



---

# 多旋翼飞行器设计与控制

## 第十讲 稳定性和可控性

全权 副教授

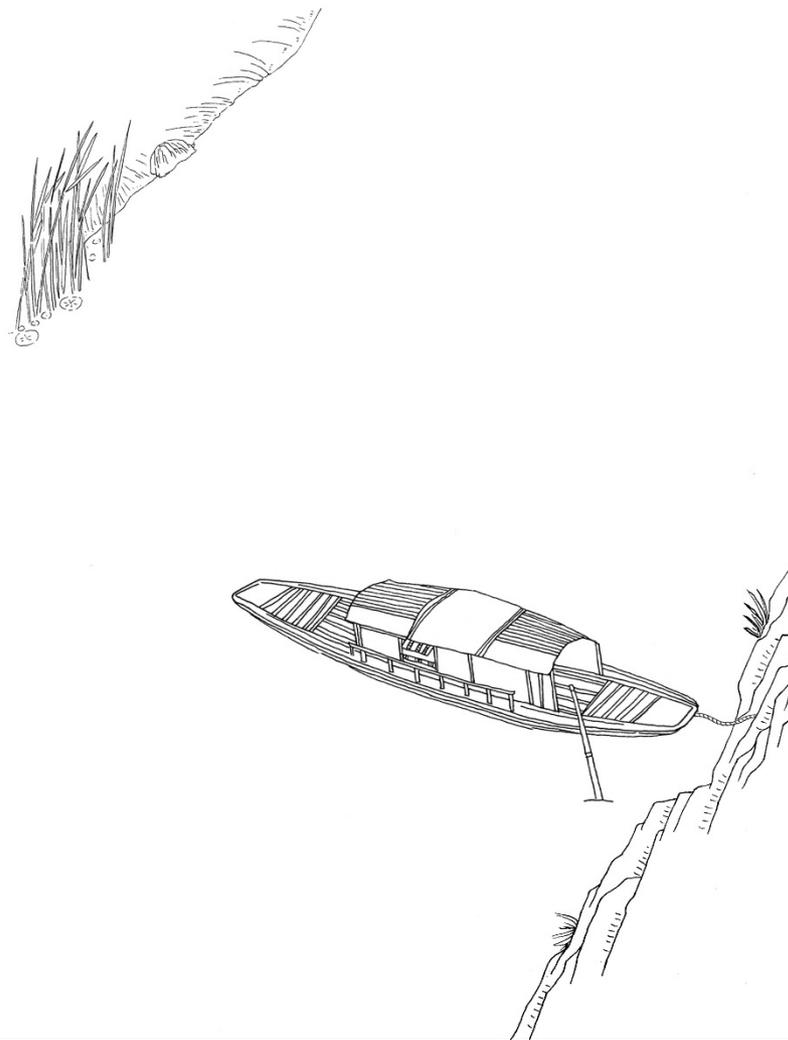
qq\_buaa@buaa.edu.cn

自动化科学与电气工程学院

北京航空航天大学



# 东方智慧



舟自横



# 核心问题

---

多旋翼为什么不稳定，以及多旋翼的可  
控度如何？



# 大纲

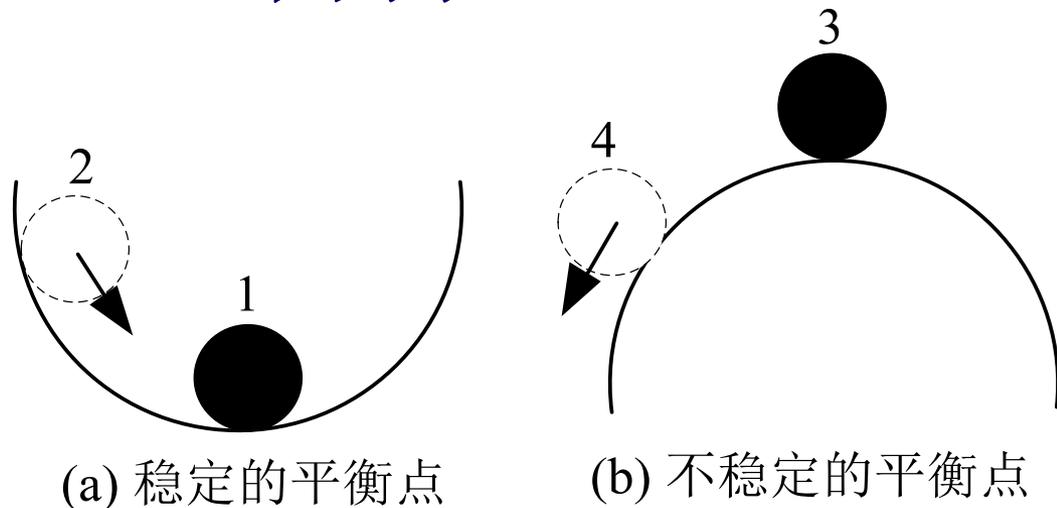
---

1. 稳定性的定义
2. 稳定性判据
3. 可控性的基本概念
4. 多旋翼飞行器的可控性
5. 本讲小结



# 1. 稳定性的定义

## □ 一个例子



稳态位置1和3处的小球受到小的扰动后，是否依然处于稳态？

图10.1 稳定性的例子

讨论稳定首先需要明确的是被讨论对象是动态系统，其次要明确该动态系统的平衡点。图中1和3处是平衡点，2和4处不是平衡点，因此我们只讨论1和3位置处的稳定性



# 1. 稳定性的定义

## □ 标准形式

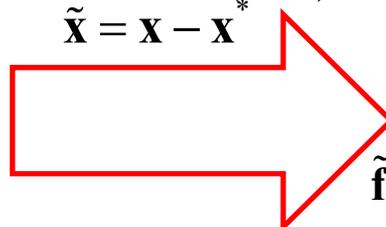
这里用微分方程来描述动态系统。一个带输入的非线性动力系统通常可以用如下的非线性微分方程描述

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ &+ \\ \mathbf{u} &= \mathbf{g}(t, \mathbf{x}) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{g}(t, \mathbf{x})) \\ &\triangleq \mathbf{f}_c(t, \mathbf{x}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}^* &= \mathbf{0} = \mathbf{f}_c(t, \mathbf{x}^*) \\ \tilde{\mathbf{x}} &= \mathbf{x} - \mathbf{x}^* \end{aligned}$$



转化后的系统  
平衡点是0

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{f}}_c(t, \tilde{\mathbf{x}})$$

$$\tilde{\mathbf{f}}_c(t, \tilde{\mathbf{x}}) \triangleq \mathbf{f}_c(t, \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{x}^*) - \mathbf{f}_c(t, \mathbf{x}^*)$$

