看出，传递函数模型的滤波速度与多旋翼非线性模型的滤波速度几乎一致，可以认为在采用系统辨识获得的模型进行实验时，卡尔曼滤波在**仿真1.0中和仿真2.0中效果几乎是一样的。**

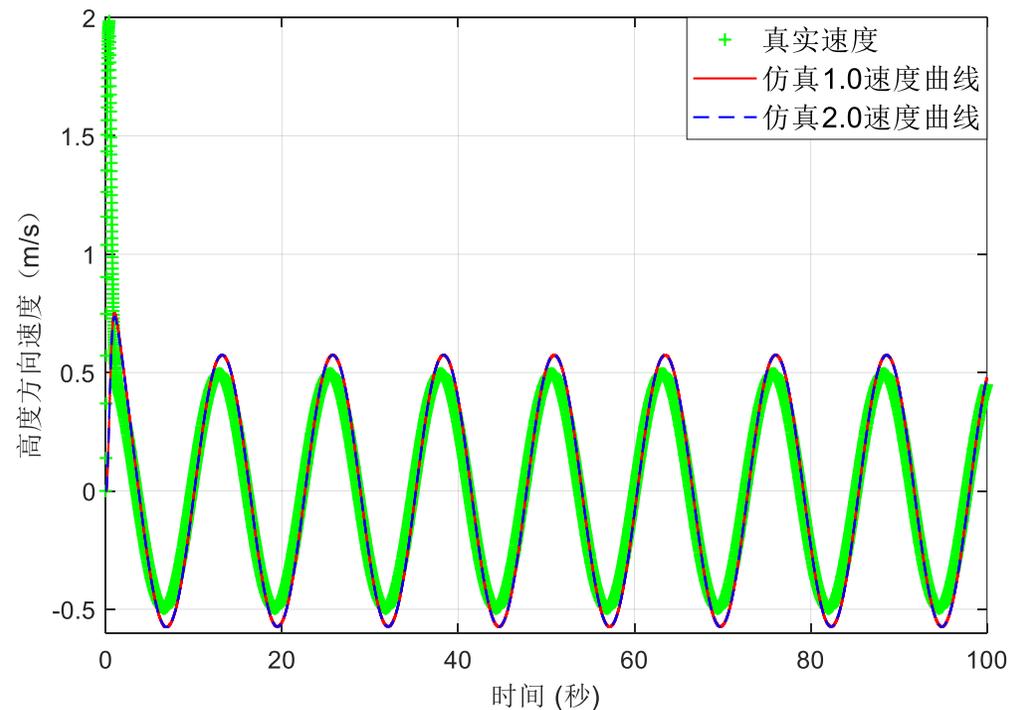


图. 基础实验仿真2.0高度通道滤波速度输出对比图

# 第五章滤波器设计实验

基础实验：仿真2.0

# 大纲



1. 基本原理
2. 基础实验
3. 分析实验
4. 设计实验
5. 实飞实验
6. 本章小结



# 3.分析实验

## □ 实验目标

### ■ 准备

- 软件：MATLAB R2017b及以上版本，基于Simulink的控制器设计与仿真平台和实验指导包“e2.3”，CopterSim, RflySim3D
- 硬件：计算机，自驾仪。

### ■ 目标

- 1) 在仿真1.0中，调整卡尔曼滤波器中加入测量噪声的大小，重复实验过程。对比卡尔曼滤波器参数与测量噪声协方差之间的关系，最后分析原因。
- 2) 在仿真1.0中，调整卡尔曼滤波函数模块中的噪声协方差参数大小，观察获得的速度反馈信号的变化。接下来，反复调整参数，使得每个通道的滤波效果达到最佳。
- 3) 在仿真2.0中，分别调整卡尔曼滤波中噪声协方差的大小和加入测量噪声大小，对比仿真1.0与仿真2.0的滤波效果。

# 3.分析实验

## □ 实验步骤：仿真1.0

这里的具体操作步骤和基础实验的步骤一~步骤六类似，详细步骤请参考前面章节。不同的是，这里有两个部分需要改进：

### (1) 步骤一：测量噪声

在位置测量的过程中加入噪声，观察滤波器对噪声的滤波效果。即在模型模块“e2\_2\_TF\_KalmanFiltre\_Noise.slx\ModeI\Kalman Filtre \*” (“\*”为“X”、“Y”、“H”、“Psi”可以代表四通道的卡尔曼滤波器)内部中，加入Simulink自带的随机噪声模块，如右图所示。

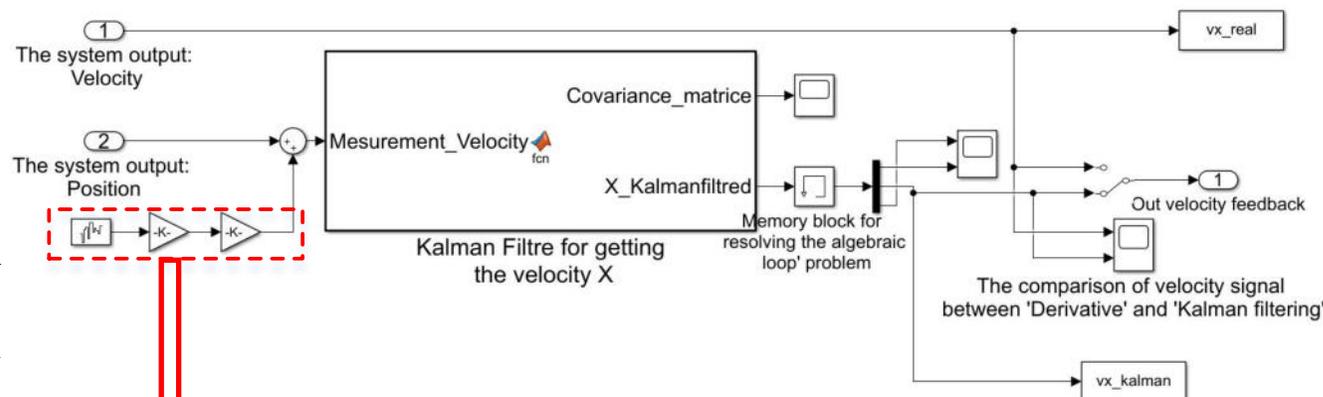


图.加入噪声模块示意图，Simulink文“e2\_2\_TF\_KalmanFiltre\_Noise.slx”

```
1 % 测量噪声增益
2 gain_noise=3;
```

加入噪声之后，分别在各通道对多旋翼进行控制，使其稳定运行，利用示波器观察噪声滤波效果。为了方便起见，本书将各通道的噪声进行统一设定，并进行量化。这里设定一个基准噪声，同时加入增益“gain\_noise”，可以在“e2\2.2\sim1.0\startSimulation.m”文件中调节相应的增益值来改变噪声大小。具体代码如左侧方所示，第二行为噪声大小。

# 3.分析实验

## □ 实验步骤：仿真1.0

这里的具体操作步骤和基础实验的步骤一~步骤六类似，详细步骤请参考前面章节。不同的是，这里有两个部分需要改进：

### (2) 步骤二：调整卡尔曼滤波器中的测量噪声方差阵和过程噪声方差阵

首先，对各通道执行基础实验中的步骤一~步骤六，详细步骤请参考前面章节，观察滤波器效果。接下来，在每个通道的滤波器函数模块中找到如右表所示的代码段。

```
1 % 过程噪声
2 p_var =0.05; % sigma
3 Q = eye(3)*p_var^2; % 过程噪声协方差矩阵
4 W=Q*randn(3,1); % 过程噪声
5
6 % 测量噪声
7 m_var = 0.01; % sigma
8 R = [m_var^2 ]; % 测量噪声协方差矩阵
9 V=R*randn; % 测量噪声
```

其中第2行的“p\_var”代表过程噪声的标准差，第7行“m\_var”代表测量噪声的标准差。反复修改这两个参数，使得获得的速度滤波信号能更加平滑，直至最优。最后，运行“e2\2.2\sim1.0\startSimulation.m”文件，分别对各通道输入实验目标中的特定信号，利用示波器观察其滤波效果。在获得卡尔曼滤波的速度估计后，可以与真实速度值进行对比，以便获得一个更直观的滤波器效果。

# 3.分析实验

## □ 结果及分析：仿真1.0

在加入噪声时，为了更好地体现卡尔曼滤波的效果，经过测试，选定增益 $gain\_noise$ 分别为0.25、1、3进行相应的实验。

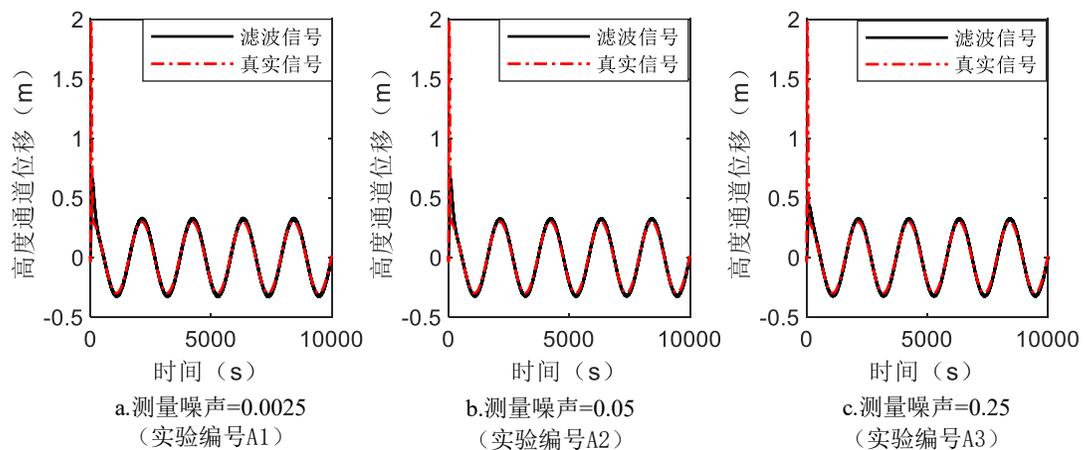


图. “ $gain\_noise=0.25$ ”时，高度通道下真实速度与滤波速度对比图

表1.  $gain\_noise=0.25$

实验编号	A1	A2	A3
信号噪声增益	0.25	0.25	0.25
滤波测量噪声标准差	0.0025	0.05	0.25
滤波过程噪声标准差	0.05	0.05	0.05

