



6.3 轨迹规划建模与生成



本章目录

轨迹规划建模与生成

第六章 外部控制与轨迹规划

6.1 外部控制基础与控制分层

6.2 外部控制原理与控制模式

6.3 轨迹规划建模与生成

6.4 轨迹规划算法与避障

6.5 轨迹跟踪原理与高机动控制

6.6 前沿技术与控制方法

6.7 平台框架与通信接口

6.8 外部控制例程与实验验证

6.9 习题与课堂讨论

本节 5 个教学单元

6.3.1 规划目标与关键概念

教材对应：第6.1.3.1、6.1.3.2节（可行与最优）

6.3.2 问题建模与目标函数

教材对应：第6.1.3.3节（建模与目标）

6.3.3 约束条件

教材对应：第6.1.3.3节（约束条件）

6.3.4 离散与基函数表示

教材对应：第6.1.3.3节（轨迹表示）

6.3.5 轨迹生成与求解

教材对应：第6.1.3.3、6.1.3.5节（流程第3步）



6.3.1 规划目标与关键概念：规划目标

把“到达目标”写成可检查的运动任务

$$\mathbf{p}_0 = (0, 0, -5)^T \text{ m}, \quad \mathbf{p}_f = (10, 0, -5)^T \text{ m}$$

任务前：生成参考



执行中：在线重规划



任务后：返航或降落

坐标与初值：北—东—地（NED），地向朝下为正，离地5 m记作-5 m；起点已悬停。

任务条件：从起点 $\mathbf{p}_0$ 到终点 $\mathbf{p}_f$ 无障碍，两端停稳；速度 $\leq 3 \text{ m/s}$ ，加速度 $\leq 2 \text{ m/s}^2$ 。