其中 $\mathbf{x}$ 是状态，而 $\mathbf{u}$ 表示控制输入是状态与时间的函数。因此，不失一般性，而且仅考虑线性时不变系统，

对动态系统  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ，假设其平衡点为0，以此讨论稳定性



# 1. 稳定性的定义

## □ 三种稳定性定义

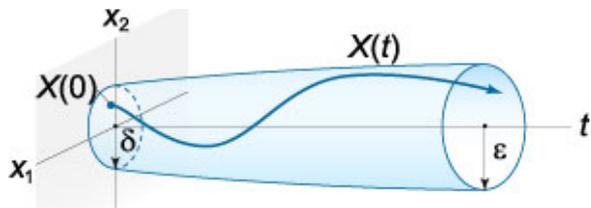
对动态系统  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ，假设其平衡点为  $\mathbf{x} = \mathbf{0}_{n \times 1}$ 。则有以下稳定性定义[1]：

定义10.1. 如果  $\forall R \in \mathbb{R}_+, \exists r \in \mathbb{R}_+, \|\mathbf{x}(0)\| < r \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| < R, t \in \mathbb{R}_+$ ，则平衡点  $\mathbf{x} = \mathbf{0}_{n \times 1}$  是稳定的（李雅普诺夫稳定）。

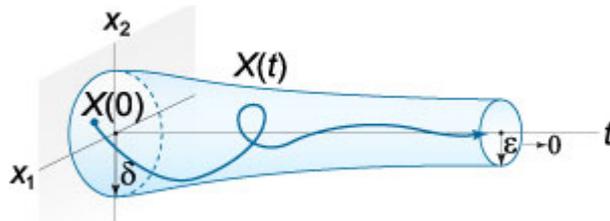
定义10.2. 如果  $\exists r \in \mathbb{R}_+, \|\mathbf{x}(0)\| < r \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t)\| = 0$ ，则平衡点  $\mathbf{x} = \mathbf{0}_{n \times 1}$  是渐近稳定的。

定义10.3. 如果  $\exists \alpha, \lambda, r \in \mathbb{R}_+$ ，使得  $\forall t \in \mathbb{R}_+, \|\mathbf{x}(t)\| \leq \alpha \|\mathbf{x}(0)\| e^{-\lambda t}, \mathbf{x}(0) \in B(\mathbf{0}, r)$ ，则平衡点  $\mathbf{x} = \mathbf{0}_{n \times 1}$  指数稳定的。

李雅普诺夫稳定



渐近稳定



指数稳定

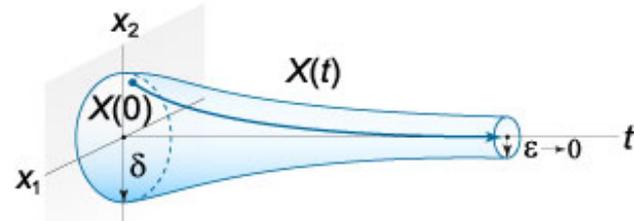


图10.2 不同的稳定性 图片来源<http://www.math24.net/basic-concepts-of-stability-theory.html>

[1] Slotine J-J, Li W. Applied Nonlinear Control. New Jersey, USA: Prentice Hall, 1991



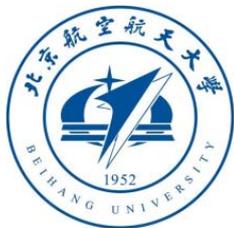
# 1. 稳定性的定义

## □ 三种稳定性定义的关系

这三个定义的关系是指数稳定  $\subseteq$  渐近稳定  $\subseteq$  稳定。

$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{t}$   渐近稳定而非指数稳定

局部稳定与初始状态相关，也就是跟  $\|\mathbf{x}(0)\| < r$  中的  $r$  相关。而全局稳定意味着  $\mathbf{x}(0)$  在任何地方都具备要求的性质，也就是跟以上定义的  $r$  无关或  $r = \infty$ 。



## 2. 稳定性判据

### □ 多旋翼是否静稳定的？

考虑第六讲中模型的简化形式，不考虑  ${}^b\omega \times (J^b\omega) + G_a$  等：

$$\begin{aligned} \dot{\Theta} &= {}^b\omega \\ {}^b\dot{\omega} &= J^{-1}\tau \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{\Theta} &= {}^b\omega \\ {}^b\dot{\omega} &= \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{aligned}$$

归纳为状态方程形式：

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z}$$

其中：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix}, \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \Theta \\ {}^b\omega \end{bmatrix}$$

状态方程的解为：

$$\mathbf{z}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{z}(0)$$

**固定翼**主要不仅受到螺旋桨的拉力和重力，还受到空气的阻力和升力，其中升力跟自身的姿态是相关的。它会因固定翼姿态的变化而变化，因此**可以形成一种反馈调节姿态**。这就是为什么多旋翼需要自驾仪才能够使飞机易于受控，而对于固定翼航模，则不需要自驾仪。

基于Jordan标准型去分解矩阵指数函数，可知解是不稳定的（特征根都为零）。



## 2. 稳定性判据

### □ 不变集原理

#### (1) 定义

如果从集合 $S$ 中一个点出发的系统轨线永远停留在 $S$ 中，那么称这一个集合 $S$ 称为一个动态系统的**不变集**。

#### (2) 局部不变集定理

考虑自治非线性系统  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ，其中 $\mathbf{f}$ 是连续的。如果存在具有一阶连续偏导数的标量函数 $V(\mathbf{x})$ ，使得：

- 1) 对于任意的  $l \in \mathbb{R}_+$ ，由  $V(\mathbf{x}) < l$  定义的  $\Omega_l$  是一个有界区域；
- 2)  $\dot{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \partial V(\mathbf{x}) / \partial \mathbf{x} \leq 0, \mathbf{x} \in \Omega_l$

假设  $R$  为  $\Omega_l$  内使  $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$  的所有点集合， $M$  为  $R$  中的最大不变集，那么当时间  $t \rightarrow \infty$  时，从  $\Omega_l$  出发的每一个解都趋于  $M$