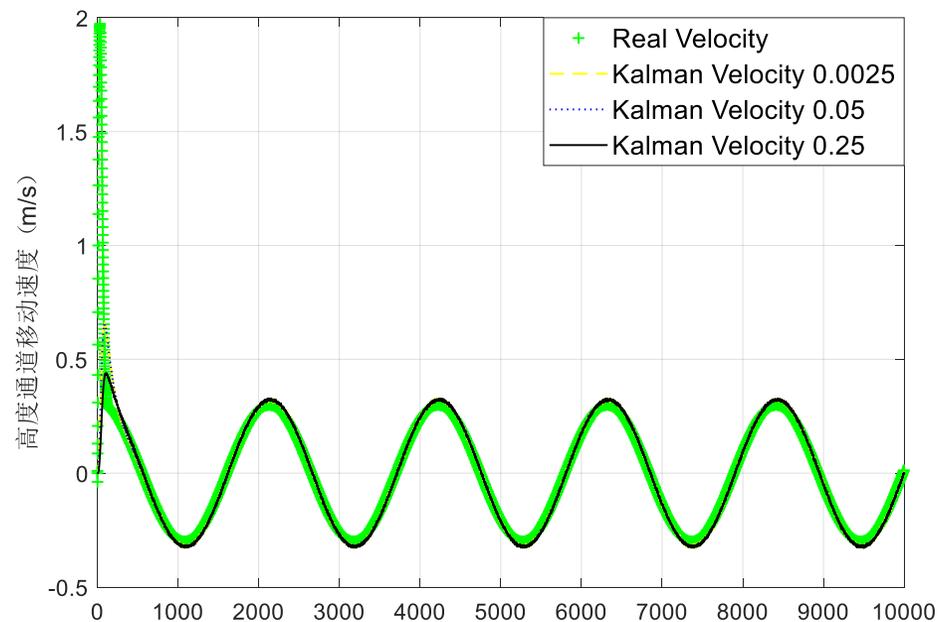


图. “ $gain\_noise=0.25$ ”时，高度通道下不同卡尔曼滤波器测量噪声标准差下滤波速度对比图

# 3.分析实验

## □ 结果及分析：仿真1.0

在加入噪声时，为了更好地体现卡尔曼滤波的效果，经过测试，选定增益 $gain\_noise$ 分别为0.25、1、3进行相应的实验。

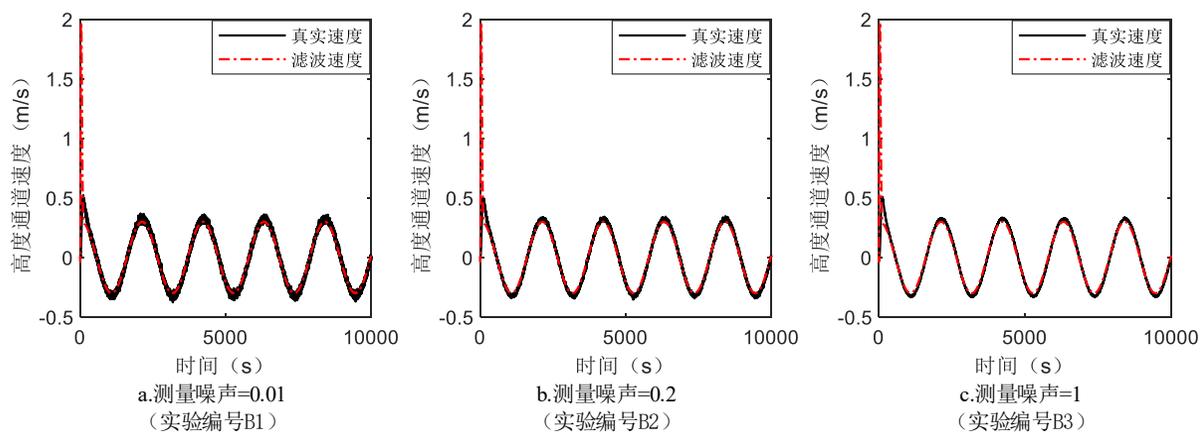


图. “ $gain\_noise=1$ ”时，高度通道下真实速度与滤波速度对比图

表2.  $gain\_noise=1$

实验编号	B1	B2	B3
信号噪声增益	1	1	1
滤波测量噪声标准差	0.01	0.2	1
滤波过程噪声标准差	0.1	0.1	0.1

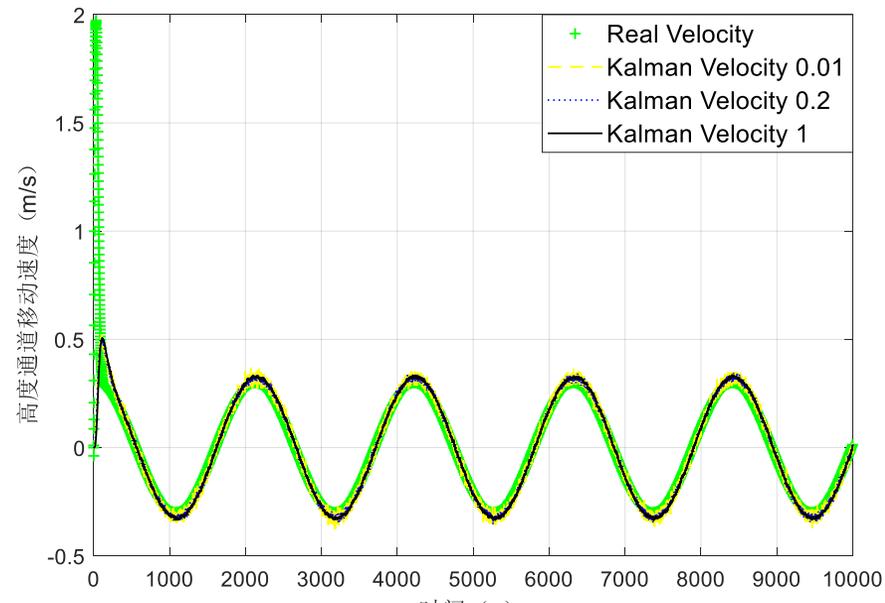


图. “ $gain\_noise=1$ ”时，高度通道下不同卡尔曼滤波器测量噪声标准差下滤波速度对比图

# 3.分析实验

## □ 结果及分析：仿真1.0

在加入噪声时，为了更好地体现卡尔曼滤波的效果，经过测试，选定增益 $gain\_noise$ 分别为0.25、1、3进行相应的实验。

表3.  $gain\_noise=3$

实验编号	C1	C2	C3
信号噪声增益	3	3	3
滤波测量噪声标准差	0.003	0.6	3
滤波过程噪声标准差	0.3	0.3	0.3

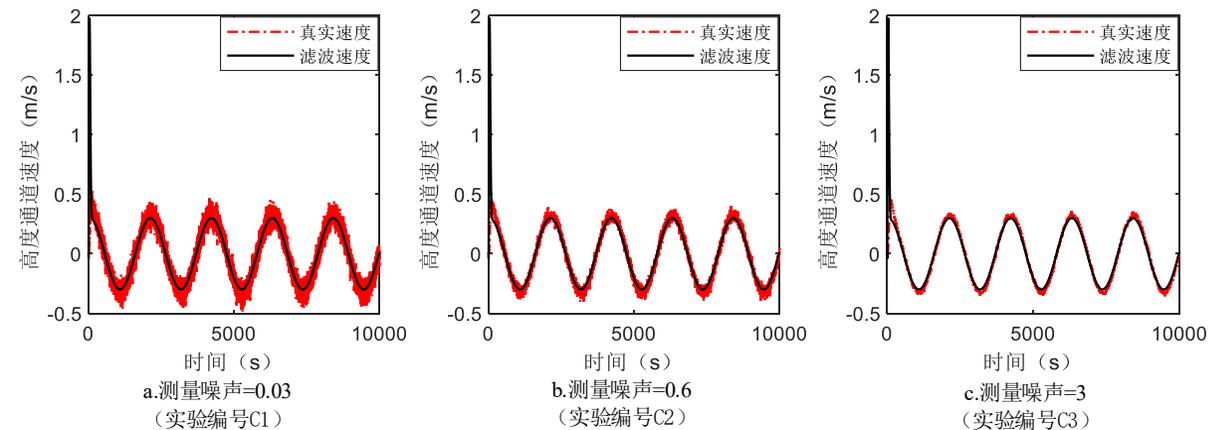


图. “ $gain\_noise=3$ ”时，高度通道下真实速度与滤波速度对比图

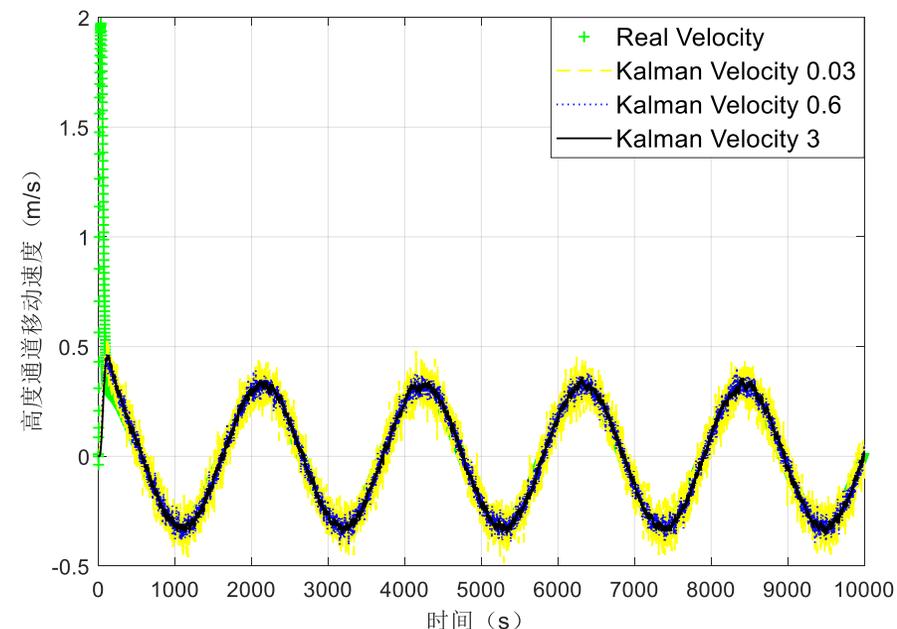


图. “ $gain\_noise=3$ ”时，高度通道下不同卡尔曼滤波器测量噪声标准差下滤波速度对比图

# 3.分析实验

## □ 结果及分析：仿真1.0

可以看出，在某一噪声值之下，随着滤波器的测量噪声标准差提高，系统中的测量噪声被逐渐滤掉，可以认为卡尔曼滤波器是非常有效的。在调整了噪声系数并获得最有效果之后，滤波结果变得更平滑了，在获得最优之后，噪声几乎被消除。对于三种噪声下的最优参数，可以列出如下表格。