同一个到达任务，时间安排不同，所需的运动能力就不同。

6.3 轨迹规划建模与生成

6.3.1 规划目标与关键概念：关键概念

路径、轨迹、可行性和最优性分别判断什么

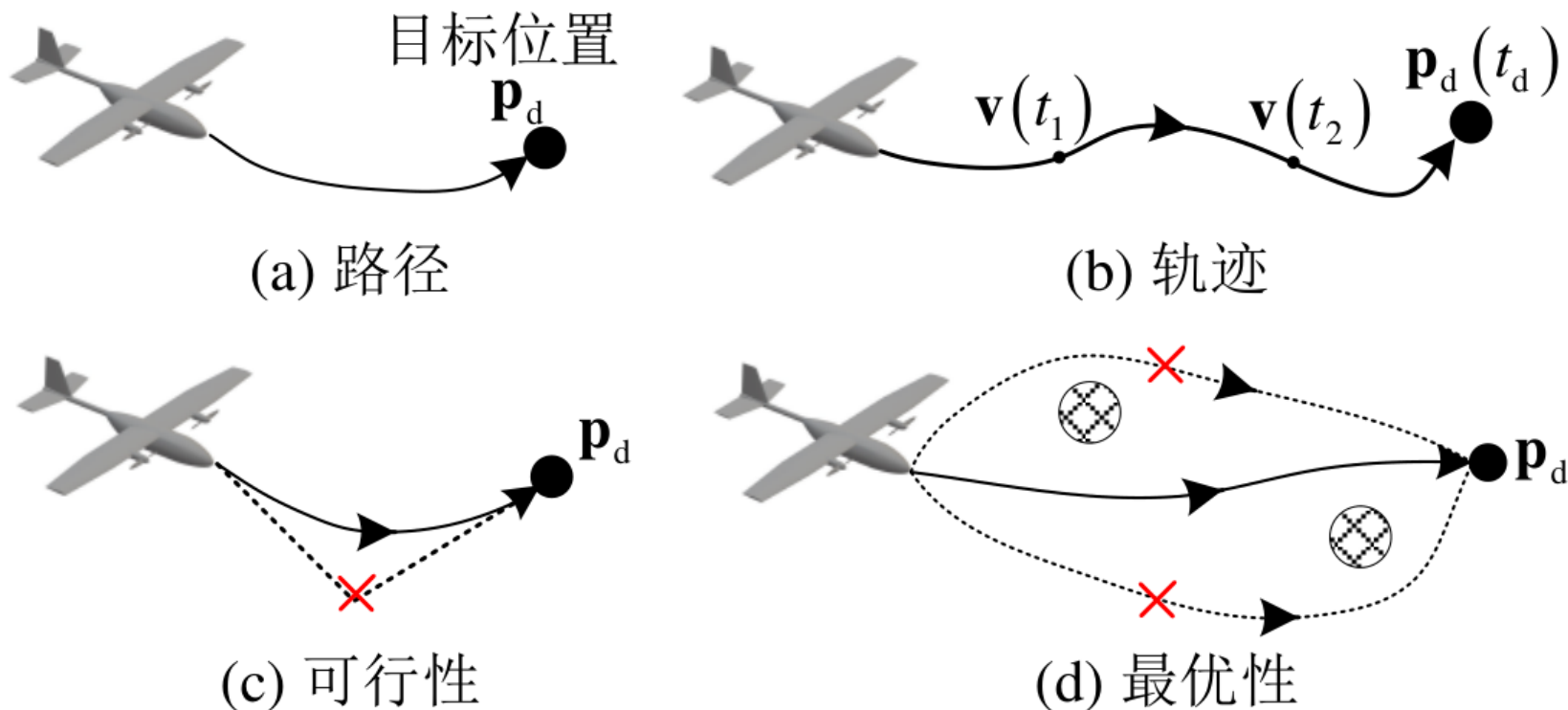


图6.5 路径只描述空间；轨迹增加时间；可行：满足约束；最优：可行轨迹中代价最小。
图例：红叉为载具做不到的急转，带叉圆为障碍物， p_d 为目标位置。

6.3.1 规划目标与关键概念：两点时间化

两点直线加入时间后，可以算出每个参考点

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{p}_0 + s(\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_0), \quad 0 \leq s \leq 1$$

$$s(t) = \frac{t}{T}, \quad T = 5 \text{ s}, \quad \mathbf{p}(t) = \mathbf{r}(s(t))$$

$$\mathbf{p}(2) = (4, 0, -5)^T \text{ m}, \quad \mathbf{v} = (2, 0, 0)^T \text{ m/s}$$

