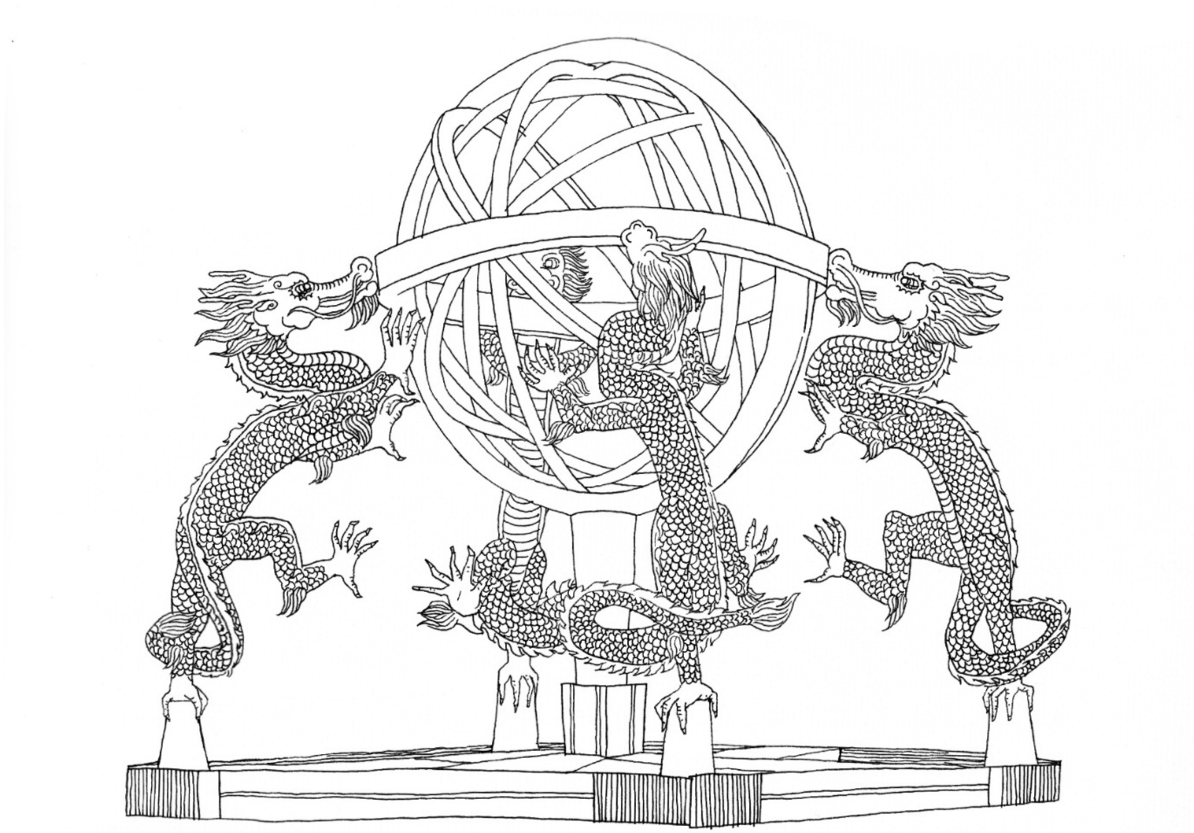
多旋翼飞行器设计与控制

第五讲 坐标系和姿态表示

全权 副教授
qq_buaa@buaa.edu.cn
自动化科学与电气工程学院
北京航空航天大学

东方智慧



浑天仪

核心问题

欧拉角、旋转矩阵和四元数三种姿态表示的变化与机体角速度的关系?

大纲

1. 坐标系

2. 欧拉角

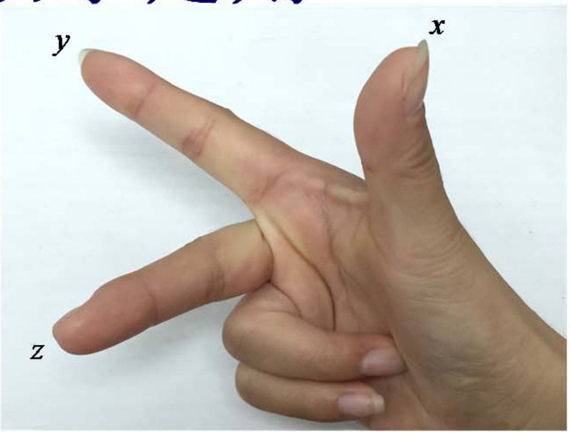
3. 旋转矩阵

4. 四元数

5. 本讲小结

1. 坐标系

☐ 右手定则



(a) 坐标轴

(b) 旋转正方向

图 5.1 右手定则下的坐标轴和旋转正方向

如所上图示，右手的拇指指向x轴的正方向，食指指向y轴的正方向，中指所指示的方向即是z轴的正方向。进一步，如上图所示，要确定旋转正方向，用右手的大拇指指向轴的正方向，弯曲四指。那么四指所指示的方向即是旋转正方向。本讲采用的坐标系和后面定义的角度正方向都是沿用右手定则。

1. 坐标系

□地球固联坐标系与机体坐标系定义

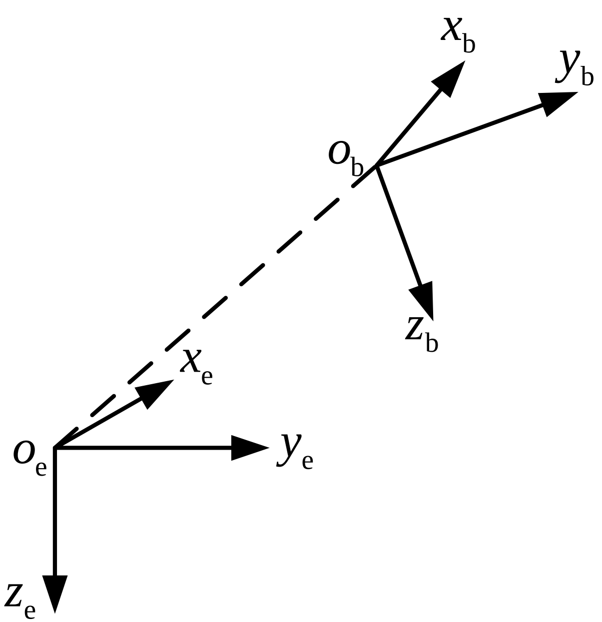


图 5.2 机体坐标系与地面坐标系的关系图

- **地球固联坐标系**用于研究多旋翼飞行器相对于地面的运动状态，确定机体的空间位置坐标。它忽略地球曲率，即将地球表面假设成一张平面。通常以多旋翼起飞位置或者地心作为坐标原点 o_e。先让 x_e 轴在水平面内指向某一方向，z_e 轴垂直于地面向下。然后，按右手定则确定 y_e轴。
- **机体坐标系**与多旋翼固连，其原点 o_b取在多旋翼的重心位置上。x_b轴在多旋翼对称平面内指向机头（机头方向与多旋翼+字形或X字形相关）。z_b轴在飞机对称平面内，垂直 x_b 轴向下。然后，按右手定则确定 y_b 轴。
- **右下标e表示Earth，下标b表示Body**

1. 坐标系

地球固联坐标系与机体坐标系定义

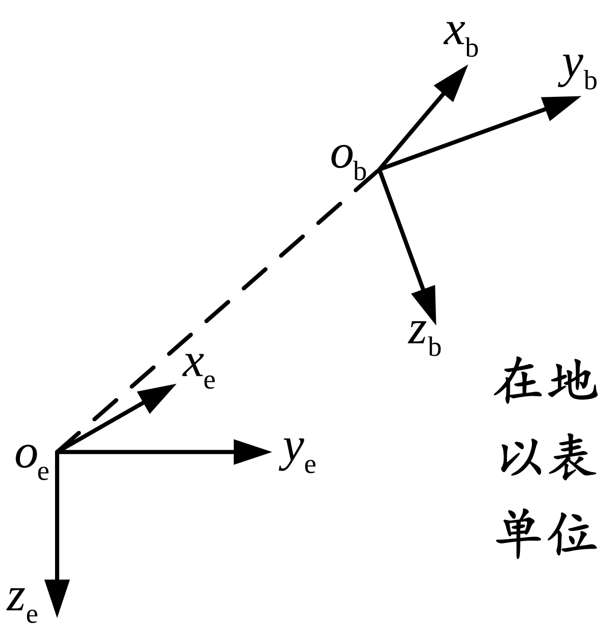


图 5.2 机体坐标系与地面坐标系的关系图

定义如下三个单位向量

$$\mathbf{e}_1 \triangleq \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_3 \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