实验编号	A3	B3	C3
信号噪声增益	0.25	1	3
滤波测量噪声标准差	0.25	1	3
滤波过程噪声标准差	0.05	0.1	0.3

从表格中可以看出，噪声的大小和卡尔曼滤波器中的滤波器标准差参数的关系是成正比的，同时二者的值几乎是相同的。

# 第五章滤波器设计实验

分析实验：仿真1.0

# 3.分析实验

## □ 结果及分析：仿真1.0

(1) 对于在传递函数模型中已经完成的实验过程，需要在非线性模型上，即在仿真2.0中进行验证。

(2) 打开命名为“e2\e2.2\sim2.0”的文件夹，其中的文件与上面的“e2\e2.2\sim1.0”文件夹相同，而区别在于“e2\e2.2\sim2.0”文件夹中的模型为非线性模型。

(3) 采用与传递函数模型实验中完全相同的实验步骤，观察获得结果，并将两种模型的关键结果进行对比。这里选取信号噪声增益为3，卡尔曼滤波器测量噪声标准差参数为0.6时的数据进行对比。

此处对高度通道的滤波速度结果进行对比，结果如下图所示。从图中可以看出，传递函数模型的滤波速度与多旋翼非线性模型的滤波速度几乎一致，可以认为卡尔曼滤波在**仿真1.0**和**仿真2.0**中效果几乎是一样的。

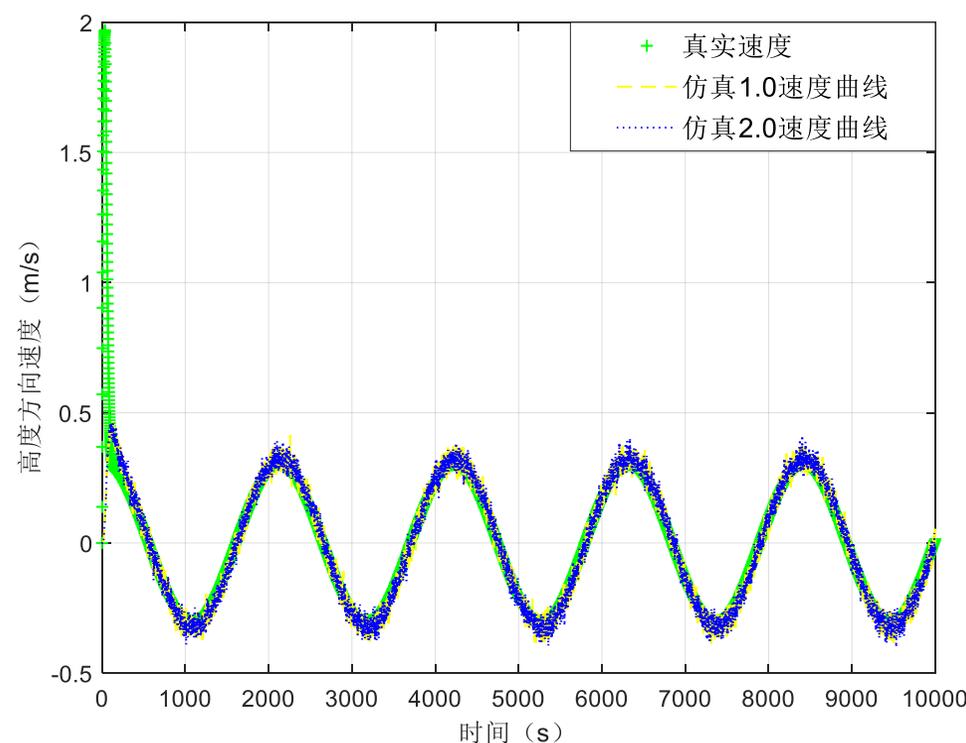


图. 分析实验仿真2.0中，高度通道滤波速度输出对比图

# 第五章滤波器设计实验

分析实验：仿真2.0

# 大纲



1. 基本原理
2. 基础实验
3. 分析实验
4. 设计实验
5. 实飞实验
6. 本章小结



# 4.设计实验

## □ 实验目标

### ■ 准备

- 软件：MATLAB R2017b及以上版本，基于Simulink的控制器设计与仿真平台和实验指导包“e2.3”，CopterSim，RflySim3D
- 硬件：计算机，自驾仪。

### ■ 目标

基础实验中所使用的卡尔曼滤波算法只是简单的单步更新卡尔曼滤波算法，这里在仿真1.0中设计新的卡尔曼滤波器，观察控制效果。

- 1) 在仿真1.0中将两个基本采样周期/步（一般为IMU周期）的位置信号延迟考虑进去，设计新的卡尔曼滤波器，进行闭环，看控制改善效果。注意，为了使对比更加清楚，本次实验不引入噪声。
- 2) 在仿真2.0中，也将考虑位置信号的延时，并且将带延时的卡尔曼滤波器进行闭环控制，对比仿真1.0与仿真2.0的滤波效果。
- 3) 进行硬件在环仿真。



# 4.设计实验

## □ 实验设计：如何设计观测延迟下的卡尔曼滤波器

(1) 方法1. 先对延迟的状态进行更新，然后递推到当前状态

步骤一. 预测第k-2步的状态及误差协方差：

$$\hat{\mathbf{x}}_{k-2|k-3} = \Phi \hat{\mathbf{x}}_{k-3|k-3}$$

$$\mathbf{P}_{k-2|k-3} = \Phi \mathbf{P}_{k-3|k-3} \Phi^T + \mathbf{Q}_{k-3}$$

步骤二. 更新第k-2步的状态及误差协方差：

$$\mathbf{K}_{k-2} = \mathbf{P}_{k-2|k-3} \mathbf{H}_{k-2}^T \left( \mathbf{H}_{k-2} \mathbf{P}_{k-2|k-3} \mathbf{H}_{k-2}^T + \mathbf{R}_{k-2} \right)^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k-2|k-2} = \hat{\mathbf{x}}_{k-2|k-3} + \mathbf{K}_{k-2} \left( \mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-2|k-3} \right)$$

$$\mathbf{P}_{k-2|k-2} = \left( \mathbf{I} - \mathbf{K}_{k-2} \mathbf{H}_{k-2} \right) \mathbf{P}_{k-2|k-3}$$

步骤三. 预测第k步的状态及误差协方差：

$$\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} = \Phi \hat{\mathbf{x}}_{k-2|k-2}$$

$$\mathbf{P}_{k-1|k-1} = \Phi \mathbf{P}_{k-2|k-2} \Phi^T + \mathbf{Q}_{k-2}$$

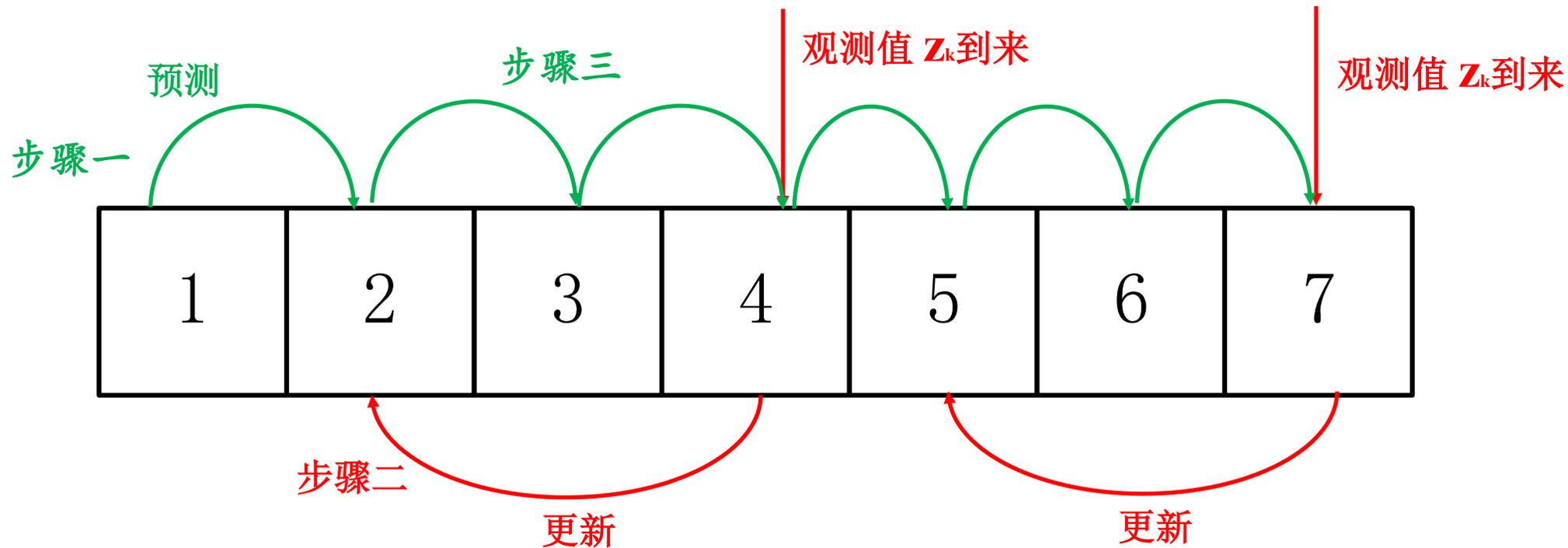
$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \Phi \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}$$

$$\mathbf{P}_{k|k} = \Phi \mathbf{P}_{k-1|k-1} \Phi^T + \mathbf{Q}_{k-1}$$

步骤四. 由  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$  可以得到速度

# 4.设计实验

## □ 实验设计：如何设计观测延迟下的卡尔曼滤波器



?? ? 延时周期如何确定?