s 为无量纲进度， T 为总时长（s）； $\mathbf{r}$ 为路径， $\mathbf{p}$ 为位置参考（m）。

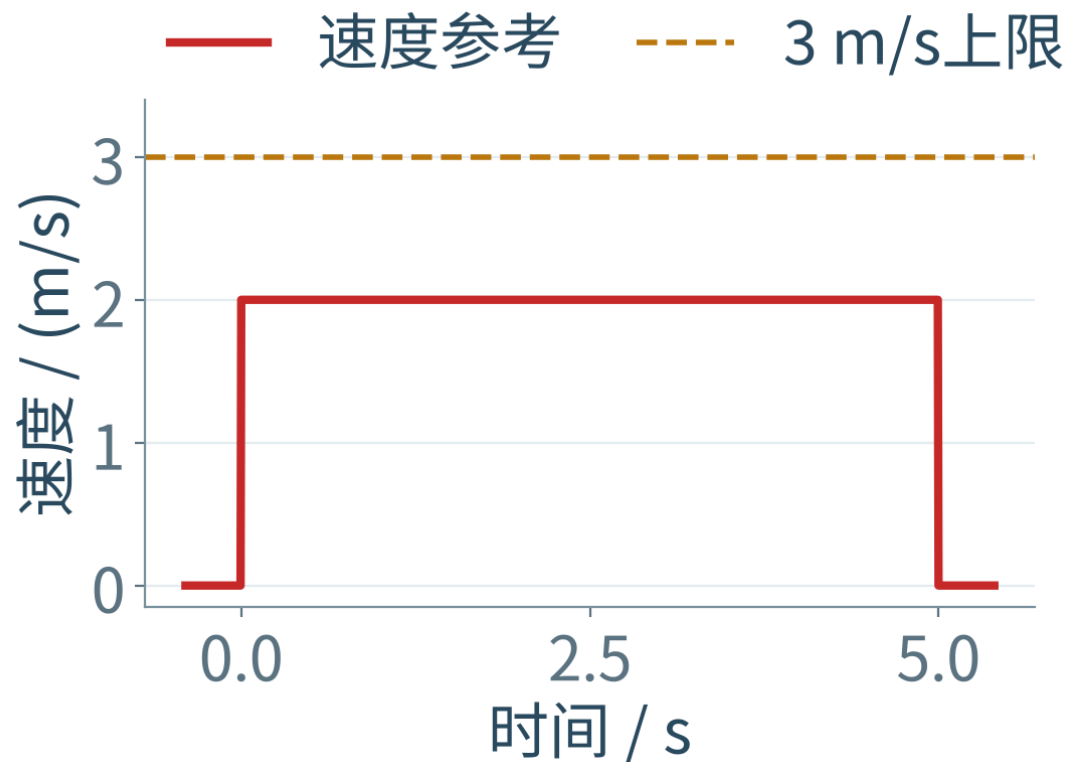
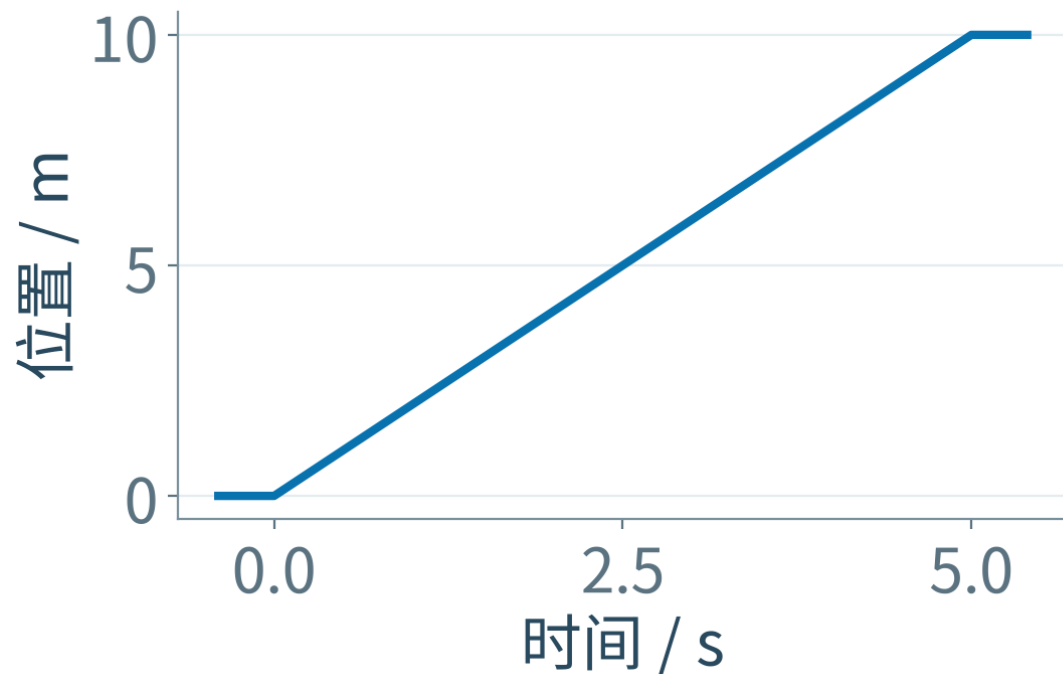
路径跟随：沿空间曲线运动，不要求某一时刻恰好经过指定点。