在地球固联坐标系中，沿着轴 x_e, y_e, z_e 的单位向量可以表示为 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 。在机体坐标系下，沿着 x_b, y_b, z_b 轴的单位向量满足(注：左上标b表示向量在机体坐标系的表示)

$${}^{b}\mathbf{b}_1 = \mathbf{e}_1, {}^{b}\mathbf{b}_2 = \mathbf{e}_2, {}^{b}\mathbf{b}_3 = \mathbf{e}_3$$

在地球固联坐标系中，沿着 x_b, y_b, z_b 轴的单位向量表示为 ${}^{e}\mathbf{b}_1, {}^{e}\mathbf{b}_2, {}^{e}\mathbf{b}_3$ (注：左上标e表示向量在地球固联坐标系的表示)

2. 欧拉角

☐ 欧拉角定义

可以通过转换绕 $\mathbf{e}_3, \mathbf{k}_2, \mathbf{n}_1$ 轴分别旋转欧拉角 ψ, θ, ϕ 将地球固联坐标系转动到机体坐标系。

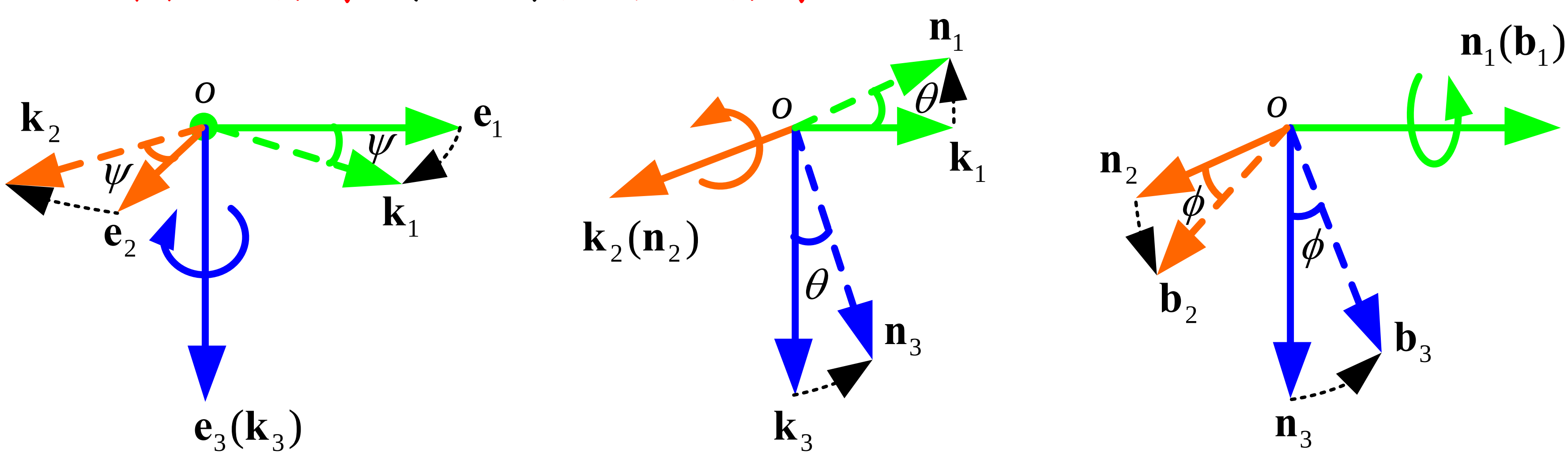


图 5.3 偏航角、俯仰角与滚转角分步转动示意图

2. 欧拉角

□ 欧拉角定义

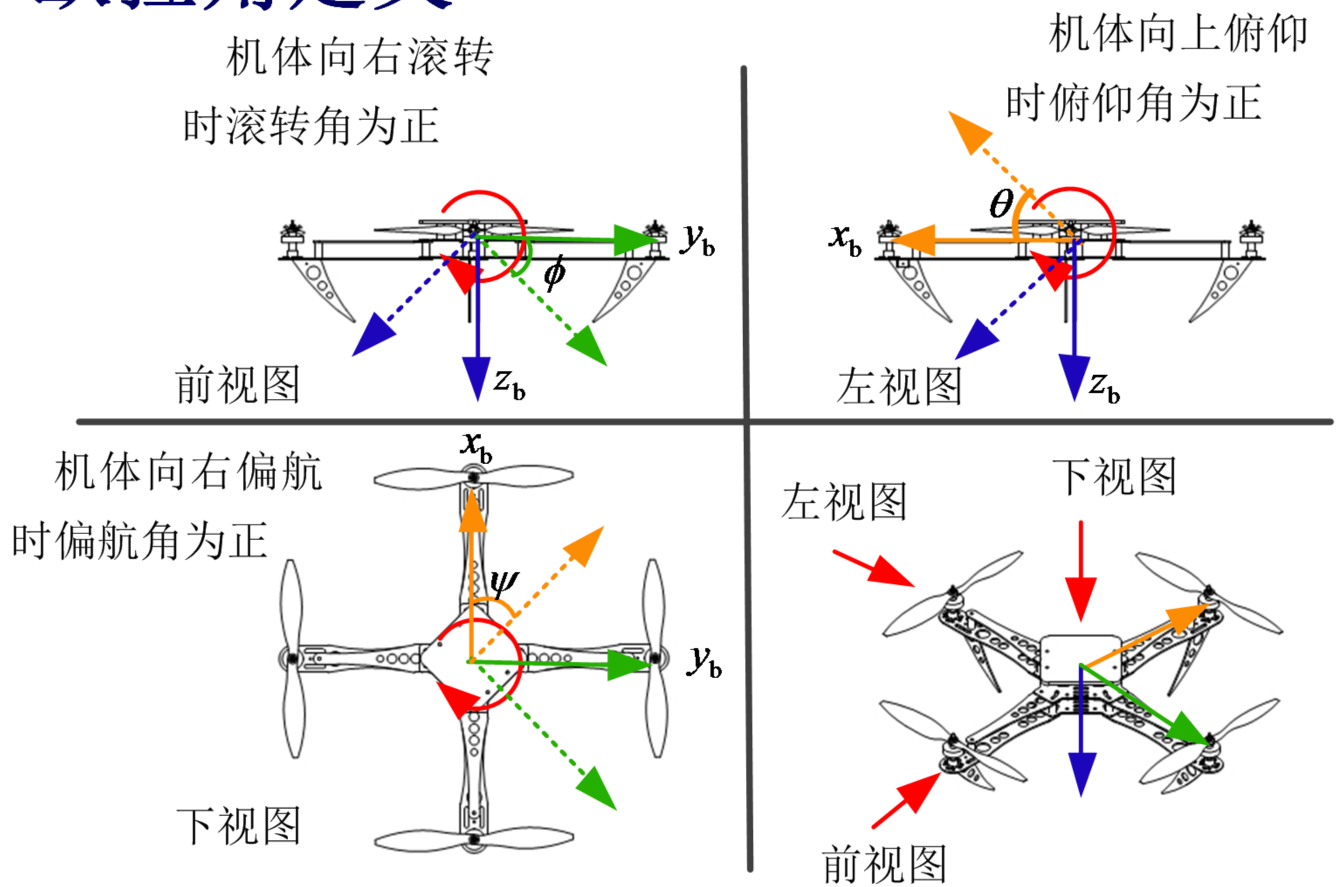


图 5.4 欧拉角直观表示示意图(x轴黄色，y轴绿色，z轴蓝色)