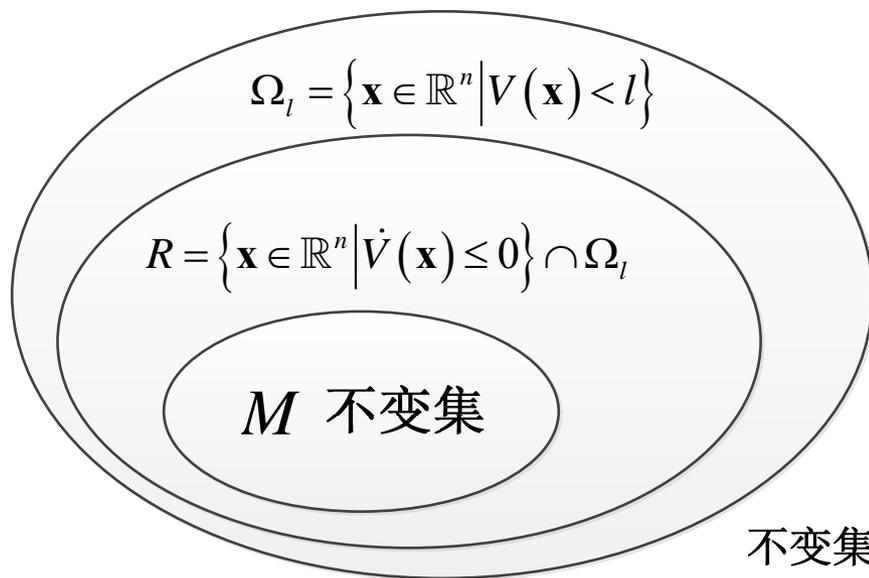


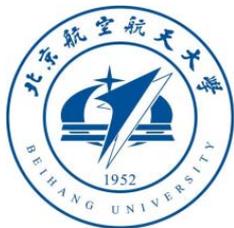
## 2. 稳定性判据

### □ 不变集原理

#### (2) 局部不变集定理

假设  $R$  为  $\Omega_l$  内使  $\dot{V}(\mathbf{x})=0$  的所有点集合,  $M$  为  $R$  中的最大不变集, 那么当时间  $t \rightarrow \infty$  时, 从  $\Omega_l$  出发的每一个解都趋于  $M$ .





## 2. 稳定性判据

### □ 不变集原理

#### (2) 局部不变集定理：举例

考虑系统： 
$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -x - v \end{cases}$$

定义李雅普诺夫函数并求导：

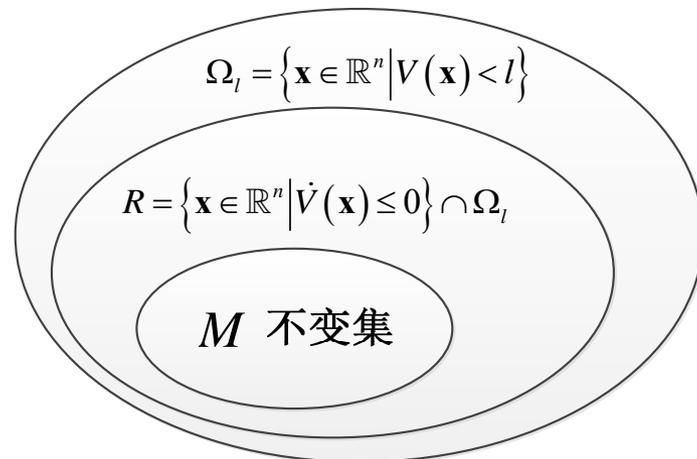
$$V(x) = \frac{1}{2}((x+v)^2 + v^2)$$

$$\dot{V}(x) = (x+v)(-x) + v(-x-v) = -(x+v)^2$$

得到集合  $R$ ：

$$R = \{(x, v) \mid x+v=0\} \cap \Omega_l$$

$$x+v=0 \Rightarrow \dot{x} = -x, \dot{v} = 0 \Rightarrow x=0, v=0$$



$R$ 中最大不变集：

$\Rightarrow M = \{(x, v) \mid x=0, v=0\}$

最大不变集  $M$  中只包含平衡点  $0$ ，所以系统渐近稳定



## 2. 稳定性判据

### □ 不变集原理

#### (3) 全局不变集定理

考虑自治非线性系统  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ，其中  $\mathbf{f}$  是连续的。如果存在具有一阶连续偏导数的标量函数  $V(\mathbf{x})$ ，使得：

1)  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$

$V$ 不需要为正数

2)  $\dot{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \partial V(\mathbf{x}) / \partial \mathbf{x} \leq 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

假设  $R$  状态空间内使  $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$  的所有点集合,  $M$  为  $R$  中的最大不变集, 那么当时间  $t \rightarrow \infty$  时, 所有的解都全局渐进收敛于  $M$ 。



## 2. 稳定性判据

### □ 一个简单系统的稳定性

考虑如下的二阶动态系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}$$

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{u}$$

假设  $\mathbf{u} = -k_1(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{x}}_d) - k_2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_d)$  为PD控制器，则系统可以整理为

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z}$$

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} - \mathbf{x}_d \\ \mathbf{v} - \dot{\mathbf{x}}_d \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{I}_n \\ -k_2 \mathbf{I}_n & -k_1 \mathbf{I}_n \end{bmatrix}$$

定理: 如果  $k_1, k_2 > 0$  那么  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{z}(t)\| = 0$ . 进一步的,  $\mathbf{z} = \mathbf{0}_{2n \times 1}$  全局指数稳定。

证明Tips:  $\mathbf{z}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{z}(0)$ ,  $\mathbf{A}$  的特征值均有负实部, 基于Jordan标准型去分解矩阵指数函数, 可以得到定理中的结论。



## 2. 稳定性判据

### □ 一个带饱和系统的稳定性

考虑如下的二阶动态系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}$$

$$\dot{\mathbf{v}} = \text{sat}_{\text{gd}}(\mathbf{u}, a)$$

假设  $\mathbf{u} = -k_1(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{x}}_d) - k_2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_d)$  为PD控制器，并且  $\text{sat}_{\text{gd}}(\mathbf{u}, a) = \kappa_a(\mathbf{u})\mathbf{u}$ ,

$$\kappa_a(\mathbf{u}) = \begin{cases} 1, & \|\mathbf{u}\|_{\infty} \leq a \\ \frac{a}{\|\mathbf{u}\|_{\infty}}, & \|\mathbf{u}\|_{\infty} > a \end{cases}, a \in \mathbb{R}_+$$

其中  $\mathbf{u} \triangleq [u_1 \ \cdots \ u_n]^T \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|\mathbf{u}\|_{\infty} \triangleq \max(|u_1|, \dots, |u_n|)$