1. 调参
2. 系统辨识获得延时系数

# 4.设计实验

## □ 实验设计：如何设计观测延迟下的卡尔曼滤波器

(2) 方法2. 进行扩维, 后按传统的卡尔曼滤波方法

令状态变量为  $\mathbf{X}_k = [\mathbf{x}_k^T \quad \mathbf{x}_{k-1}^T \quad \mathbf{x}_{k-2}^T]^T$ , 则

$$\mathbf{X}_k = \underbrace{\begin{bmatrix} \Phi & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Phi \end{bmatrix}}_{\Phi_a} \mathbf{X}_{k-1} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{w}_{k-1} \\ \mathbf{w}_{k-2} \\ \mathbf{w}_{k-3} \end{bmatrix}}_{\mathbf{w}}$$

$$z_k = \underbrace{[\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{H}]}_{\mathbf{H}_a} \mathbf{X}_k + v_k$$

经过整理后的模型与经典的模型一致, 不存在延迟问题, 则可以直接套用递推公式, 整理后模型的噪声方差阵分别变为

$$\mathbf{Q}_{a,k} = \text{diag}(\mathbf{Q}_k, \mathbf{Q}_{k-1}, \mathbf{Q}_{k-2}), r_{a,k} = r_k$$

则递推过程如下:

步骤一. 预测第k步的状态及误差协方差:

$$\hat{\mathbf{X}}_{k|k-1} = \Phi_a \hat{\mathbf{X}}_{k-1|k-1}$$

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \Phi_a \mathbf{P}_{k-1|k-1} \Phi_a^T + \mathbf{Q}_{a,k-1}$$

步骤二. 更新第k步的状态及误差协方差:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \tilde{\mathbf{H}}_k^T (\mathbf{H}_a \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_a^T + r_{a,k})^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{X}}_{k|k} = \hat{\mathbf{X}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k (z_k - \mathbf{H}_a \hat{\mathbf{X}}_{k|k-1})$$

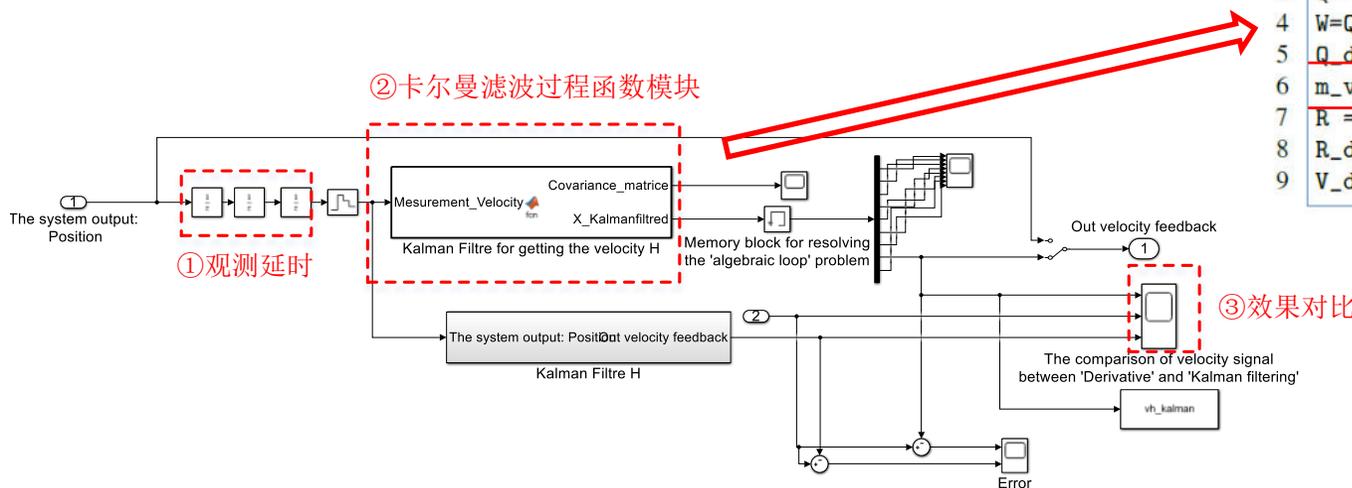
$$\mathbf{P}_{k|k} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_a) \mathbf{P}_{k|k-1}$$

步骤三. 由  $\hat{\mathbf{X}}_{k|k}$  可以得到速度

# 4.设计实验

## □ 实验步骤：仿真1.0

具体操作步骤和基础实验的类似，详细步骤请参考本章5.2.2.1小节。不同的是，本实验由于考虑了延时的影响，因而对卡尔曼滤波器结构做了修改，修改后的的滤波器如下图所示，主要增加了两个延时环节



```

1 % 过程噪声
2 p_var = 0.05; % sigma 过程噪声标准差
3 Q = eye(3)*p_var^2; % 过程噪声协方差矩阵
4 W=Q*randn(3,1); % 过程噪声
5 Q_delay=[Q zeros(3) zeros(3);zeros(3) Q zeros(3);zeros(3) zeros(3) Q]; % 测量噪声
6 m_var = 0.01; % sigma 测量噪声标准差
7 R = [m_var^2 ]; %测量噪声协方差矩阵
8 R_delay=R;
9 V_delay=R_delay*randn;
    
```

这部分是卡尔曼滤波的更新过程，也是最核心的步骤。该过程不需要修改，但是其中相应的矩阵初始化时的维度需要重新定义。其中的第2行和第7行是卡尔曼滤波中的过程噪声的标准差以及测量噪声的标准差，修改这两个参数可以改变卡尔曼滤波器的滤波效果；而且第5行代表改进后带延时的噪声方差阵。

图. 带延时的卡尔曼滤波器，Simulink文件“e2\_3\_TF\_KalmanFiltre\_Delay”

# 4.设计实验

## □ 结果及分析：仿真1.0

在设定完滤波器参数之后，分别对各通道输入指定频率下的正弦信号，获得速度滤波结果，以高度通道为例。高度通道真实速度与滤波速度对比图和高度通道位置期望与真实位置输出对比图如下所示。

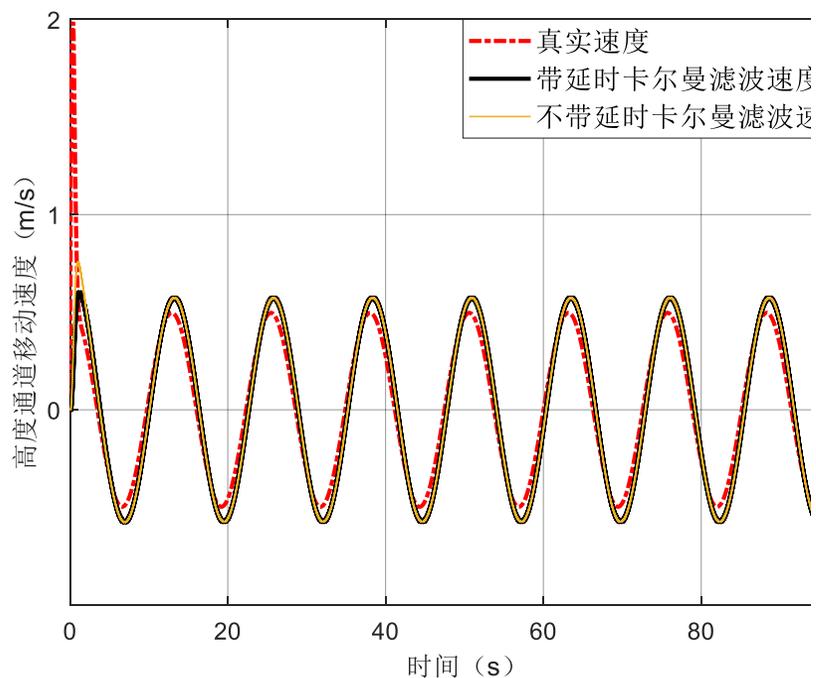


图. 设计实验仿真1.0高度通道真实速度与滤波速度对比图

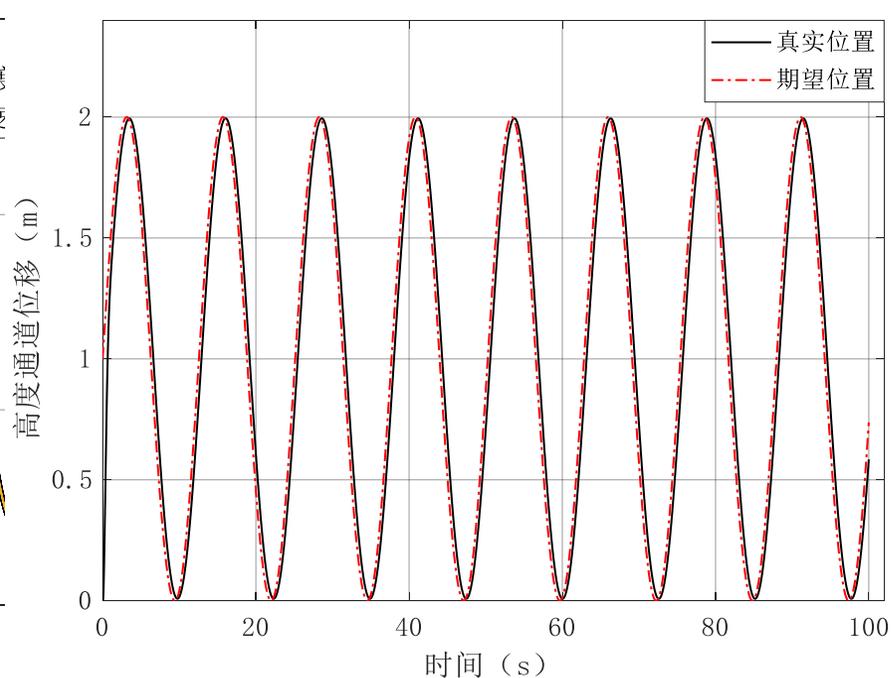


图. 设计实验仿真1.0高度通道位置期望与真实位置输出对比图

可以明显看出，即使在观测存在延迟的情况下，经过滤波之后，滤波速度信号也较为平缓，并无较大波动。同时，多旋翼的位置输出与位置期望非常吻合。这表明：使用卡尔曼滤波后的速度信号作为反馈加入闭环也可以非常好的控制多旋翼。虽然此处带延时的卡尔曼滤波结果和不带延时的卡尔曼滤波结果相差不大，但是在真实情况下进行观测时，所获得的观测信息是含有一定延迟的，因而需要考虑延迟情况下的卡尔曼滤波。从结果上可以看出：即使是在延迟情况下，卡尔曼滤波仍能有效获得速度信号，并且结果与基础实验中的速度获取结果相似。

# 4.设计实验

## □ 有效性验证

采用地推预测法：  
观测频率为10个采样周期，观测延迟为40个采样周期，观测方差为0.02米。蓝色曲线表示真实值，黑色曲线表示模拟的RTK测量值，红色曲线为估计值。