2. 欧拉角

□ 欧拉角定义

机体坐标系与地面地球固联坐标系之间的夹角就是飞机的姿态角，又称**欧拉角**：

- **俯仰角 θ：** 机体轴与地平面（水平面）之间的夹角，飞机抬头为正。
- **偏航角（方位角）ψ：** 机体轴在水平面上的投影与地轴之间的夹角，以机头右偏为正。
- **滚转角（倾斜角）ϕ：** 飞机对称面绕机体轴转过的角度，右滚为正。

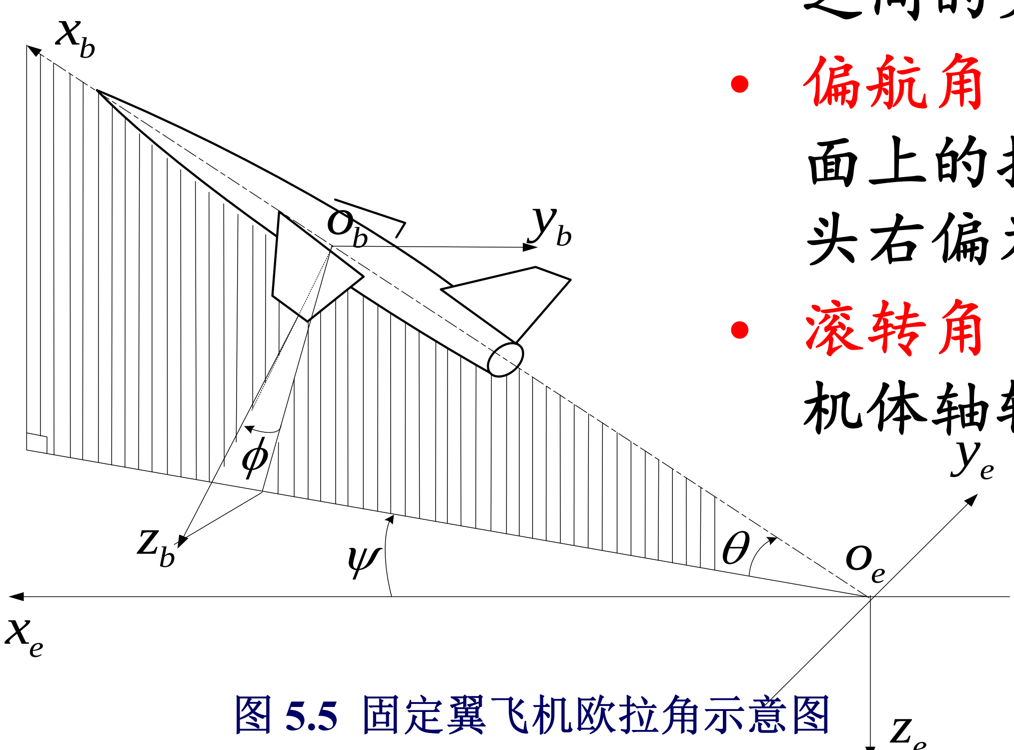


图 5.5 固定翼飞机欧拉角示意图

2. 欧拉角

□ 欧拉角变化率与机体角速度的关系

机体旋转的角速率为 ${}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{\omega}=\begin{bmatrix}\omega_{x_{\mathrm{b}}} & \omega_{y_{\mathrm{b}}} & \omega_{z_{\mathrm{b}}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$

那么

$$\begin{bmatrix}\omega_{x_{\mathrm{b}}}\\ \omega_{y_{\mathrm{b}}}\\ \omega_{z_{\mathrm{b}}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot{\phi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\psi}\end{bmatrix}\ ?$$

2. 欧拉角

□ 欧拉角变化率与机体角速度的关系

如果机体旋转的角速率为 ${}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{\omega}=\begin{bmatrix}\omega_{x_{\mathrm{b}}} & \omega_{y_{\mathrm{b}}} & \omega_{z_{\mathrm{b}}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$

$$ {}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{\omega}=\dot{\psi}\cdot{}^{\mathrm{b}}\mathbf{k}_3+\dot{\theta}\cdot{}^{\mathrm{b}}\mathbf{n}_2+\dot{\phi}\cdot{}^{\mathrm{b}}\mathbf{b}_1 $$

注：左上标b表示向量在机体坐标系的表示

因此有

$$ \begin{bmatrix}\omega_{x_{\mathrm{b}}}\\ \omega_{y_{\mathrm{b}}}\\ \omega_{z_{\mathrm{b}}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -\sin\theta\\ 0 & \cos\phi & \cos\theta\sin\phi\\ 0 & -\sin\phi & \cos\theta\cos\phi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\phi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\psi}\end{bmatrix} $$

2. 欧拉角

□ 欧拉角变化率与机体角速度的关系

进一步可以得到

$$\dot{\boldsymbol{\Theta}} = \mathbf{W} \cdot {}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{\omega}$$

其中

$$\boldsymbol{\Theta} \triangleq [\phi \quad \theta \quad \psi]^{\mathrm{T}} \qquad \mathbf{W} \triangleq \begin{bmatrix} 1 & \tan\theta\sin\phi & \tan\theta\cos\phi \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi/\cos\theta & \cos\phi/\cos\theta \end{bmatrix}$$

$\theta = \pm\pi/2$

奇异性问题

当 $\theta,\phi \approx 0$ 时，可以认为

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{x_b} \\ \omega_{y_b} \\ \omega_{z_b} \end{bmatrix}$$

3. 旋转矩阵

□ 旋转矩阵定义

旋转矩阵中的向量满足

$$ {}^{e}\mathbf{b}_1 = \mathbf{R}_b^e \cdot {}^{b}\mathbf{b}_1 = \mathbf{R}_b^e \cdot \mathbf{e}_1,\ {}^{e}\mathbf{b}_2 = \mathbf{R}_b^e \cdot {}^{b}\mathbf{b}_2 = \mathbf{R}_b^e \cdot \mathbf{e}_2,\ {}^{e}\mathbf{b}_3 = \mathbf{R}_b^e \cdot {}^{b}\mathbf{b}_3 = \mathbf{R}_b^e \cdot \mathbf{e}_3 $$

左上标e表示向量在惯性坐标系的表示

左上标b表示向量在机体坐标系的表示

定义旋转矩阵为

右上标表示从机体坐标系b旋转到地球固联坐标系e的旋转矩阵

$$ \mathbf{R}_b^e \triangleq \left[{}^{e}\mathbf{b}_1 \quad {}^{e}\mathbf{b}_2 \quad {}^{e}\mathbf{b}_3 \right] $$

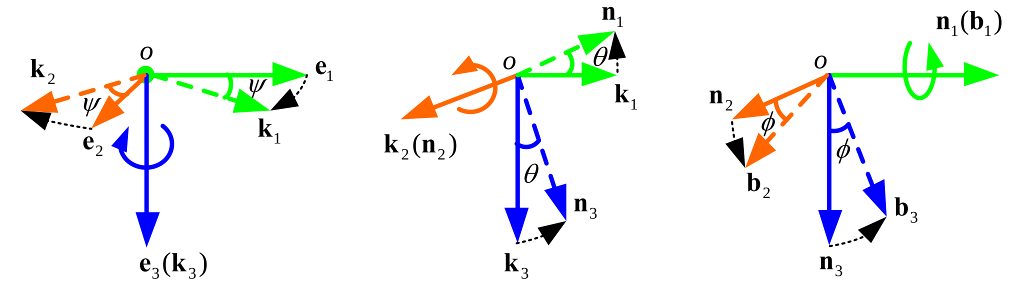
$$ \mathbf{R}_b^e \mathbf{R}_b^{eT} = \mathbf{R}_b^{eT} \mathbf{R}_b^e = \mathbf{I}_3 $$

$$ \det\left(\mathbf{R}_b^e\right) = 1 $$

注：det()表示求矩阵的行列式

3. 旋转矩阵

旋转矩阵定义



(a) 偏航角 (b) 俯仰角 (c) 滚转角

从地球固联坐标系到机体坐标系的旋转可以通过三步来完成

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{R}_z(\psi)} \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1 \\ \mathbf{k}_2 \\ \mathbf{k}_3 = \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{R}_y(\theta)} \begin{bmatrix} \mathbf{n}_1 \\ \mathbf{n}_2 = \mathbf{k}_2 \\ \mathbf{n}_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{R}_x(\phi)} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 = \mathbf{n}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \end{bmatrix},$$