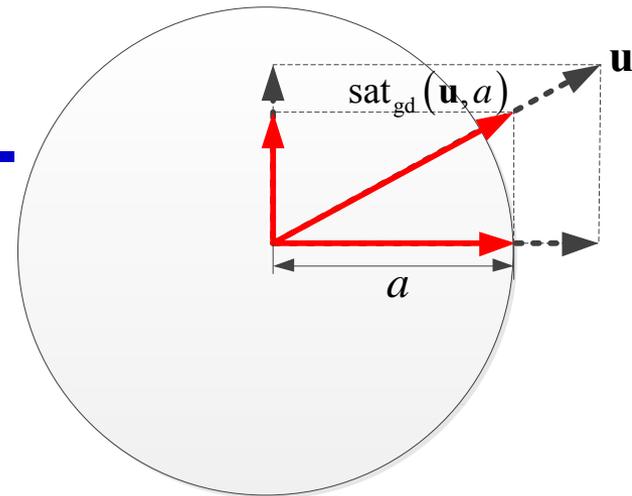


图10.3 保方向的含义

一些开源自驾仪，如PX4，采用了保方向饱和函数，其与 $\mathbf{u}$ 方向一致。



## 2. 稳定性判据

### □ 一个带饱和系统的稳定性

定理:

如果  $k_1, k_2 > 0$  那么  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|z(t)\| = 0$ . 进一步的,  $z = \mathbf{0}_{2n \times 1}$  局部指数稳定。

证明:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} = \text{sat}_{\text{gd}}(\mathbf{u}, a) \\ \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_d \\ \tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v} - \dot{\mathbf{x}}_d \end{cases}$$



$$\begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{v}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{v}}} = \kappa_a(\mathbf{u})\mathbf{u} \end{cases}$$

$C_u$  是  $u(t)$  定义的光滑曲线, 如果是标量  $u(t)$ , 则

$$\int_{C_u} d\mathbf{u} \triangleq \int_0^{u(t)} ds$$

定义李雅普诺夫函数, 并求导

$$V = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{v}}^T \tilde{\mathbf{v}} + \frac{1}{k_2} \int_{C_u} \kappa_a(\mathbf{u}) \mathbf{u}^T d\mathbf{u} \Rightarrow \dot{V} = \tilde{\mathbf{v}}^T \dot{\tilde{\mathbf{v}}} + \frac{1}{k_2} \kappa_a(\mathbf{u}) \mathbf{u}^T \dot{\mathbf{u}} = -\frac{k_1}{k_2} \kappa_a^2(\mathbf{u}) \mathbf{u}^T \mathbf{u} \leq 0$$

求助不变集原理!



## 2. 稳定性判据

### □ 一个带饱和系统的稳定性

定理:

如果  $k_1, k_2 > 0$  那么  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|z(t)\| = 0$ . 进一步的,  $z = \mathbf{0}_{2n \times 1}$  局部指数稳定。

证明:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} = \text{sat}_{\text{gd}}(\mathbf{u}, a) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{v}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{v}}} = \kappa_a(\mathbf{u})\mathbf{u} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_d \\ \tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v} - \dot{\mathbf{x}}_d \end{cases}$$

指数稳定一般要求李雅普诺夫函数满足类似形式

$$V(\mathbf{x}) \geq 0$$

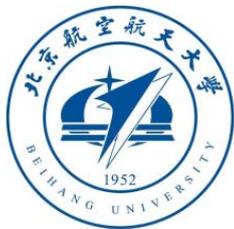
$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq -\lambda V(\mathbf{x}), \lambda \in \mathbb{R}_+$$

以下不满足指数稳定条件!

定义李雅普诺夫函数, 并求导

$$V = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{v}}^T \tilde{\mathbf{v}} + \frac{1}{k_2} \int_{C_u} \kappa_a(\mathbf{u}) \mathbf{u}^T \mathbf{u} \Rightarrow \dot{V} = \tilde{\mathbf{v}}^T \dot{\tilde{\mathbf{v}}} + \frac{1}{k_2} \kappa_a(\mathbf{u}) \mathbf{u}^T \dot{\mathbf{u}} = -\frac{k_1}{k_2} \kappa_a^2(\mathbf{u}) \mathbf{u}^T \mathbf{u} \leq 0$$

求助不变集原理!



## 2. 稳定性判据

### □ 一个带饱和系统的稳定性

(1) 最大不变集。  $\dot{V} = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}_{n \times 1} \Rightarrow -k_1 \tilde{\mathbf{v}} - k_2 \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{0}_{n \times 1} \Rightarrow \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{v}} = -\frac{k_1}{k_2} \tilde{\mathbf{x}}$

只有一个稳定的平衡点:  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{0}_{n \times 1}$  , 因此  $-k_1 \tilde{\mathbf{v}} - k_2 \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{0}_{n \times 1} \Rightarrow \tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{0}_{n \times 1}$

换句话说最大不变集  $M$  中只包含一个点:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{0}_{n \times 1}, \tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{0}_{n \times 1}$$

(2) 稳定性。根据局部不变集定理,  $\mathbf{z} = \mathbf{0}_{2n \times 1}$  **局部渐进稳定**。由

于  $\|V\| \rightarrow \infty \Rightarrow \|\mathbf{z}\| \rightarrow \infty$  , 因此  $\mathbf{z} = \mathbf{0}_{2n \times 1}$  **也全局渐进稳定**。

在系统原点  $\mathbf{z} = \mathbf{0}_{2n \times 1}$  的邻域内, 控制量  $\mathbf{u}$  不受约束, 因此根据上一个例子

可知系统原点 **局部指数稳定**。



### 3. 可控性的基本概念

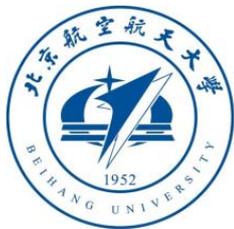


1983年5月1日，以色列国防军空军的两架F-15鹰式战斗机和四架A-4N“天鹰”战机在以色列和巴勒斯坦边境地区的内盖夫沙漠上空进行了一次模拟空战格斗训练。其中一架机号为957的F-15战机被用于新飞行员的适应性训练，在训练中与一架A-4N相撞，A-4N当场起火爆炸，飞行员弹射逃生。F-15失去一侧机翼，但并未坠毁，飞行员坚持将单翼的战机飞回基地并成功降落，成为航空史上的奇迹。