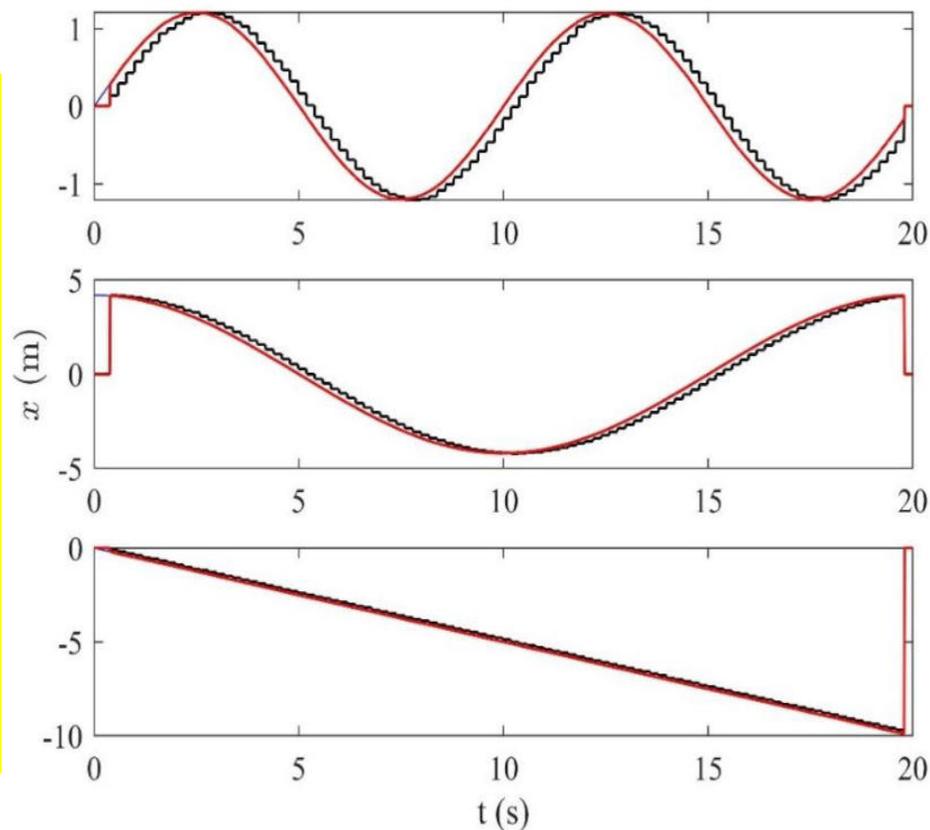


图. 位置真值、延迟观测值和估计值时间变化曲线

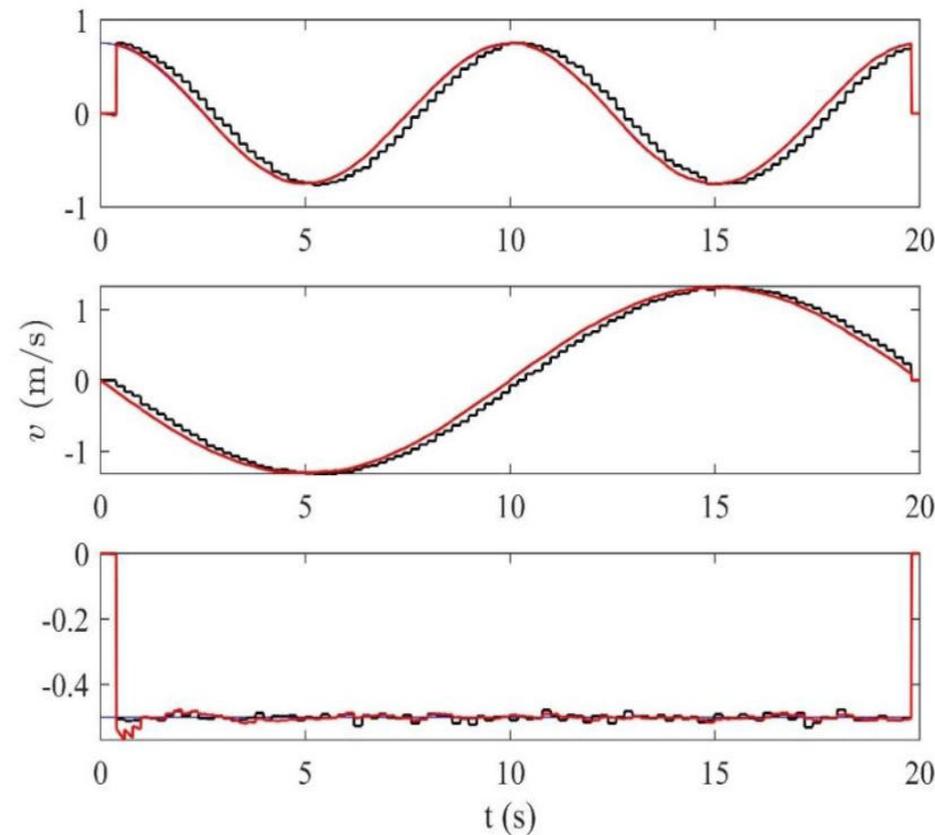


图. 速度真值、延迟观测值和估计值时间变化曲线

# 4.设计实验

## □ 结果及分析：仿真1.0

高度通道速度误差图如下图所示

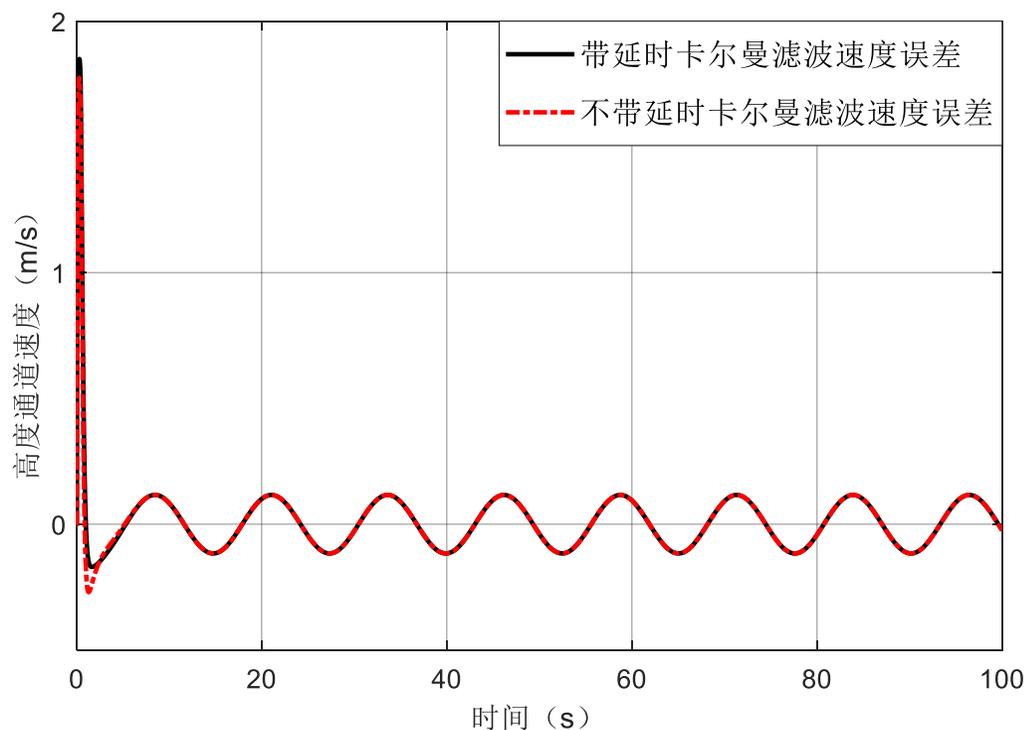


图. 设计实验仿真1.0高度通道速度误差

可以看到，高度通道误差绝对值均没有超过峰值0.2；待稳定后，各通道误差绝对值范围均在0.01左右，而信号的幅值为1，因此在一定误差范围内可以认为滤波效果是很好的。

综上所述，可以做出结论：在延迟情况下，卡尔曼滤波器仍然是可以使用的；即使在观测存在一定延迟的情况下，也可以将卡尔曼滤波器处理过的速度信号作为多旋翼的速度反馈加入控制器闭环当中。

# 第五章滤波器设计实验

设计实验：仿真1.0

# 4.设计实验



## □ 实验步骤：仿真2.0

(1) 对于在传递函数模型中已经完成的实验过程，需要在非线性模型上，即在仿真2.0中进行验证。

(2) 打开命名为“e2\2.3\sim2.0”的文件夹，其中的文件与上面的“e2\2.3\sim1.0”文件夹相同，而区别在于“e2\2.3\sim2.0”中的模型为非线性模型。