轨迹跟踪：在规定时刻跟上对应的位置及其运动状态。

6.3.1 规划目标与关键概念：完整参考结果

匀速段满足速度上限，起停处仍存在突变

教学算例，非平台实测



图：匀速段2 m/s低于3 m/s上限；两端速度在0与2 m/s间跳变（竖线），有限加速度无法实现。



6.3 轨迹规划建模与生成



本章目录

轨迹规划建模与生成

第六章 外部控制与轨迹规划

6.1 外部控制基础与控制分层

6.2 外部控制原理与控制模式

6.3 轨迹规划建模与生成

6.4 轨迹规划算法与避障

6.5 轨迹跟踪原理与高机动控制

6.6 前沿技术与控制方法

6.7 平台框架与通信接口

6.8 外部控制例程与实验验证

6.9 习题与课堂讨论

本节 5 个教学单元

6.3.1 规划目标与关键概念

教材对应：第6.1.3.1、6.1.3.2节（可行与最优）

6.3.2 问题建模与目标函数

教材对应：第6.1.3.3节（建模与目标）

6.3.3 约束条件

教材对应：第6.1.3.3节（约束条件）

6.3.4 离散与基函数表示

教材对应：第6.1.3.3节（轨迹表示）

6.3.5 轨迹生成与求解

教材对应：第6.1.3.3、6.1.3.5节（流程第3步）

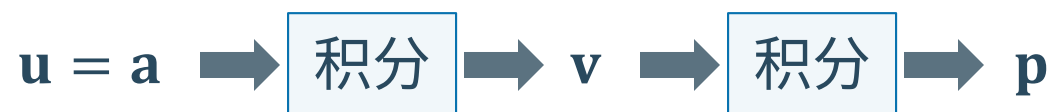


6.3.2 问题建模与目标函数：问题建模

位置与速度组成六维状态，加速度作为控制输入

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}(t) \\ \mathbf{v}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6, \quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{p}}$$

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{u} \quad (\mathbf{u} = \mathbf{a})$$



$$\mathbf{x}_i(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_i(t) \\ \mathbf{v}_i(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6, \quad i = 1, \dots, N \quad (6.1)$$

$\mathbf{p}, \mathbf{v}$: 三维位置 (m) 与速度 (m/s) ; $\mathbf{u} = \mathbf{a}$: 加速度控制量 (m/s^2) 。
六维状态 $\mathbf{x}$ 由位置、速度组成; i 为载具编号, N 为载具总数。
姿态、角速度和执行器约束按任务扩展。

6.3.2 问题建模与目标函数：目标函数

目标函数比较代价，约束决定能否接受

$$J[\mathbf{p}] = \int_0^T (k_1 \|\ddot{\mathbf{p}}(t)\|^2 + k_2 \|\mathbf{u}(t)\|^2) dt$$
$$J^* = \min_{\{\mathbf{p}_i\}} \sum_{i=1}^N \int_0^T (k_1 \|\ddot{\mathbf{p}}_i\|^2 + k_2 \|\mathbf{u}_i\|^2 + \dots) dt \quad (6.2)$$

平滑性项： $\ddot{\mathbf{p}}$ 是加加速度（Jerk），单位为 m/s^3 。

权重与量纲： $k_1, k_2 > 0$ ；可先用参考尺度归一化。 J^* 即最小代价，教材式(6.2)记作 J 。

6.3.2 问题建模与目标函数：平滑性指标

Jerk与Snap分别惩罚不同阶的变化

量与单位	对应位置导数	平方积分指标
加加速度 (Jerk)	$\mathbf{p}^{(3)}(t)$	$J_3 = \int_0^T \ \mathbf{p}^{(3)}\ ^2 dt$
单位: m/s^3	加速度的变化率	单段解: 五次, 6个端点条件
加加加速度 (Snap)	$\mathbf{p}^{(4)}(t)$	$J_4 = \int_0^T \ \mathbf{p}^{(4)}\ ^2 dt$
单位: m/s^4	Jerk的变化率	单段解: 七次, 8个端点条件