- 飞行员牛
- 姿态可控

只剩一个机翼还能飞回来！

来自 <https://theaviationist.com/2014/09/15/f-15-lands-with-one-wing/>



## 3. 可控性的基本概念

### □ 经典可控性

考虑如下的线性时不变系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$$

#### (1) 定义

如果对任意的  $\mathbf{x}(t_0)$ ，存在定义在时间区间  $[t_0, t_1]$  上的  $\mathbf{u}_{[t_0, t_1]}$  可以将  $\mathbf{x}(t_0)$  控制到原点，则称系统可控。反之，系统不可控。

#### (2) 经典可控性判据：可控性矩阵满秩

可控性矩阵定义为： $C(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$

系统可控的充要条件是： $\text{rank}C(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = n$



## 3. 可控性的基本概念

### □ 一个简单的例子

考虑如下的线性时不变系统，其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow C(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因此， $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ 组成的系统不可控，但是

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \mathbf{x}(0)$$

趋近于0，**那这是否引出矛盾了呢？**答案是否定的！因为虽然系统的解最后趋于零，但收敛时间是无限的，因此系统在有限时间内并不可控。

因此，离散时间系统除了可控性，还有可达性。



# 3. 可控性的基本概念

## □ 经典可控性判据的局限性

考虑如下的线性时不变系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}, \mathbf{u} \in \Omega$$

经典可控性判据要求控制量的零点为控制量约束集的**内点**。

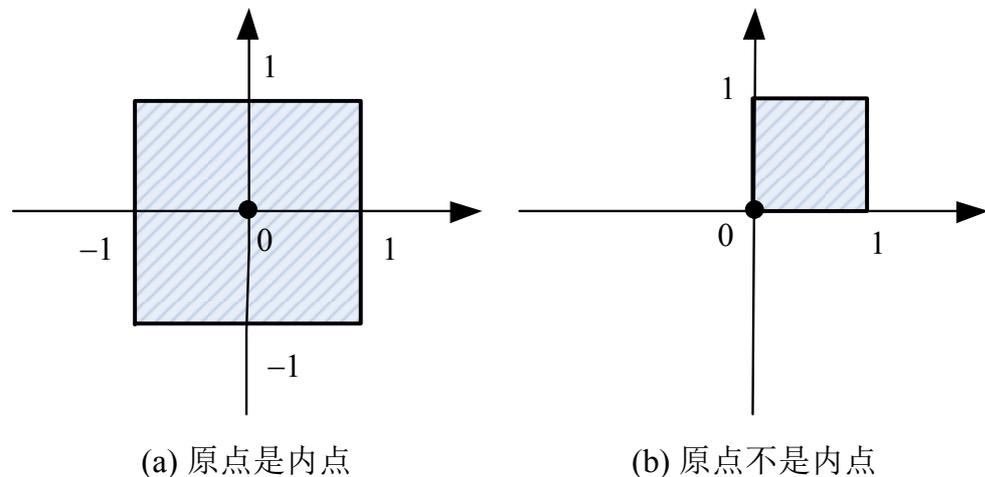
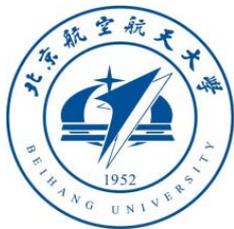


图10.4 内点示意图

经典可控性局限性例子（控制量零点非内点）

$$\dot{x} = x + u, u \leq 0$$

可控性矩阵满秩，经典可控性成立。然而，如果系统初始状态无论离从负实轴原点多么近，比如：**-0.0000001**，无论哪种控制量会将系统控制到负无穷远处！不可控！



# 3. 可控性的基本概念

## □ 正可控性

考虑如下的线性时不变系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}, \mathbf{u} \in \Omega$$

(1) 对约束集作限制，可控性的定义不变

如果对任意的  $\mathbf{x}(t_0)$ ，存在定义在时间区间  $[t_0, t_1]$  上的容许控制  $\mathbf{u}_{[t_0, t_1]}$  可以将  $\mathbf{x}(t_0)$  控制到原点，则称系统可控。反之，系统不可控。

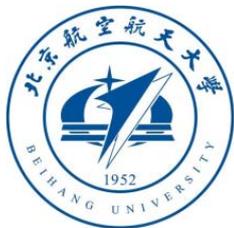
(2) 可控性判定定理（充分必要条件） [3]

1) 可控性矩阵  $C(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  满秩；

2) 不存在  $\mathbf{A}^T$  的实特征向量  $\mathbf{v}$  使得  $\mathbf{v}^T \mathbf{B}\mathbf{u} \leq 0$  对所有的  $\mathbf{u} \in \Omega$  成立

物理意义?

[3] Brammer R F. Controllability in linear Autonomous systems with positive controllers. SIAM Journal on Control, 1972, 10(2):779-805



## 3. 可控性的基本概念

### □ 正可控性

(3) 条件2)的必要性解释

不存在  $A^T$  的实特征向量  $v$  使得  $v^T B u \leq 0$  对所有的  $u \in \Omega$  成立

举个反例（以上条件为假-》不可控）：

存在  $A^T$  的实特征向量  $v_1$  使得  $v_1^T B u \leq 0$  对所有的  $u \in \Omega$  成立

那么  $v_1^T \dot{x} = v_1^T A x + v_1^T B u \xrightarrow{y = v_1^T x} \dot{y} = \lambda y + v_1^T B u$

如果  $\lambda > 0, v_1^T B u \leq 0$ ，则系统状态会趋于负无穷，不可控。

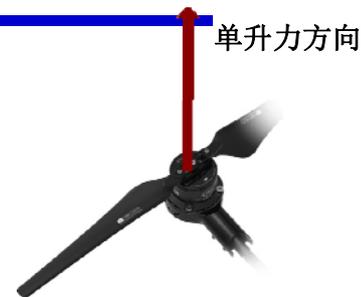


# 4. 多旋翼飞行器的可控性

## □ 多旋翼模型

### (1) 悬停模型

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}(\underbrace{\mathbf{u}_f - \mathbf{g}}_{\mathbf{u}})$$



### (2) 状态与系数矩阵

$$\mathbf{x} = [h \ \phi \ \theta \ \psi \ v_z \ \omega_{x_b} \ \omega_{y_b} \ \omega_{z_b}]^T \in \mathbb{R}^8$$

$$\mathbf{u}_f = [f \ \tau_x \ \tau_y \ \tau_z]^T \in \mathbb{R}^4$$

$$\mathbf{g} = [mg \ 0 \ 0 \ 0]^T \in \mathbb{R}^4$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{4 \times 4} & \mathbf{I}_4 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{8 \times 8}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{J}_f^{-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{8 \times 4}$$

$$\mathbf{J}_f = \text{diag}(-m, J_{xx}, J_{yy}, J_{zz}) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