(3) 采用与传递函数模型实验中完全相同的实验步骤，观察获得结果，并将两种模型的关键结果进行对比。高度通道对比图如右所示。

从图中可以看出，传递函数模型的滤波速度与多旋翼非线性模型的滤波速度几乎一致，可以认为卡尔曼滤波器在仿真1.0中和仿真2.0中效果**几乎是一样的**。

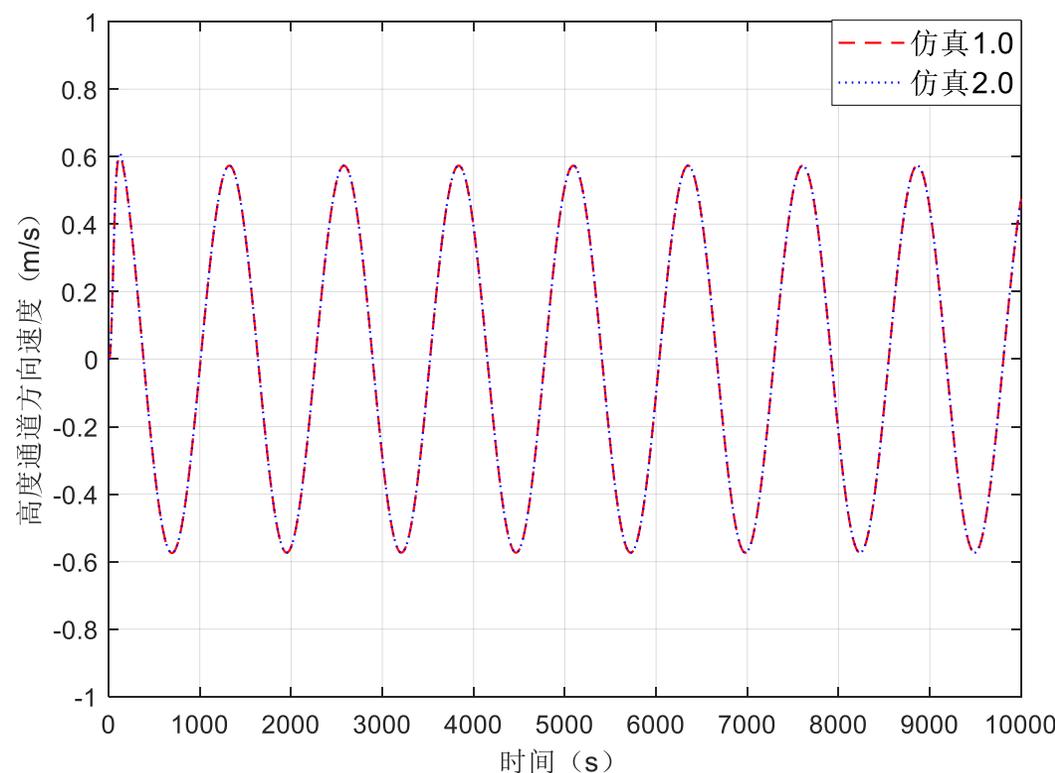


图. 设计实验仿真2.0高度通道滤波速度输出对比图

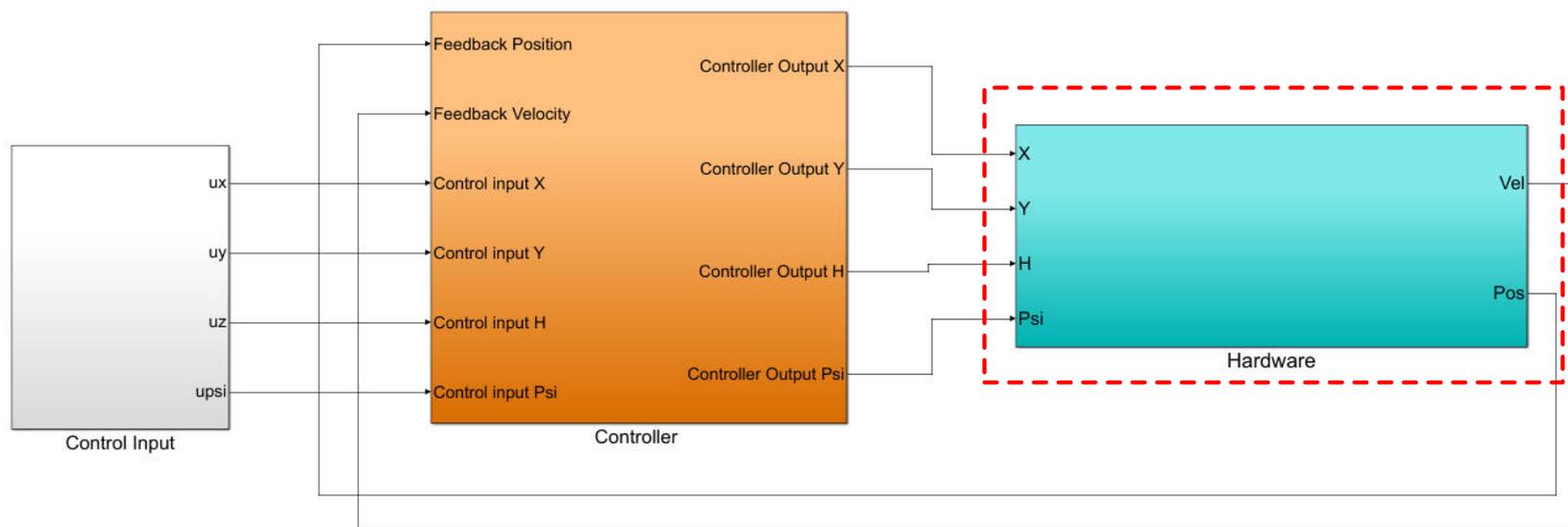
# 第五章滤波器设计实验

设计实验：仿真2.0

# 4.设计实验

## □ 实验步骤：硬件在环仿真

硬件在环仿真实验的内容与设计实验相同，只是把设计实验中的多旋翼模型模块替换成了硬件在环模块。首先对硬件在环仿真Simulink模型进行简单介绍，打开文件“e2\_3\_TF\_KalmanFilter\_Delay\_HITL.slx”文件。



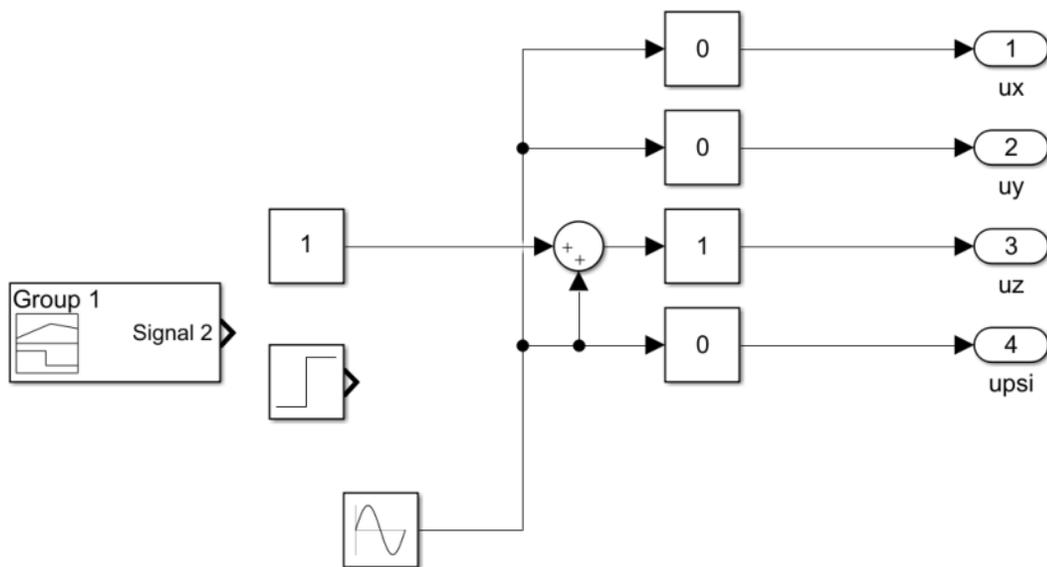
虚线框是硬件在环仿真的硬件接口模块，用于和RflySim进行信息交互。按照硬件在环仿真实验流程打开RflySim

图. 硬件在环仿真接口模块

# 4.设计实验

## □ 实验步骤：硬件在环仿真

连接自驾仪，并运行“startSimulation.m”脚本文件。在运行Simulink文件之前，需要对于输入信号进行设置，即输入信号在“Control Input”模块中，如下图所示。



实验中需要对四个通道分别做测试，通过修改0或者1来选择输入正弦信号的通道。注意高度通道需要一直保持输入信号为1，以保持多旋翼的飞行状态。在设置好输入信号后，运行模型文件进行硬件在环仿真。

图. Control Input模块

# 4.设计实验

## □ 实验步骤：硬件在环仿真

以高度通道结果为例进行分析

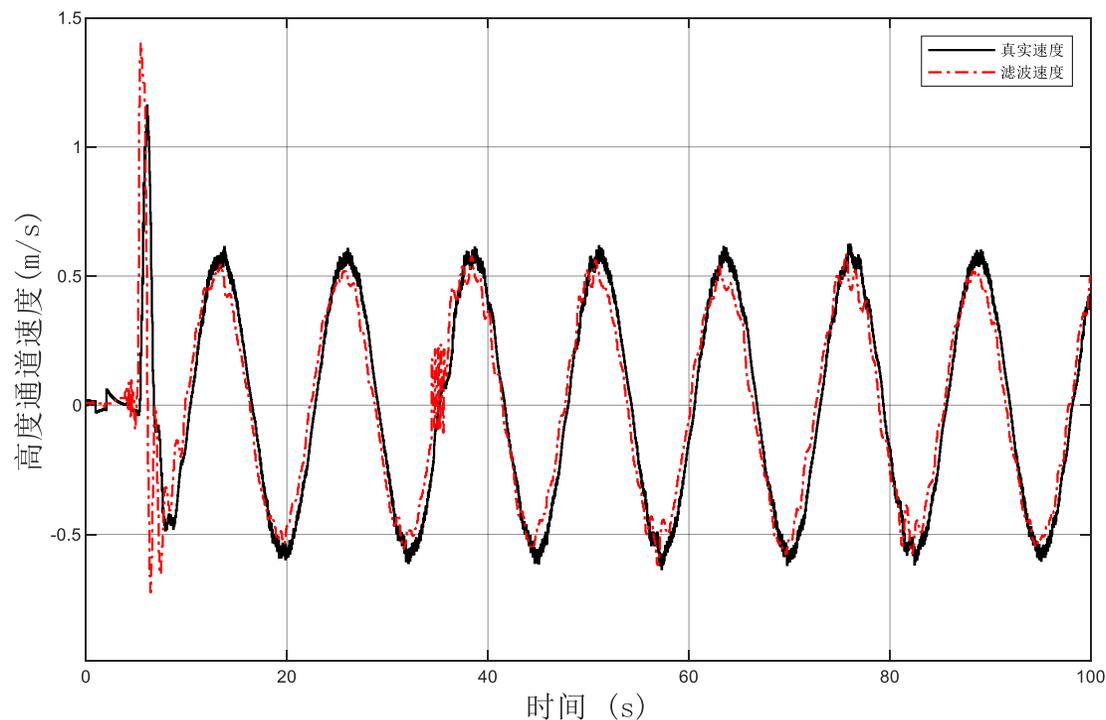


图. 硬件在环仿真实验高度通道滤波速度和真实速度对比结果

可以明显看出，即使在观测存在延迟的情况下，经过滤波之后，速度信号中的噪声被去除，速度信号也较为平缓，并无较大波动。

# 第五章多旋翼滤波器设计 硬件在环仿真实验

# 大纲



1. 基本原理
2. 基础实验
3. 分析实验
4. 设计实验
5. 实飞实验
6. 本章小结



# 5. 实飞实验

## □ 实验目标

### ■ 准备

- 软件：MATLAB R2017b及以上版本，基于Simulink的控制器设计与仿真平台和实验指导包“e1.4”，CIFER软件及使用文档（见附录A）
- 硬件：计算机，室内定位系统，带半自主飞控的多旋翼飞行器

### ■ 目标

- 1) 由于在实飞实验中，传感器信号反馈存在延时，因此基于设计实验中的扩维法设计新卡尔曼滤波器算法进行速度反馈，观察控制效果。
- 2) 将基于扩维法设计的新卡尔曼滤波器算法进行闭环控制，对比控制效果。