其中

$$\mathbf{R}_z(\psi) \triangleq \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{R}_y(\theta) \triangleq \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}, \mathbf{R}_x(\phi) \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}.$$

3. 旋转矩阵

□ 旋转矩阵定义

$$\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\\ \mathbf{e}_3\end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{R}_z(\psi)} \begin{bmatrix}\mathbf{k}_1\\ \mathbf{k}_2\\ \mathbf{k}_3=\mathbf{e}_3\end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{R}_y(\theta)} \begin{bmatrix}\mathbf{n}_1\\ \mathbf{n}_2=\mathbf{k}_2\\ \mathbf{n}_3\end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{R}_x(\phi)} \begin{bmatrix}\mathbf{b}_1=\mathbf{n}_1\\ \mathbf{b}_2\\ \mathbf{b}_3\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{e}} &= \left(\mathbf{R}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{b}}\right)^{-1} \\
&= \mathbf{R}_{\mathrm{z}}^{-1}(\psi)\mathbf{R}_y^{-1}(\theta)\mathbf{R}_x^{-1}(\phi) \\
&= \mathbf{R}_z(-\psi)\mathbf{R}_y(-\theta)\mathbf{R}_x(-\phi) \\
&= \begin{bmatrix}
\cos\theta\cos\psi & \cos\psi\sin\theta\sin\phi-\sin\psi\cos\phi & \cos\psi\sin\theta\cos\phi+\sin\psi\sin\phi \\
\cos\theta\sin\psi & \sin\psi\sin\theta\sin\phi+\cos\psi\cos\phi & \sin\psi\sin\theta\cos\phi-\cos\psi\sin\phi \\
-\sin\theta & \sin\phi\cos\theta & \cos\phi\cos\theta
\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

3. 旋转矩阵

旋转矩阵定义

$$\mathbf{R}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{e}} \triangleq \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

由旋转矩阵反求欧拉角 $\Rightarrow$

$$\tan(\psi)=\frac{r_{21}}{r_{11}}$$
$$\sin(\theta)=-r_{31}$$
$$\tan(\phi)=\frac{r_{32}}{r_{33}}$$

$\Rightarrow$

$$\psi=\arctan\frac{r_{21}}{r_{11}}$$
$$\theta=\arcsin(-r_{31})$$
$$\phi=\arctan\frac{r_{32}}{r_{33}}$$

当 $\theta=\pm\dfrac{\pi}{2}$ 时

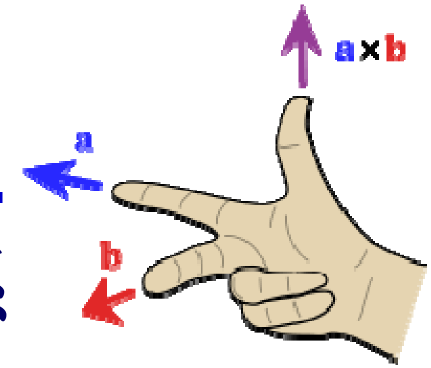
$$\mathbf{R}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{e}}=\begin{bmatrix} 0 & -\sin(\psi\mp\phi) & \cos(\psi\mp\phi) \\ 0 & \cos(\psi\mp\phi) & \sin(\psi\mp\phi) \\ \mp 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\theta=\pm\pi/2$
奇异性问题

在奇异情况下，人为设定 $\phi=0$

此时，$\psi\mp\phi$ 与 $\mathbf{R}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{e}}$ 一一对应，但是 ψ,ϕ 的具体值不能唯一确定，有无穷多种组合。

3. 旋转矩阵



☐ 旋转矩阵导数与机体角速度的关系

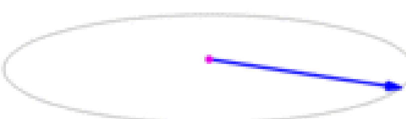
两个向量 $\mathbf{a}\triangleq\begin{bmatrix}a_x & a_y & a_z\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ 和 $\mathbf{b}\triangleq\begin{bmatrix}b_x & b_y & b_z\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ 的叉乘定义为

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=[\mathbf{a}]_{\times}\mathbf{b}$$

其中

$$[\mathbf{a}]_{\times}\triangleq\begin{bmatrix}0 & -a_z & a_y\\ a_z & 0 & -a_x\\ -a_y & a_x & 0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\sin\theta\,\mathbf{n}$$



以上图片来自https://en.wikipedia.org/wiki/Cross_product

3. 旋转矩阵

□ 旋转矩阵导数与机体角速度的关系

仅考虑刚体旋转（不考虑平动），由动力学知识可知，对任意向量 ${}^{\mathrm{e}}\mathbf{r}\in\mathbb{R}^3$ 求导（类比下圆周运动）

$$\frac{\mathrm{d}\,{}^{\mathrm{e}}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}={}^{\mathrm{e}}\boldsymbol{\omega}\times{}^{\mathrm{e}}\mathbf{r}$$

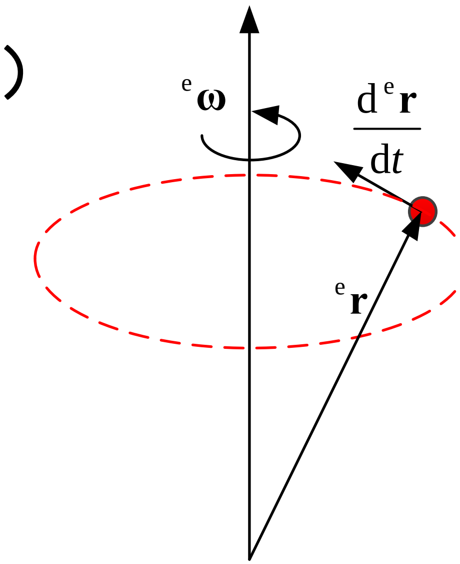


图 5.6 向量求导的直观表示

其中×表示向量的叉乘。

我们可以得到

$$\frac{\mathrm{d}\begin{bmatrix}{}^{\mathrm{e}}\mathbf{b}_1 & {}^{\mathrm{e}}\mathbf{b}_2 & {}^{\mathrm{e}}\mathbf{b}_3\end{bmatrix}}{\mathrm{d}t}=\begin{bmatrix}{}^{\mathrm{e}}\boldsymbol{\omega}\times{}^{\mathrm{e}}\mathbf{b}_1 & {}^{\mathrm{e}}\boldsymbol{\omega}\times{}^{\mathrm{e}}\mathbf{b}_2 & {}^{\mathrm{e}}\boldsymbol{\omega}\times{}^{\mathrm{e}}\mathbf{b}_3\end{bmatrix}$$

3. 旋转矩阵

◻ 旋转矩阵导数与机体角速度的关系

由 ${}^{\mathrm{e}}\boldsymbol{\omega}=\mathbf{R}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{e}}\cdot{}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{\omega}$ 及叉乘的性质即可得

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\mathbf{R}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t}&=\left[\left(\mathbf{R}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{e}}\,{}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{\omega}\right)\times\left(\mathbf{R}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{e}}\mathbf{e}_1\right)\quad\left(\mathbf{R}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{e}}\,{}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{\omega}\right)\times\left(\mathbf{R}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{e}}\mathbf{e}_2\right)\quad\left(\mathbf{R}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{e}}\,{}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{\omega}\right)\times\left(\mathbf{R}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{e}}\mathbf{e}_3\right)\right]\\
&=\left[\mathbf{R}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{e}}\left({}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}_1\right)\quad\mathbf{R}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{e}}\left({}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}_2\right)\quad\mathbf{R}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{e}}\left({}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}_3\right)\right]\\
&=\mathbf{R}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{e}}\left[{}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}_1\quad{}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}_2\quad{}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}_3\right]\\
&=\mathbf{R}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{e}}\left[{}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{\omega}\right]_{\times}
\end{aligned}
$$

推导过程中用到了叉乘的性质：对于旋转矩阵 $\mathbf{R}\in\mathbb{R}^{3\times3}\left(\det\left(\mathbf{R}\right)=1\right)$ 和任意向量 $\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbb{R}^3$，我们有

$$\left(\mathbf{Ra}\right)\times\left(\mathbf{Rb}\right)=\mathbf{R}\left(\mathbf{a}\times\mathbf{b}\right)$$