时间、覆盖率、路径长度也可进入目标; 指标应服务任务, 并处理量纲和相互冲突。

6.3.2 问题建模与目标函数：一步计算

用一个三次候选算出一小段代价

$$x(t) = 0.08t^3, \quad 0 \leq t \leq 5 \text{ s}; \quad y = 0, \quad z = -5$$

$$a_x(t) = 0.48t, \quad j_x(t) = 0.48$$

$$J = \int_0^5 \left[\left(\frac{j_x}{j_0} \right)^2 + \left(\frac{a_x}{a_0} \right)^2 \right] dt$$

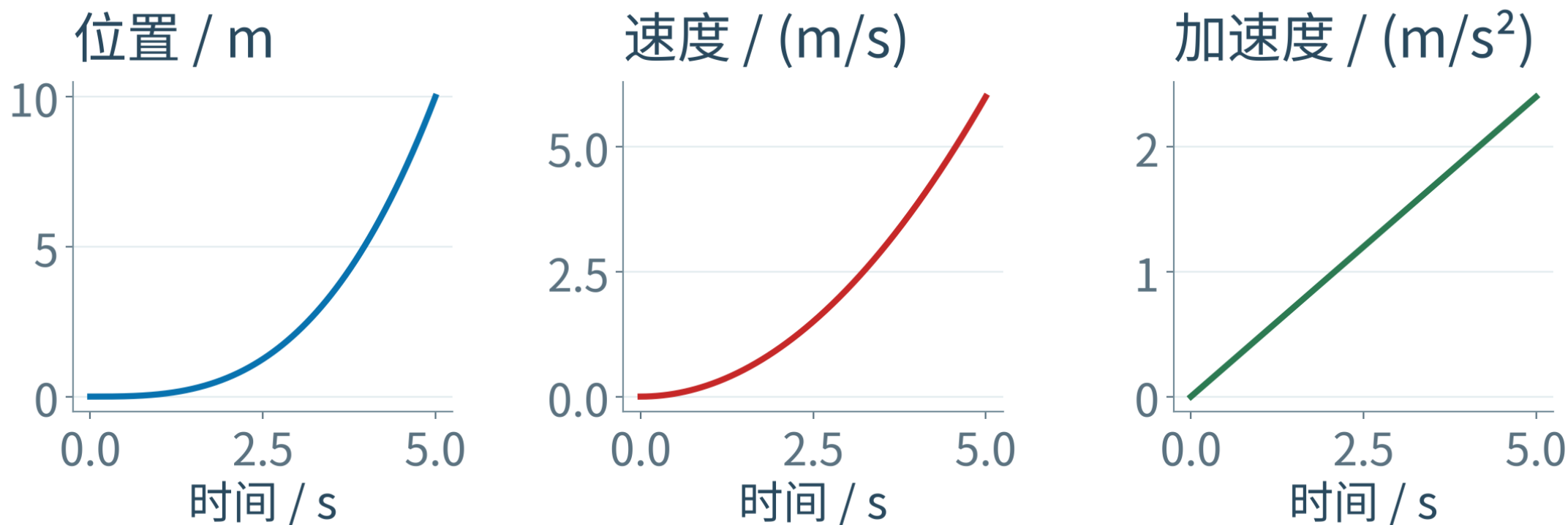
量纲：北向位置 x (m) ，时间 t (s) ； a_x (m/s²) ， j_x (m/s³) 。