# 5. 实飞实验

## □ 实验步骤

### (1) 步骤一：了解相关软硬件平台

首先阅读给定多旋翼飞行器使用文档(详细内容请参考第三章3.2小节)的内容，对于Simulink模型有一个初步的了解。

### (2) 步骤二：打开滤波模型

打开本节课所附带的文件夹“e2\ e2.4”，该文件夹内容如下。

1) “start\_tello.m”文件，用于初始化以及启动相应的Simulink程序。

2) “e2\_4\_kalman\_filtre.slx”文件，用于与给定多旋翼飞行器进行交互所使用的Simulink模型，如右图所示。

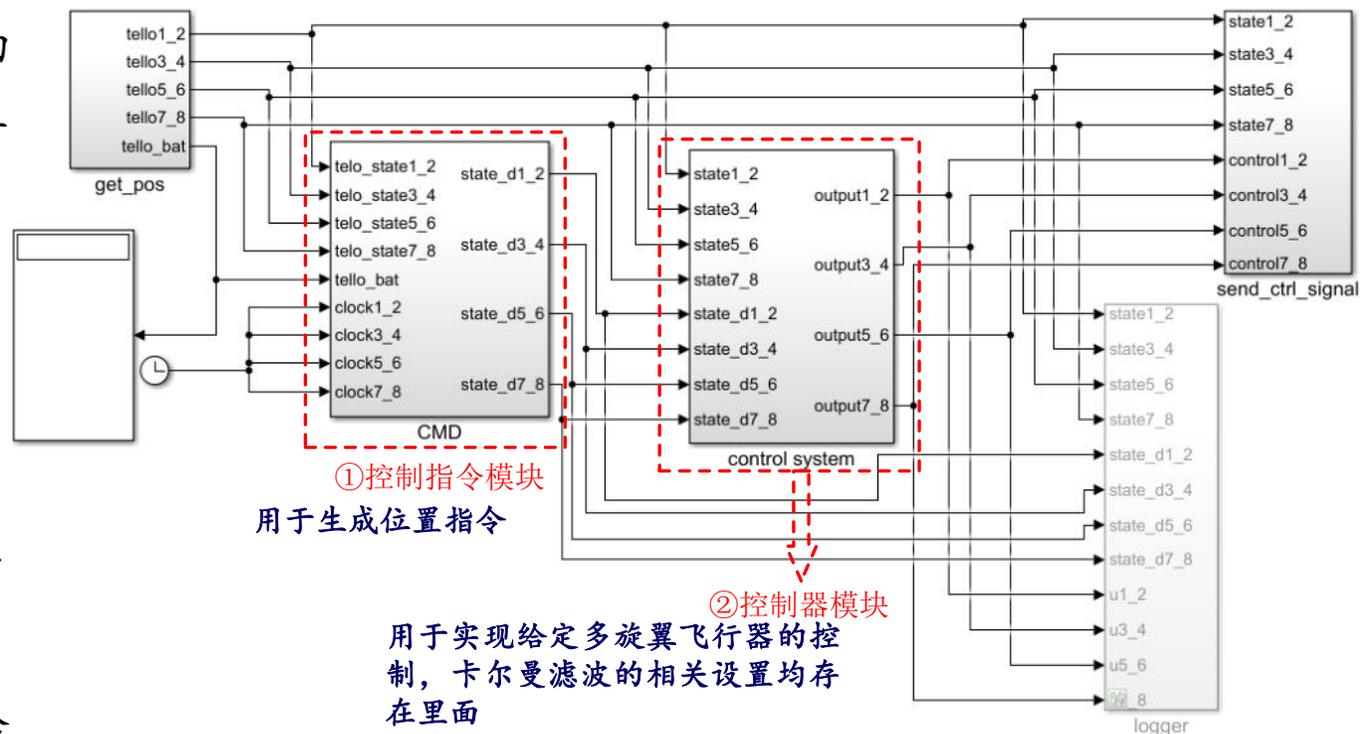


图. 整体模块示意图，Simulink文件“e2\_4\_kalman\_filtre.slx”

# 5. 实飞实验

## □ 实验步骤

### (2) 步骤二：打开滤波模型

进入“控制器模块”可以看到“卡尔曼滤波器模块”

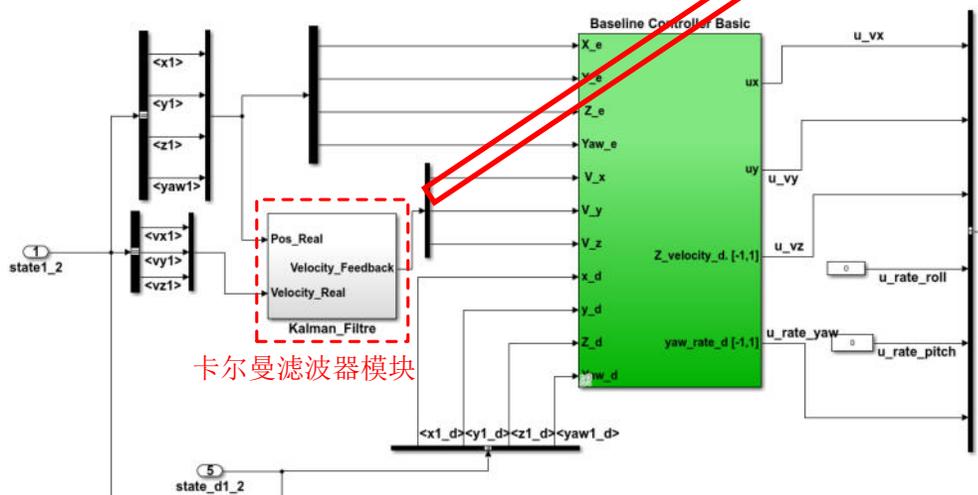


图. “控制器模块”示意图, Simulink文件“e2\_4\_kalman\_filtre.slx”

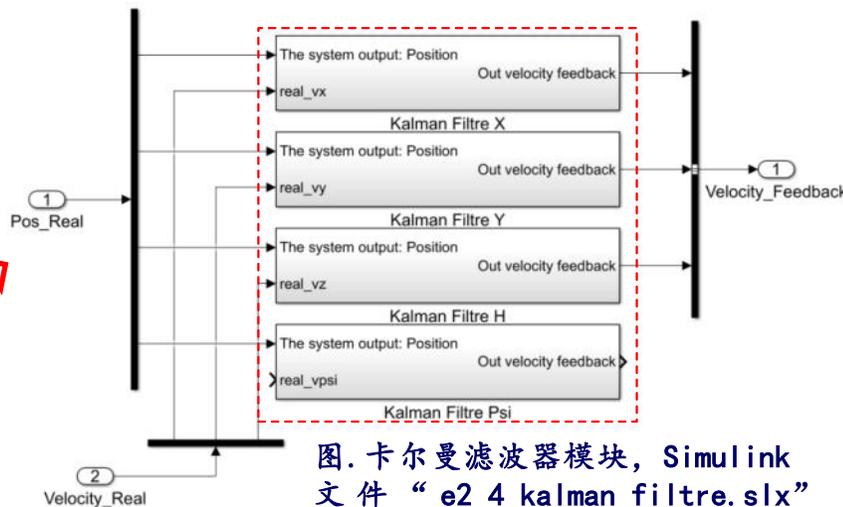


图. 卡尔曼滤波器模块, Simulink文件“e2\_4\_kalman\_filtre.slx”

代表扩维卡尔曼滤波的更新过程, 里面代码和设计实验类似, 考虑了实际反馈中三个采样周期延迟的影响, 这里不做详细介绍

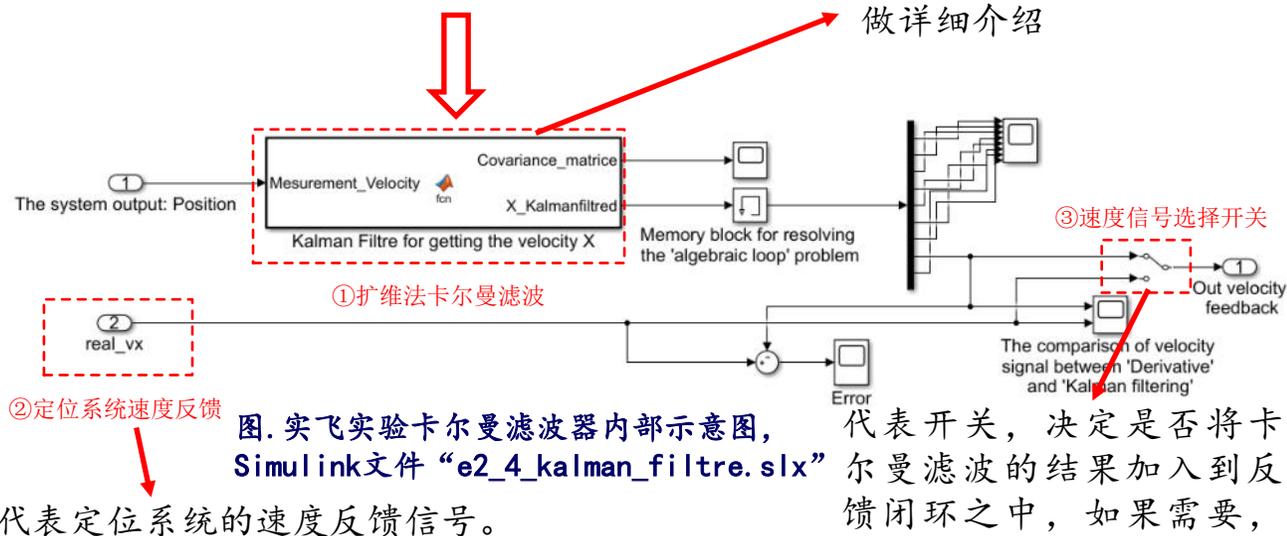


图. 实飞实验卡尔曼滤波器内部示意图, Simulink文件“e2\_4\_kalman\_filtre.slx”

代表定位系统的速度反馈信号。

代表开关, 决定是否将卡尔曼滤波的结果加入到反馈闭环之中, 如果需要, 则要将开关拨到上面, 否则将开关拨到下面。



# 5. 实飞实验

## □ 实验步骤

### (3) 步骤三：设置正弦输入

修改了步骤二的相应模块之后，给每个通道输入实验目标要求的正弦波，即周期为10s，幅值为1的正弦信号。

### (4) 步骤四：初始化参数

在完成了相应的修改后，可以进行实验。运行“e2\ e2.4\start\_tello.m”初始化文件，运行后“e2\_3\_kalman\_filtre.slx”模型文件会自动打开。

### (5) 步骤五：系统启动流程

#### ◆ 启动OptiTrack

打开一个新终端，运行命令“roslaunch mocap\_optitrack multi\_rigidbody8.launch”；

#### ◆ 启动tello\_driver

打开一个新终端，运行命令“roslaunch tello\_driver tello\_node.launch”；

#### ◆ 起飞Tello

打开一个新终端，运行命令“roslaunch tello Tello\_takeoff\_all”，可以看到两架多旋翼起飞并保持悬停在正上方高度1米位置；

#### ◆ 运行MATLAB控制程序

运行“e2\_4\_kalman\_filtre.slx”模型文件，分别进行各通道的卡尔曼滤波实验。

#### ◆ 降落Tello

打开一个新终端，运行命令“roslaunch tello Tello\_land\_all”，在两架多旋翼降落后，结束所有终端。



# 5. 实飞实验

## □ 实验步骤

### (6) 步骤六：设置参数，观察实验效果

为了观察卡尔曼滤波的效果，需要把每个通道的速度获取模块中的开关调至上部，将卡尔曼滤波的结果引入闭环系统。同时，对于卡尔曼滤波器的两个噪声参数，统一将过程噪声的标准差定为0.05，测量噪声的标准差定为0.01。运行模型文档“e2\_4\_kalman\_filtre.slx”，分别对各通道给定实验目标中的特定信号，利用示波器显示其滤波效果。

### (7) 步骤七：对比效果观测打开滤波模型

在获得了卡尔曼滤波之后的速度信号后，可以与OptiTrack定位系统通过位置微分得到的速度（当成真实速度值）进行对比，以便获得一个更直观的滤波器效果。



在真实情况下，观测信息含有一定延迟，因而需要考虑延迟情况下的卡尔曼滤波，可以参考设计实验中的递推预测法和扩维法。从实飞实验对比的结果可以看出，**即使是在延迟情况下，卡尔曼滤波仍能有效获得速度信号，并且结果与基础实验中的速度获取结果相似。**综上所述，在延迟情况下卡尔曼滤波器仍然可以被使用！