- 采用旋转矩阵表示避免了奇异性问题。然而，以上方程含有9个自由变量，因此求解微分方程的计算量比较大。

4. 四元数

□ 四元数定义

四元数一般用向量的形式表示为

$$\mathbf{q} \triangleq \begin{bmatrix} q_0 \\ \mathbf{q}_{\mathrm{v}} \end{bmatrix}$$

其中 q_0 为四元数的标量部分，$\mathbf{q}_{\mathrm{v}} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ 为四元数的向量部分。对于一个实数 s，其四元数表示形式为 $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} s \\ \mathbf{0}_{3\times1} \end{bmatrix}$，对于一个纯向量 $\mathbf{v}$，其四元数表示形式 $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}$。

图 5.7 爱尔兰都柏林布鲁穆桥（现称为金雀花桥 **Broom Bridge**）上的四元数石碑，图片来自 **https://en.wikipedia.org/wiki/Quaternion**

石碑上写着 **“Here as he walked by on the 16th of October 1843 Sir William Rowan Hamilton in a flash of genius discovered the fundamental formula for quaternion multiplication $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ & cut it on a stone of this bridge.”**

4. 四元数

■ 四元数的基本运算法则

（1）四元数加、减法 $$\mathbf{p}\pm\mathbf{q}=\begin{bmatrix}p_0\\ \mathbf{p}_\mathrm{v}\end{bmatrix}\pm\begin{bmatrix}q_0\\ \mathbf{q}_\mathrm{v}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p_0\pm q_0\\ \mathbf{p}_\mathrm{v}\pm\mathbf{q}_\mathrm{v}\end{bmatrix}$$

（2）四元数乘法 $$\mathbf{p}\otimes\mathbf{q}=\begin{bmatrix}p_0\\ \mathbf{p}_\mathrm{v}\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}q_0\\ \mathbf{q}_\mathrm{v}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p_0q_0-\mathbf{q}_\mathrm{v}^\mathrm{T}\mathbf{p}_\mathrm{v}\\ \mathbf{p}_\mathrm{v}\times\mathbf{q}_\mathrm{v}+p_0\mathbf{q}_\mathrm{v}+q_0\mathbf{p}_\mathrm{v}\end{bmatrix}$$

一些运算性质(注：**q, r, m**是四元数，*s*为标量，**u, v**为列向量)

$$\mathbf{q}\otimes(\mathbf{r}+\mathbf{m})=\mathbf{q}\otimes\mathbf{r}+\mathbf{q}\otimes\mathbf{m}$$
$$\mathbf{q}\otimes\mathbf{r}\otimes\mathbf{m}=(\mathbf{q}\otimes\mathbf{r})\otimes\mathbf{m}=\mathbf{q}\otimes(\mathbf{r}\otimes\mathbf{m})$$

$$s\mathbf{q}=\mathbf{q}s=\begin{bmatrix}sq_0\\ s\mathbf{q}_\mathrm{v}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q}_\mathbf{u}\otimes\mathbf{q}_\mathbf{v}=\begin{bmatrix}0\\ \mathbf{u}\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}0\\ \mathbf{v}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\mathbf{u}^\mathrm{T}\mathbf{v}\\ \mathbf{u}\times\mathbf{v}\end{bmatrix}$$

4. 四元数

□ 四元数的基本运算法则

（3）四元数共轭

$$\mathbf{q}=\begin{bmatrix} q_0 \\ \mathbf{q}_\mathrm{v} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{q}^*=\begin{bmatrix} q_0 \\ -\mathbf{q}_\mathrm{v} \end{bmatrix}$$

一些运算性质

$$(\mathbf{q}^*)^*=\mathbf{q}$$

$$(\mathbf{p}\otimes\mathbf{q})^*=\mathbf{q}^*\otimes\mathbf{p}^*$$

$$(\mathbf{p}+\mathbf{q})^*=\mathbf{p}^*+\mathbf{q}^*$$

（4）四元数范数

$$\begin{aligned}\|\mathbf{q}\|^2&=\|\mathbf{q}\otimes\mathbf{q}^*\|=\|\mathbf{q}^*\otimes\mathbf{q}\|\\&=q_0^2+\mathbf{q}_\mathrm{v}^\mathrm{T}\mathbf{q}_\mathrm{v}\\&=q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2\end{aligned}$$

一些运算性质

$$\|\mathbf{p}\otimes\mathbf{q}\|=\|\mathbf{p}\|\|\mathbf{q}\|$$

$$\|\mathbf{q}^*\|=\|\mathbf{q}\|$$

4. 四元数

◻ 四元数的基本运算法则

（5）四元数的逆 $\mathbf{q}\otimes\mathbf{q}^{-1}=\begin{bmatrix}1\\ \mathbf{0}_{3\times1}\end{bmatrix}$

由 $\mathbf{q}^*$ 的定义可知，四元数的逆可以表示为 $\mathbf{q}^{-1}=\dfrac{\mathbf{q}^*}{\|\mathbf{q}\|}$

（6）单位四元数

当四元数 $\mathbf{q}$ 的范数 $\|\mathbf{q}\|=1$ 时，四元数 $\mathbf{q}$ 称为单位四元数。单位四元数有如下性质：当四元数 $\mathbf{p},\mathbf{q}$ 满足 $\|\mathbf{p}\|=\|\mathbf{q}\|=1$，则有

$$\|\mathbf{p}\otimes\mathbf{q}\|=1$$

$$\mathbf{q}^{-1}=\mathbf{q}^*$$

4. 四元数

四元数与旋转

假如q表示旋转，而$\mathbf{v}_1 \in \mathbb{R}^3$表示向量，那么在旋转q作用下，

向量 $\mathbf{v}_1$变为向量 $\mathbf{v}_1'$。我们用如下形式表示这个过程

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_1' \end{bmatrix} = \mathbf{q} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_1 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{q}^{-1}$$

第一行是恒成立的

单位四元数的物理含义是 $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \mathbf{v}\sin\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$

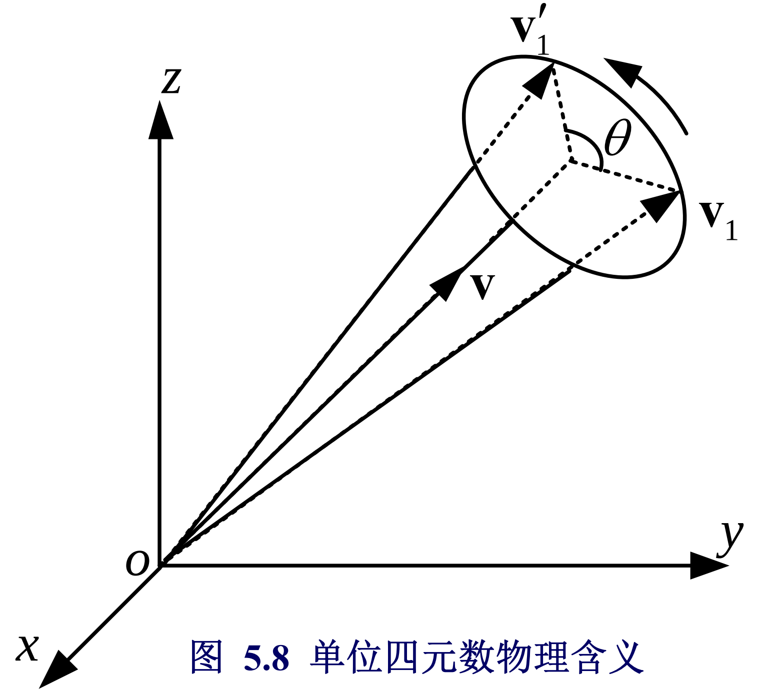


图 5.8 单位四元数物理含义

这一部分可进一步参考 Shoemake K. Quaternions. Department of Computer and Information Science, University of Pennsylvania, USA, 1994 [Online], available: http://www.cs.ucr.edu/˜vbz/resources/quatut.pdf