### (3) 控制量约束

所有旋翼的升力向量:

$$\mathbf{f} = [T_1 \ \dots \ T_{n_r}]^T, \mathbf{f} = U_f = \prod_{i=1}^{n_r} [0, K_i]$$

机体力和力矩向量:

$$\mathbf{u}_f = \mathbf{B}_f \mathbf{f}, \Omega = \{\mathbf{u}_f \mid \mathbf{u}_f = \mathbf{B}_f \mathbf{f}, \mathbf{f} \in U_f\}$$

系统控制输入向量:

$$U = \{\mathbf{u} \mid \mathbf{u} = \mathbf{u}_f - \mathbf{g}, \mathbf{u}_f \in \Omega\}$$

[4] Du G-X, Quan Q, Yang B, Cai K-Y. Controllability analysis for multirotor helicopter rotor degradation and failure. AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2015, 38(5): 978-984



# 4. 多旋翼飞行器的可控性

## □ 正可控性判定方法

控制能力指标定义（**可控度**）：

$$\rho(\mathbf{g}, \partial\Omega) = \min \left\{ \|\mathbf{g} - \mathbf{u}_f\|, \mathbf{u}_f \in \partial\Omega \right\}$$

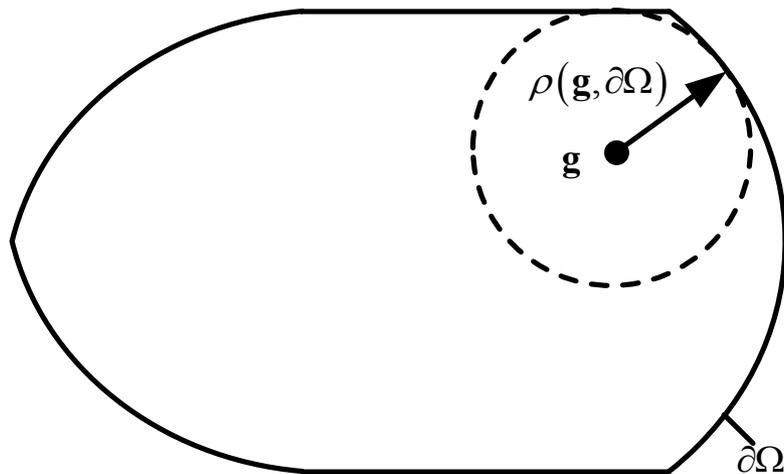


图10.5 可控度示意图

悬停模型

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B} \underbrace{(\mathbf{u}_f - \mathbf{g})}_{\mathbf{u}}$$

如果  $\rho(\mathbf{g}, \partial\Omega) > 0$  ,  
说明  $\mathbf{g}$  是约束集  $\Omega$  的  
内点

[5] Du G-X. Research on the Controllability Quantification of Multirotor Systems.

Doctoral Thesis. Beihang University, China, 2015. [In Chinese]



## 4. 多旋翼飞行器的可控性

### □ 正可控性判定方法

下列三个条件等价：

- 1)  $\rho(\mathbf{g}, \partial\Omega) > 0$
- 2) 不存在  $\mathbf{A}^T$  的实特征向量  $\mathbf{v}$  使得  $\mathbf{v}^T \mathbf{B}\mathbf{u} \leq 0$  对所有的  $\mathbf{u} \in \Omega$  成立
- 3)  $\mathbf{g}$  是  $\Omega$  的内点

多旋翼的悬停模态可控性矩阵  $C(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  满秩，那么多旋翼的可控性判定条件为

$$\rho(\mathbf{g}, \partial\Omega) > 0$$

计算工具箱参考：

A Matlab Toolbox for Calculating an Available Control Authority Index of Multicopters.

<http://rfly.buaa.edu.cn/resources/>



# 4. 多旋翼飞行器的可控性



## □ PNPNPN与PPNNPN布局六旋翼可控性

判定下列布局六旋翼有一个旋翼停机时的可控性

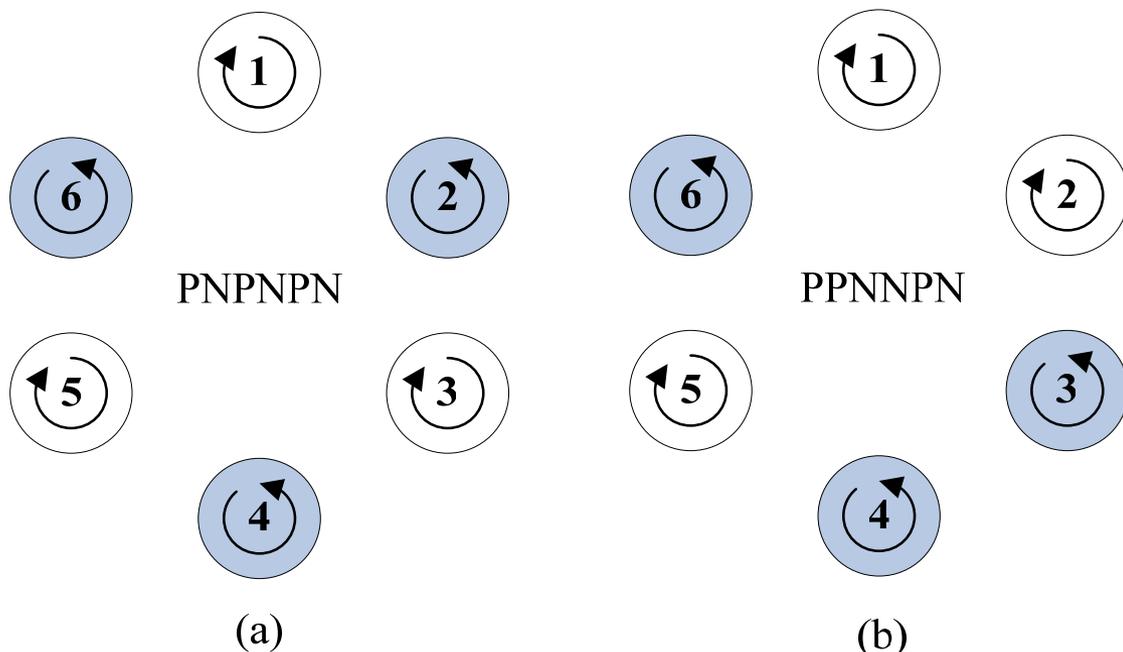


图10.6 两种布局六旋翼

其中P表示旋翼顺时针旋转，而N表示旋翼逆时针旋转

表10.1 六旋翼物理参数

参数	数值	单位
$m$	1.535	kg
$g$	9.80	$m/s^2$
$d$	0.275	m
$K_i, i = 1, \dots, 6$	6.125	N
$J_{xx}$	0.0411	$kg \cdot m^2$
$J_{yy}$	0.0478	$kg \cdot m^2$
$J_{zz}$	0.0599	$kg \cdot m^2$
$k_\mu$	0.1	-