# 5. 实飞实验

## □ 结果及分析

因为偏航通道并不需要偏航角速率的反馈信息，因此这里只需要对三个方向的速度进行滤波实验即可。需要注意的是，本书将OptiTrack视觉定位系统的反馈信号作为真实的姿态信号（该传感器信号反馈及时且较为精准），如果读者有合适的传感器，也可以将传感器反馈信号作为真实信号进行对比。而OptiTrack视觉定位系统只能获取真实位置信息，真实速度信息为位置信息的微分替代。接下来，我们以高度通道的结果为例进行说明验证，其它通道读者自行验证。

由此可以看出，高度通道方向的速度滤波与真实的速度信号**基本拟合**，同时相应的**延迟也较小**，并且真实速度由于微分的原因还会产生突变，而滤波速度**更加平缓**。因此可以使用卡尔曼滤波获得的速度来进行控制，取代原有OptiTrack室内定位系统的速度获取。

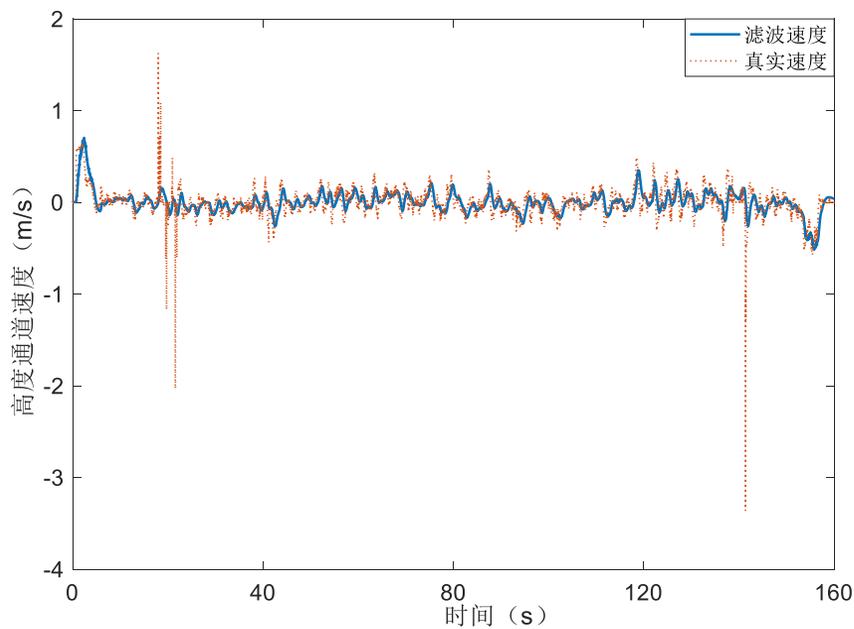
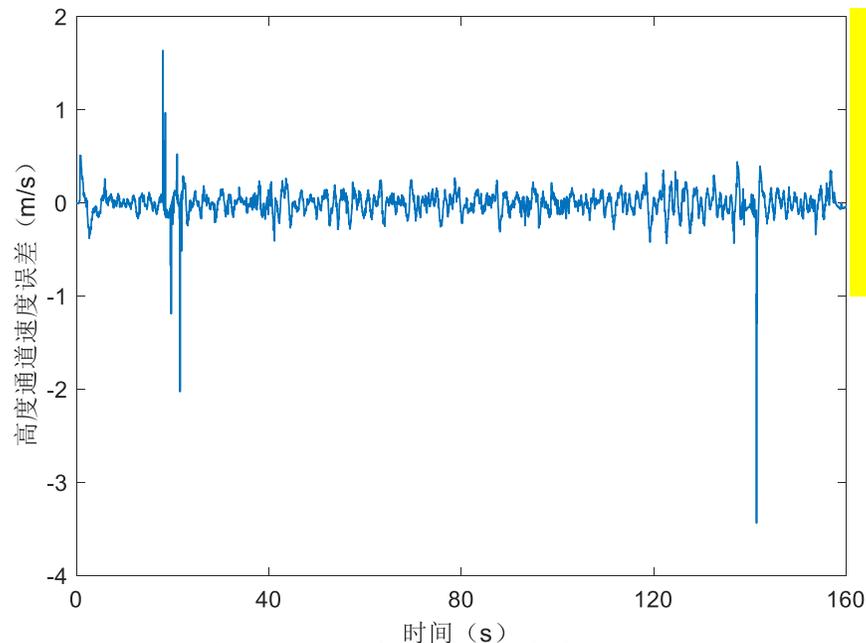


图. 实飞实验高度通道真实速度与滤波速度对比图



由此图可知，各通道误差都相对较小，除了真实速度突变部分，**大部分时刻误差都在0附近。**

图. 实飞实验高度通道速度误差

# 5. 实飞实验

## □ 有效性验证

可以将卡尔曼滤波器获得的速度作为反馈加入到控制器中，同样使用本节书中的正弦信号，即周期10s，幅值为1的正弦波信号作为参考跟踪信号。

从图中可以看出，在高度通道中，**滤波后的期望位置与实飞过程位置反馈较为一致**，在一定误差范围内可以认为将卡尔曼滤波后的速度引入闭环控制，给定多旋翼飞行器可以很好地跟随输入指令。

由此可知，用卡尔曼滤波器获得的速度代替原有速度进行控制器设计，控制效果仍然很理想，可以达到预期效果。

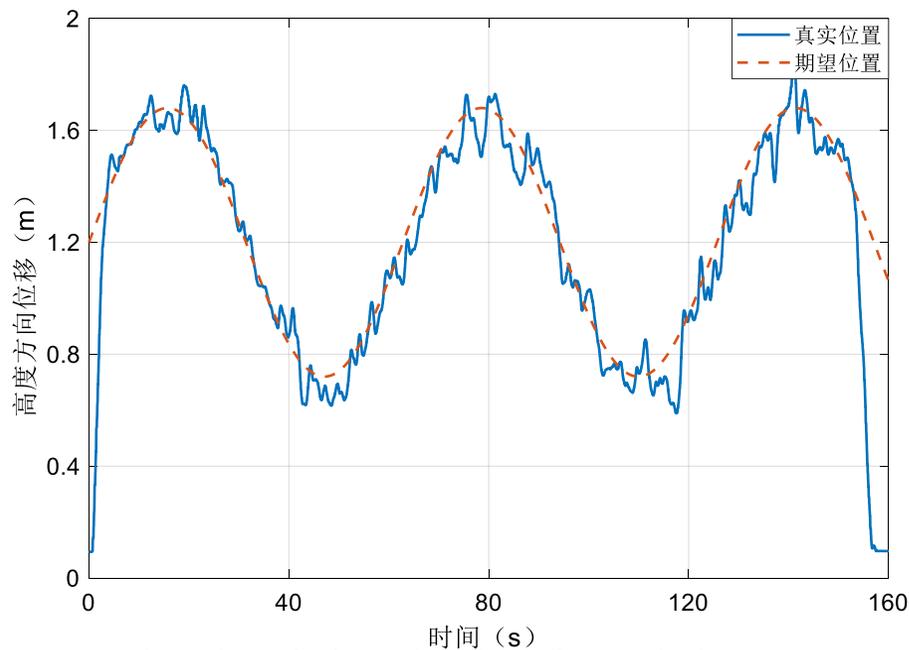


图. 实飞实验高度通道卡尔曼滤波器控制效果图



图. 实飞实验高度通道卡尔曼滤波器实飞图（影像进行了叠加）

# 第五章多旋翼滤波器设计 实飞实验

# 大纲



1. 基本原理
2. 基础实验
3. 分析实验
4. 设计实验
5. 实飞实验
6. 本章小结



# 6. 总结

(1) 通过基础实验，了解卡尔曼滤波算法的原理及应用，并利用卡尔曼滤波方法重新获得速度反馈信号，最后滤波后的速度信号代替原有速度信号进行反馈。

(2) 通过分析实验，了解卡尔曼滤波的两个重要的参数，即过程噪声协方差和测量噪声协方差，对滤波效果的影响。

(3) 在设计实验中，在传输有延迟的情况下，基于扩维法设计新的卡尔曼滤波器算法，并利用改进的卡尔曼滤波方法重新获得的速度反馈信号，并将其加入闭环控制；对比真实速度和滤波速度，二者差别不大；将滤波信号加入闭环控制后可以很好地跟踪期望位置，这说明考虑延迟的必要性。

(4) 通过实飞实验，考虑到实际飞行过程中传感器信号反馈存在延时。在闭环控制中采用扩维法设计的卡尔曼滤波器算法进行速度反馈，发现多旋翼的位置输出与位置期望比较吻合，可以实现较好的控制效果。

(5) 通过以上实验，让读者较为深入掌握卡尔曼滤波算法。

# 致谢



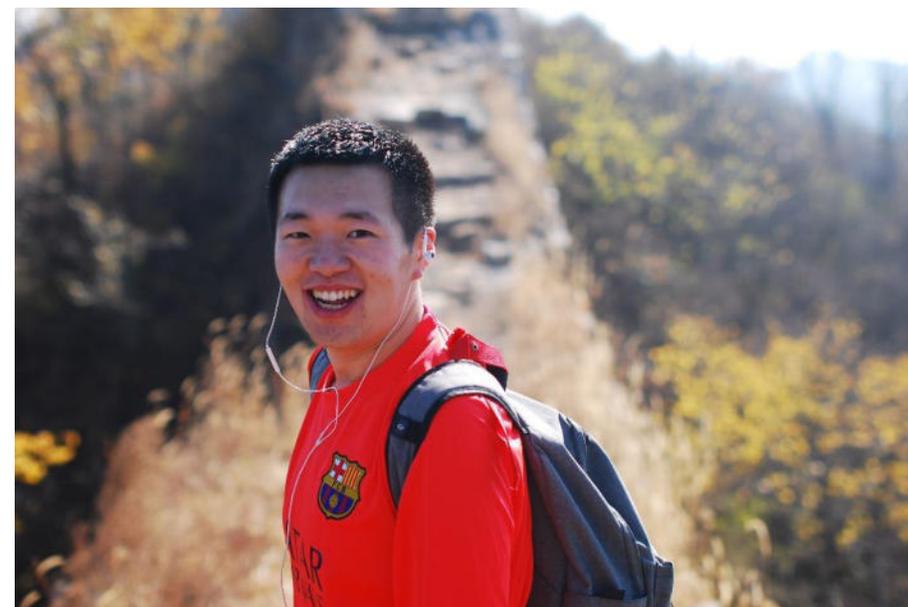
感谢可靠飞行控制研究组同学



宁俊清



毛鹏达



马泽青

为本节课程准备做出的贡献



# 谢谢!

全 权

qq\_buaa@buaa.edu.cn

可靠飞行控制研究组



<http://rfly.buaa.edu.cn>