4. 四元数

□ 四元数与旋转

已知两个三维单位向量 $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1 \left(\mathbf{v}_1 \neq \pm\mathbf{v}_0\right)$ 。定义$\theta/2$ 为 $\mathbf{v}_0$ 到 $\mathbf{v}_1$之间的角度，可以推知

$$\mathbf{v}_0^{\mathrm{T}}\mathbf{v}_1 = \cos\frac{\theta}{2}$$

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}_0 \times \mathbf{v}_1}{\left\|\mathbf{v}_0 \times \mathbf{v}_1\right\|} = \frac{\mathbf{v}_0 \times \mathbf{v}_1}{\left\|\mathbf{v}_0\right\|\left\|\mathbf{v}_1\right\|\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{\mathbf{v}_0 \times \mathbf{v}_1}{\sin\frac{\theta}{2}} \Rightarrow \mathbf{v}_0 \times \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}\sin\frac{\theta}{2}$$

定义一个单位四元数，可以得到

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \mathbf{v}\sin\frac{\theta}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_0^{\mathrm{T}}\mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_0 \times \mathbf{v}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_0 \end{bmatrix}^*$$

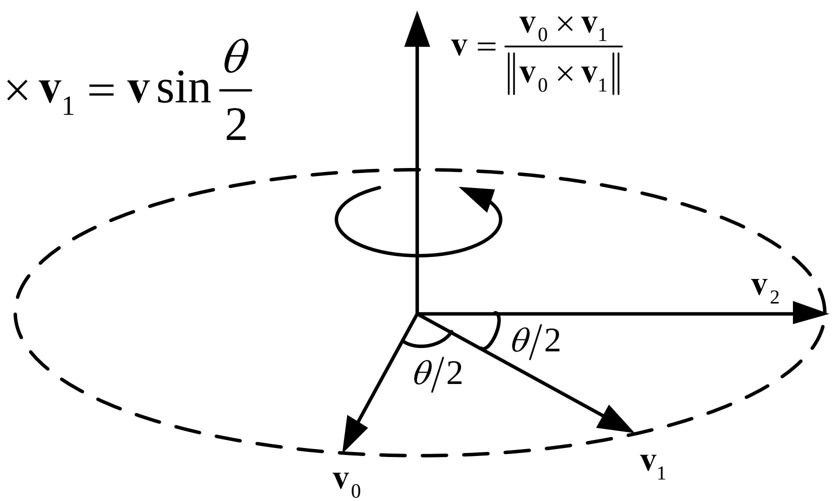


图 5.9 四元数旋转示意图

4. 四元数

□ 四元数与旋转（为什么能表示旋转）

$$\begin{bmatrix}0\\ \mathbf{v}_2\end{bmatrix}=\mathbf{q}\otimes\begin{bmatrix}0\\ \mathbf{v}_0\end{bmatrix}\otimes\mathbf{q}^{-1}\Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix}0\\ \mathbf{v}_2\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}0\\ \mathbf{v}_1\end{bmatrix}^* &= \left(\mathbf{q}\otimes\begin{bmatrix}0\\ \mathbf{v}_0\end{bmatrix}\otimes\mathbf{q}^{-1}\right)\otimes\begin{bmatrix}0\\ \mathbf{v}_1\end{bmatrix}^*\\
&=\mathbf{q}\otimes\begin{bmatrix}0\\ \mathbf{v}_0\end{bmatrix}\otimes\left(\begin{bmatrix}0\\ \mathbf{v}_0\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}0\\ \mathbf{v}_1\end{bmatrix}^*\right)\otimes\begin{bmatrix}0\\ \mathbf{v}_1\end{bmatrix}^*\\
&=\mathbf{q}\otimes\left(\begin{bmatrix}0\\ \mathbf{v}_0\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}0\\ \mathbf{v}_0\end{bmatrix}\right)\otimes\left(\begin{bmatrix}0\\ \mathbf{v}_1\end{bmatrix}^*\otimes\begin{bmatrix}0\\ \mathbf{v}_1\end{bmatrix}^*\right)\\
&=\mathbf{q}\otimes\begin{bmatrix}-1\\ \mathbf{0}_{3\times1}\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}-1\\ \mathbf{0}_{3\times1}\end{bmatrix}\\
&=\mathbf{q}\\
&=\begin{bmatrix}0\\ \mathbf{v}_1\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}0\\ \mathbf{v}_0\end{bmatrix}^*
\end{aligned}$$

$\mathbf{v}_0,\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ 的内积与外积相等，因此三个向量处于同一平面，且 $\mathbf{v}_2$与 $\mathbf{v}_1$ 的夹角也为$\theta/2$，正如下图所示。

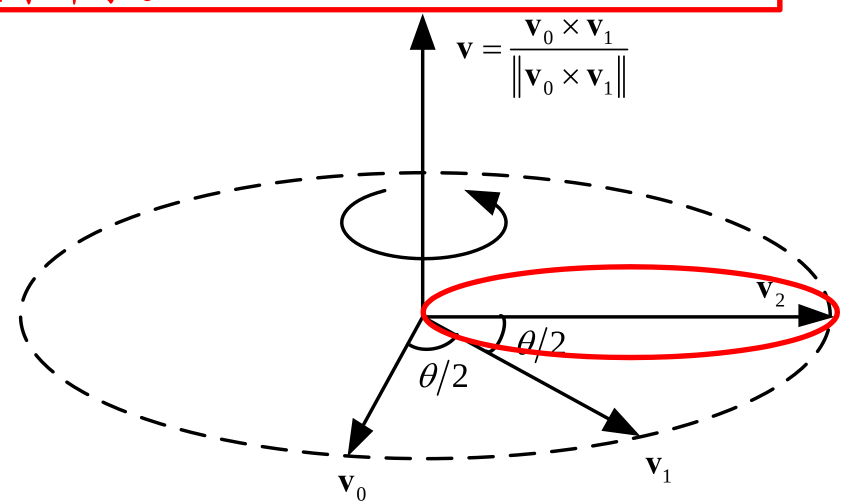


图 5.9 四元数旋转示意图

4. 四元数

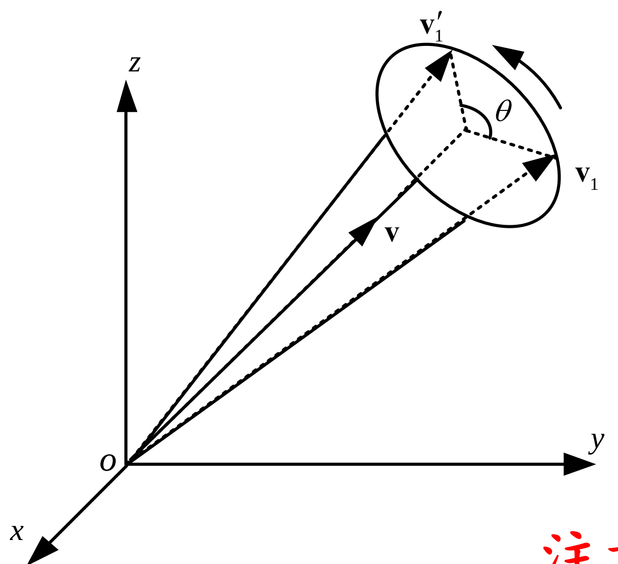
四元数与旋转

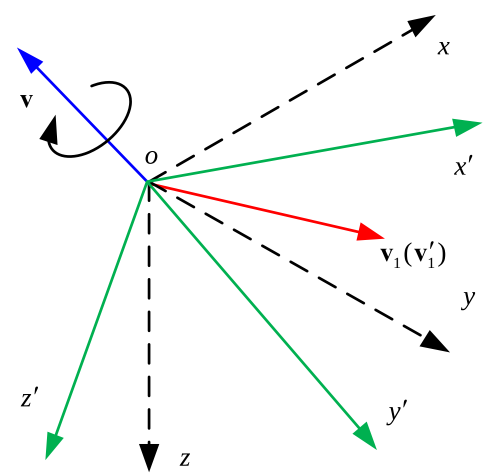
（1）向量旋转

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_1' \end{bmatrix} = \mathbf{q} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_1 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{q}^{-1}$$

（2）坐标系旋转

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_1' \end{bmatrix} = \mathbf{q}^{-1} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_1 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{q}$$