# 多旋翼飞行器的可控性

## □ PNPNPN与PPNNPN构型六旋翼可控性

表10.2 六旋翼（PNPNPN和PPNNPN布局）有一个动力单元失效时的可控性

旋翼失效	$C(A, B)$ 的秩	PNPNPN		PPNNPN	
		剩余控制能力指标	可控性	剩余控制能力指标	可控性
无故障/失效	8	1.4861	可控	1.1295	可控
$\eta_1 = 0$	8	0	不可控	0.7221	可控
$\eta_2 = 0$	8	0	不可控	0.4510	可控
$\eta_3 = 0$	8	0	不可控	0.4510	可控
$\eta_4 = 0$	8	0	不可控	0.7221	可控
$\eta_5 = 0$	8	0	不可控	0	不可控
$\eta_6 = 0$	8	0	不可控	0	不可控

一个电机停转，无法定点定姿悬停！该结论有些反常理。

不可控

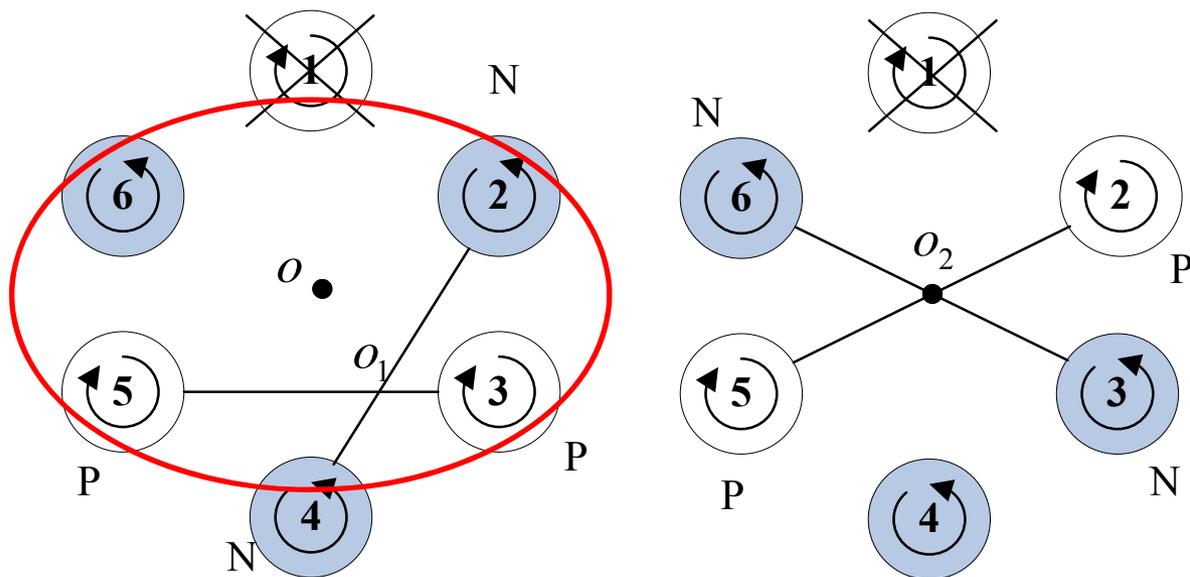
不可控



## 4. 多旋翼飞行器的可控性

### □ PNPNP与PPNNPN构型六旋翼可控性

简单的物理解释：是否能构成基本的四旋翼



(a) PNPNP不能构成基本的四旋翼

(b) PPNNPN能构成基本的四旋翼

图10.7 多旋翼可控性物理解释



## 4. 多旋翼飞行器的可控性



原状态不可控怎么办？

**降级控制！**

视频：航模单机翼神奇降落. <https://www.youtube.com/watch?v=297hIcJ43r8>



## 4. 多旋翼飞行器的可控性

### □ 放弃偏航的可控性

(1) 降级的悬停模型  $\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{B}}(\underbrace{\bar{\mathbf{u}}_f - \bar{\mathbf{g}}}_{\mathbf{u}})$

去掉了偏航状态

### (2) 状态与系数矩阵

$$\bar{\mathbf{x}} = [h \ \phi \ \theta \ v_h \ p \ q]^T \in \mathbb{R}^6,$$

$$\bar{\mathbf{u}}_f = [f \ \tau_x \ \tau_y]^T \in \mathbb{R}^3,$$

$$\bar{\mathbf{g}} = [mg \ 0 \ 0]^T \in \mathbb{R}^3,$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 6},$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \bar{\mathbf{J}}_f^{-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 3},$$

$$\bar{\mathbf{J}}_f = \text{diag}(-m, J_{xx}, J_{yy})$$

### (3) 控制量约束

所有旋翼的升力向量:

$$\mathbf{f} = [T_1 \ \dots \ T_{n_r}]^T, \mathbf{f} = U_f = \prod_{i=1}^{n_r} [0, K_i]$$

机体力和力矩向量:

$$\bar{\mathbf{u}}_f = \bar{\mathbf{B}}_f \mathbf{f}, \bar{\Omega} = \{ \bar{\mathbf{u}}_f \mid \bar{\mathbf{u}}_f = \bar{\mathbf{B}}_f \mathbf{f}, \mathbf{f} \in U_f \}$$



# 4. 多旋翼飞行器的可控性

## □ PNPNP六旋翼放弃偏航

表10.3 不同 $\gamma$ 时的剩余控制能力指标

$\gamma$	$\rho(\bar{g}, \partial\bar{\Omega})$	$\gamma$	$\rho(\bar{g}, \partial\bar{\Omega})$
<del>0.05</del>	<del>-0.1791</del>	0.55	1.9704
<del>0.10</del>	<del>-0.3583</del>	0.60	2.0491
<del>0.15</del>	<del>-0.1025</del>	0.65	2.0491
<del>0.20</del>	<del>0</del>	0.70	2.0491
<del>0.25</del>	<del>0</del>	0.75	2.0491
0.30	0.4098	0.80	2.0491
0.35	0.8197	0.85	2.0491
0.40	1.2295	0.90	2.0491
0.45	1.6122	0.95	2.0491
0.50	1.7913	1.00	2.0491