注意两者的不同！

4. 四元数

□ 四元数与旋转矩阵转换

右上标表示从地球固联坐标系e旋转到机体坐标系b的单位四元数

假定地球固联坐标系到机体坐标系的旋转四元数为 $\mathbf{q}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{b}}=\begin{bmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，

则有（坐标系旋转）

$$\begin{bmatrix} 0 \\ {}^{\mathrm{e}}\mathbf{r} \end{bmatrix} = \left(\mathbf{q}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{e}}\right)^{-1} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ {}^{\mathrm{b}}\mathbf{r} \end{bmatrix} \otimes \mathbf{q}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{e}} = \mathbf{q}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{b}} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ {}^{\mathrm{b}}\mathbf{r} \end{bmatrix} \otimes \left(\mathbf{q}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{b}}\right)^{-1}$$

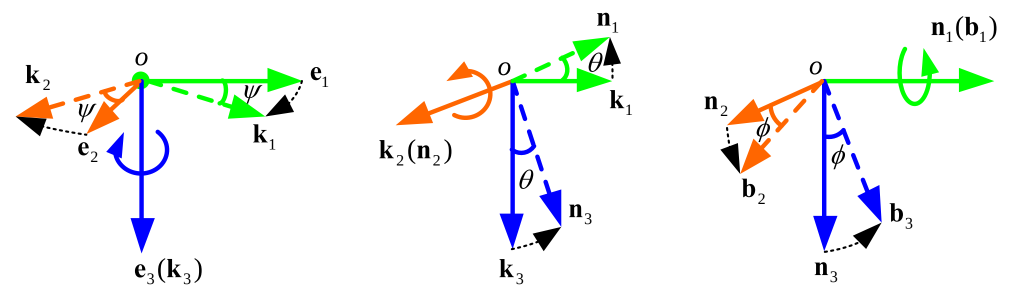
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ {}^{\mathrm{e}}\mathbf{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ -q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ {}^{\mathrm{b}}\mathbf{r} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow {}^{\mathrm{e}}\mathbf{r} = \mathbf{C}(\mathbf{q}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{b}})\,{}^{\mathrm{b}}\mathbf{r} \quad \mathbf{C}(\mathbf{q}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{b}}) = \begin{bmatrix} q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2 & 2(q_1q_2-q_0q_3) & 2(q_1q_3+q_0q_2) \\ 2(q_1q_2+q_0q_3) & q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2 & 2(q_2q_3-q_0q_1) \\ 2(q_1q_3-q_0q_2) & 2(q_2q_3+q_0q_1) & q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{R}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{e}} = \mathbf{C}(\mathbf{q}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{b}})$$

4. 四元数

◻ 四元数与欧拉角转



(a) 偏航角 (b) 俯仰角 (c) 滚转角

根据旋转欧拉角的顺序，可得

$$\begin{bmatrix}0\\ {}^{b}\mathbf{r}\end{bmatrix}=\left(\mathbf{q}_e^b\right)^{-1}\otimes\begin{bmatrix}0\\ {}^{e}\mathbf{r}\end{bmatrix}\otimes\mathbf{q}_e^b$$
$$=\left(\mathbf{q}_z(\psi)\otimes\mathbf{q}_y(\theta)\otimes\mathbf{q}_x(\phi)\right)^{-1}\otimes\begin{bmatrix}0\\ {}^{e}\mathbf{r}\end{bmatrix}\otimes\left(\mathbf{q}_z(\psi)\otimes\mathbf{q}_y(\theta)\otimes\mathbf{q}_x(\phi)\right)$$
$$=\left(\mathbf{q}_x(\phi)\right)^{-1}\otimes\left(\left(\mathbf{q}_y(\theta)\right)^{-1}\otimes\left(\left(\mathbf{q}_z(\psi)\right)^{-1}\otimes\begin{bmatrix}0\\ {}^{e}\mathbf{r}\end{bmatrix}\otimes\mathbf{q}_z(\psi)\right)\otimes\mathbf{q}_y(\theta)\right)\otimes\mathbf{q}_x(\phi)$$

$$\mathbf{q}_\mathrm{e}^\mathrm{b}=\mathbf{q}_z(\psi)\otimes\mathbf{q}_y(\theta)\otimes\mathbf{q}_x(\phi)$$

$$\mathbf{q}_x(\phi)=\begin{bmatrix}\cos\frac{\phi}{2} & \sin\frac{\phi}{2} & 0 & 0\end{bmatrix}^\mathrm{T}$$

$$\mathbf{q}_y(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\frac{\theta}{2} & 0 & \sin\frac{\theta}{2} & 0\end{bmatrix}^\mathrm{T}$$

$$\mathbf{q}_z(\psi)=\begin{bmatrix}\cos\frac{\psi}{2} & 0 & 0 & \sin\frac{\psi}{2}\end{bmatrix}^\mathrm{T}$$

$$\Rightarrow\quad \mathbf{q}_\mathrm{e}^\mathrm{b}=\begin{bmatrix}\cos\frac{\phi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2}+\sin\frac{\phi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2}\\ \sin\frac{\phi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2}-\cos\frac{\phi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2}\\ \cos\frac{\phi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2}+\sin\frac{\phi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2}\\ \cos\frac{\phi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2}-\sin\frac{\phi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2}\end{bmatrix}$$

4. 四元数

四元数与欧拉角转换

根据坐标系旋转的四元数，可得

$$\begin{bmatrix} 0 \\ {}^{\mathrm{b}}\mathbf{r} \end{bmatrix} = \left(\mathbf{q}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{b}}\right)^{-1} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ {}^{\mathrm{e}}\mathbf{r} \end{bmatrix} \otimes \mathbf{q}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{b}}$$

$$= \left(\mathbf{q}_z(\psi) \otimes \mathbf{q}_y(\theta) \otimes \mathbf{q}_x(\phi)\right)^{-1} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ {}^{\mathrm{e}}\mathbf{r} \end{bmatrix} \otimes \left(\mathbf{q}_z(\psi) \otimes \mathbf{q}_y(\theta) \otimes \mathbf{q}_x(\phi)\right)$$

$$= \left(\mathbf{q}_x(\phi)\right)^{-1} \otimes \left(\left(\mathbf{q}_y(\theta)\right)^{-1} \otimes \left(\left(\mathbf{q}_z(\psi)\right)^{-1} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ {}^{\mathrm{e}}\mathbf{r} \end{bmatrix} \otimes \mathbf{q}_z(\psi)\right) \otimes \mathbf{q}_y(\theta)\right) \otimes \mathbf{q}_x(\phi)$$

这与前文所定义的从地球系旋转得到机体系的顺序一致。

4. 四元数

□ 四元数与欧拉角转换

$$\mathbf{q}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{b}}=\begin{bmatrix}\cos\frac{\phi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2}+\sin\frac{\phi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2}\\ \sin\frac{\phi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2}-\cos\frac{\phi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2}\\ \cos\frac{\phi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2}+\sin\frac{\phi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2}\\ \cos\frac{\phi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2}-\sin\frac{\phi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2}\end{bmatrix}$$

$$\tan(\phi)=\frac{2(q_0q_1+q_2q_3)}{1-2\left(q_1^2+q_2^2\right)}$$

$$\sin(\theta)=2\left(q_0q_2-q_1q_3\right)$$

$$\tan(\psi)=\frac{2\left(q_0q_3+q_1q_2\right)}{1-2\left(q_2^2+q_3^2\right)}$$

$$\phi=\arctan\frac{2(q_0q_1+q_2q_3)}{1-2\left(q_1^2+q_2^2\right)}$$

$$\theta=\arcsin\left(2\left(q_0q_2-q_1q_3\right)\right)$$

$$\psi=\arctan\left(\frac{2\left(q_0q_3+q_1q_2\right)}{1-2\left(q_2^2+q_3^2\right)}\right)$$

当 $\theta=\pm\pi/2$ 时，发生奇异

$$\mathbf{q}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{b}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}\cos\left(\frac{\psi}{2}\mp\frac{\phi}{2}\right)\\ \mp\sin\left(\frac{\psi}{2}\mp\frac{\phi}{2}\right)\\ \pm\cos\left(\frac{\psi}{2}\mp\frac{\phi}{2}\right)\\ \sin\left(\frac{\psi}{2}\mp\frac{\phi}{2}\right)\end{bmatrix}$$

无穷多种组合

在奇异情况下，人为设定 $\phi=0$

4. 四元数

□ 四元数变化率与机体角速度的关系

根据坐标系旋转的复合四元数得

$$\mathbf{q}_\mathrm{e}^\mathrm{b}(t+\Delta t)=\mathbf{q}_\mathrm{e}^\mathrm{b}(t)\otimes\Delta\mathbf{q}$$

摄动

其中

$$\Delta\mathbf{q}=\begin{bmatrix}\cos\frac{\theta}{2} & \mathbf{v}^\mathrm{T}\sin\frac{\theta}{2}\end{bmatrix}^\mathrm{T},\theta=\left\|{}^\mathrm{b}\boldsymbol{\omega}\right\|\Delta t,\mathbf{v}=\frac{{}^\mathrm{b}\boldsymbol{\omega}}{\left\|{}^\mathrm{b}\boldsymbol{\omega}\right\|}$$

机体角速度

忽略Δt的高阶无穷小可以得到

$$\Delta\mathbf{q}=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}{}^\mathrm{b}\boldsymbol{\omega}^\mathrm{T}\Delta t\end{bmatrix}^\mathrm{T}$$

4. 四元数

□ 四元数变化率与机体角速度的关系

对 $\mathbf{q}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{b}}(t)$ 求导可得

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{q}}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{b}}(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{q}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{b}}(t+\Delta t) - \mathbf{q}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{b}}(t)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{q}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{b}}(t) \otimes \Delta \mathbf{q} - \mathbf{q}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{b}}(t)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{q}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{b}}(t) \otimes \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}\,{}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{\omega}\Delta t \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} - \mathbf{q}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{b}}(t)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left(\mathbf{I}_3 + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -{}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\Delta t \\ {}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{\omega}\Delta t & -\left[{}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{\omega}\Delta t\right]_{\times} \end{bmatrix} \right) \mathbf{q}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{b}}(t) - \mathbf{q}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{b}}(t)}{\Delta t} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -{}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}} \\ {}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{\omega} & -\left[{}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{\omega}\right]_{\times} \end{bmatrix} \mathbf{q}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{b}}(t)
\end{aligned}
$$

4. 四元数

四元数变化率与机体角速度的关系

$$\mathbf{q}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{b}} = \begin{bmatrix} q_0 & \mathbf{q}_{\mathrm{v}}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\dot{\mathbf{q}}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{b}}(t) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -{}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}} \\ {}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{\omega} & -\left[{}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{\omega}\right]_{\times} \end{bmatrix}\mathbf{q}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{b}}(t) \Rightarrow \begin{cases} \dot{q}_0 = -\dfrac{1}{2}\mathbf{q}_{\mathrm{v}}^{\mathrm{T}} \cdot {}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{\omega} \\ \dot{\mathbf{q}}_{\mathrm{v}} = \dfrac{1}{2}\left(q_0\mathbf{I}_3 + [\mathbf{q}_{\mathrm{v}}]_{\times}\right){}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{\omega} \end{cases}$$

在实际中，${}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{\omega}$ 可由三轴陀螺仪近似测得，此时以上微分方程为**线性的！**

5. 本讲小结

- 欧拉角与机体角速度的关系

$$\dot{\boldsymbol{\Theta}} = \mathbf{W} \cdot {}^{b}\boldsymbol{\omega}$$

奇异，非线性

- 旋转矩阵与机体角速度的关系

$$\frac{d\mathbf{R}_{b}^{e}}{dt} = \mathbf{R}_{b}^{e}\left[{}^{b}\boldsymbol{\omega}\right]_{\times}$$

不奇异，维数高

- 四元数与机体角速度的关系

$$\dot{\mathbf{q}}_{e}^{b}(t) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -{}^{b}\boldsymbol{\omega}^{T} \\ {}^{b}\boldsymbol{\omega} & -\left[{}^{b}\boldsymbol{\omega}\right]_{\times} \end{bmatrix}\mathbf{q}_{e}^{b}(t)$$

不奇异，维数适中

多旋翼自驾仪基本用这种形式

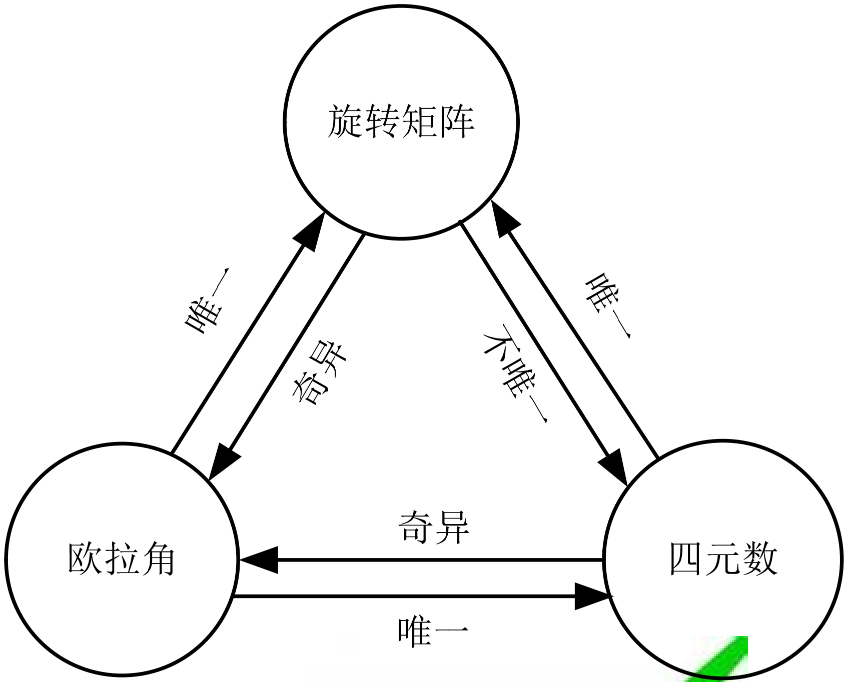


图 5.10 三种旋转表示法之间的相互转换

资源

(1)可靠飞行控制研究组主页课程中心(全部课件下载)

http://rfly.buaa.edu.cn/course

(2) 关注可靠飞行控制研究组公众号 buaarfly(文章、资讯等)

(3) 多旋翼设计与控制交流QQ群:183613048

(4) 视频课程(MOOC)同步发布，网易云课堂搜索“多旋翼”

http://study.163.com/course/introduction/1003715005.htm

(5) 同名中文书本教材《多旋翼飞行器设计与控制》即将在电子工业出版社出版，敬请期待

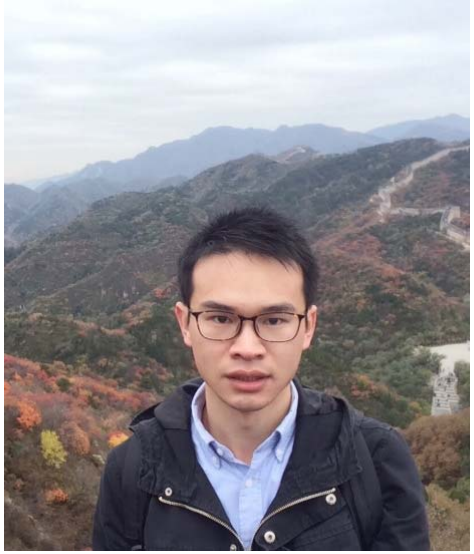
(6) 有疑问可联系课程总助教戴训华，邮箱：dai@buaa.edu.cn

致谢

感谢控制组同学

马海彪

任锦瑞



戴训华

为本节课程准备作出的贡献。

谢谢

更详细的内容可以参考我们的教材：《多旋翼飞行器设计与控制》，电子工业出版社。

中文版目前在亚马逊、当当、京东、天猫（电子工业出版社旗舰店）等网站有售。

英文版本*Introduction to Multicopter Design and Control*，在Springer出版，在亚马逊有售。