假设每个旋翼最大升力为  $K = \gamma m_a g, \gamma \in [0, 1]$

两个结论:

1)  $\gamma < 0.3$  时, 即使总升力可以抵消重力, 六旋翼降级模型不可控; 这与文献中给出的 5/18 近似;

2)  $\gamma \geq 0.6$  时, 重力一定的情况下增大升力, 对于已经给指标来说, 已没有增加;

不可控



## 4. 多旋翼飞行器的可控性



六旋翼有一个旋翼停机时的降级策略，具体实施方式见专利[6]：

[6] 全权, 杜光勋, 杨斌先, 蔡开元. 一个六旋翼飞行器有一个电机停机时的安全着陆方法. 国家发明专利, 公开号: CN102902277B



## 4. 多旋翼飞行器的可控性

### □ 进一步说明

(1) 除了与多旋翼构型相关，可控性（度）还与旋翼能提供的升力相关。在文献[7]中，PNPNPN型六旋翼飞行器放弃偏航后，剩下五个旋翼每个旋翼的最大升力需要满足 $\gamma \geq 0.3$ ，可以够保证多旋翼自旋下降。因此，这也告诉我们设计的时候，油门需要留有一定的裕度。

(2) 有研究者针对四旋翼进行了一些极限情况下的控制，比如令四旋翼分别停机一到三个螺旋桨。按以上的可控性分析，是不可控的，也就是四旋翼不能定点悬停。这并不能说明，四旋翼不能停在空中。文章设计了新的平衡状态，比如做圆周运动等。在新的平衡状态下，四旋翼的运动模型发生了改变。通过可控性分析，得出在新的平衡状态下是可控的。因此，这再次说明，讨论可控性一定要明确平衡态。

[7] Mark W. Mueller, and Raffaello D'Andrea. Stability and control of a quadrocopter despite the complete loss of one, two, or three propellers [C]. IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2014: 73-105.



# 4. 多旋翼飞行器的可控性

## □ 可控度的应用

### (1) 健康评估 (在线)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}(\mathbf{u}_f - \mathbf{g} + \mathbf{d})$$

基本思路：将不确定、缓慢失效集总考虑成干扰 $\mathbf{d}$ ，然后评价之后系统的可控程度[8][9]。

**[发明公布] 一种多旋翼飞行器控制能力评估指标的计算方法**

申请公布号：CN103901780A

申请公布日：2014.07.02

申请号：2014101294892

申请日：2014.04.02

申请人：北京航空航天大学

发明人：全权

地址：100191北京市海淀区学院路37号

分类号：G05B17/02(2006.01)I 全部

**摘要：**一种多旋翼飞行器控制能力评估指标的计算方法，该指标的计算过程有三大步骤：步骤一：多旋翼飞行器基本物理参数确定；步骤二：中间变量的计算；步骤三：多旋翼飞行器控制能力评估指标计算。发明的多旋翼飞行器控制能力的评估指标为飞行器重力距离控制量可达集边界最小值 全部

[【发明专利申请】](#) [事务数据](#)

[8]全权, 杜光勋, 邓思阳, 蔡开元. 一种多旋翼飞行器控制能力评估指标的计算方法. 国家发明专利, 公开号: CN103901780B

[9]刘斌, 赵峙尧, 杨斌先, 全权, 蔡开元. 一种四旋翼飞行控制能力实时评估方法[C]. 2014年第三十三届中国控制会议(CCC 2014). 2014:3112-3117

### (2) 多旋翼设计评估 (离线)

- 动力系统动态太慢?
- 气动布局与动力系统设计是否能够抗风?

...



类似复合设计，四旋翼能里是否足够抗风？



## 5. 本讲小结

---

1. 介绍了稳定型概念，简要介绍了不变集定理，并用它推导了带饱和控制系统的收敛性；
2. 可控性是基础，只有系统可控才能设计控制器来稳定系统的状态；
3. 正可控性判定定理可以得到一些有趣的结论，使得多旋翼的可控性与一个指标是否大于零等价。
4. 控制能力指标可以用来定量化描述系统的可控性，也可以用来表征飞行器的安全性。可控度进一步知识可参考下面的文献。

[10] 杜光勋, 全权. 输入受限系统的可控度及其在飞行控制中的应用. 系统科学与数学, 2014, 34(12): 1578-1594.



# 资源

---

(1) 可靠飞行控制研究组主页课程中心(全部课件下载)

<http://rfly.buaa.edu.cn/course>

(2) 关注可靠飞行控制研究组公众号 buaarfly(文章、资讯等)

(3) 多旋翼设计与控制交流QQ群:183613048

(4) 视频课程(MOOC)同步发布, 网易云课堂搜索 “多旋翼”

<http://study.163.com/course/introduction/1003715005.htm>

(5) 同名中文书本教材《多旋翼飞行器设计与控制》即将在电子工业出版社出版, 敬请期待

(6) 有疑问可联系课程总助教戴训华, 邮箱: [dai@buaa.edu.cn](mailto:dai@buaa.edu.cn)

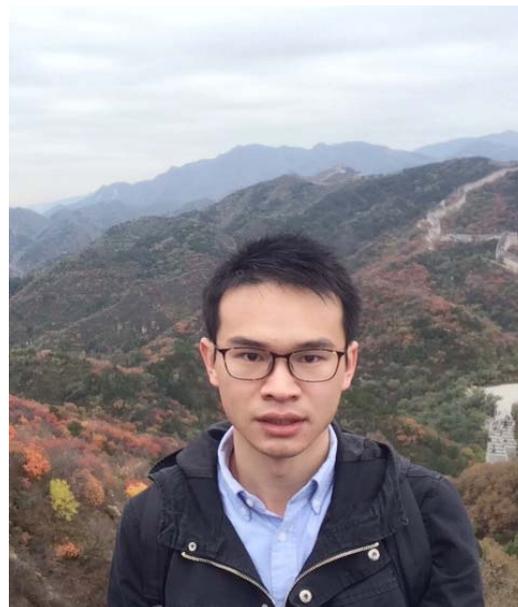


# 致谢

## 感谢控制组同学



杜光勋



戴训华

为本节课程准备作出的贡献。



---

# 谢谢

更详细的内容可以参考我们的教材：《多旋翼飞行器设计与控制》，电子工业出版社。

中文版目前在亚马逊、当当、京东、天猫（电子工业出版社旗舰店）等网站有售。

英文版本 *Introduction to Multicopter Design and Control*，在Springer出版，在亚马逊有售。