参考尺度： $j_0 = 1 \text{ m/s}^3$ ， $a_0 = 1 \text{ m/s}^2$ 。在2 s处取0.1 s区间。

$$\Delta J \approx (0.48^2 + 0.96^2) \times 0.1 = 0.1152 \text{ s}$$

6.3.2 问题建模与目标函数：完整候选结果

完整积分得到代价，终点检查仍会淘汰候选



图：完整候选。 $J = 1.152 + 9.6 = 10.752$ s；终端速度6 m/s，未满足停稳。



6.3 轨迹规划建模与生成



本章目录

轨迹规划建模与生成

第六章 外部控制与轨迹规划

6.1 外部控制基础与控制分层

6.2 外部控制原理与控制模式

6.3 轨迹规划建模与生成

6.4 轨迹规划算法与避障

6.5 轨迹跟踪原理与高机动控制

6.6 前沿技术与控制方法

6.7 平台框架与通信接口

6.8 外部控制例程与实验验证

6.9 习题与课堂讨论

本节 5 个教学单元

6.3.1 规划目标与关键概念

教材对应：第6.1.3.1、6.1.3.2节（可行与最优）

6.3.2 问题建模与目标函数

教材对应：第6.1.3.3节（建模与目标）

6.3.3 约束条件

教材对应：第6.1.3.3节（约束条件）

6.3.4 离散与基函数表示

教材对应：第6.1.3.3节（轨迹表示）

6.3.5 轨迹生成与求解

教材对应：第6.1.3.3、6.1.3.5节（流程第3步）



6.3.3 约束条件：边界条件

指定位置端点，还要指定怎样到达端点

$$\mathbf{p}_i(0) = \mathbf{p}_i^{\text{start}}, \quad \mathbf{p}_i(T) = \mathbf{p}_i^{\text{goal}} \quad (6.3)$$

北向条件	起点	终点
位置	$x(0) = 0 \text{ m}$	$x(T) = 10 \text{ m}$
速度	$\dot{x}(0) = 0$	$\dot{x}(T) = 0$
加速度	$\ddot{x}(0) = 0$	$\ddot{x}(T) = 0$

“经过目标点”和“在目标点停稳”是两组不同的边界条件。

6.3.3 约束条件：运动上限

完成时间同时改变速度、加速度与Jerk

$$\|\dot{\mathbf{p}}_i(t)\| \leq v_{\max}, \quad \|\ddot{\mathbf{p}}_i(t)\| \leq a_{\max} \quad (6.5)$$

$$\tau = \frac{t}{T}, \quad \mathbf{p}(t) = \mathbf{r}(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq 1$$

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{r}'}{T}, \quad \mathbf{a} = \frac{\mathbf{r}''}{T^2}, \quad \mathbf{j} = \frac{\mathbf{r}'''}{T^3}$$

点表示对时间 t 求导，撇表示对归一化时间 τ 求导； $\|\cdot\|$ 表示向量模长。

本例限速3 m/s、限加速度2 m/s²，需检查整个时间区间。

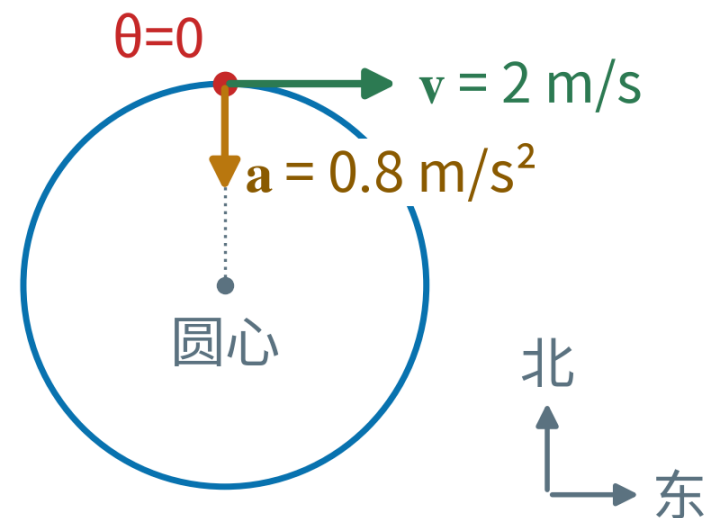
同一曲线 T 加倍：速度、加速度、Jerk峰值分别降为1/2、1/4、1/8。

6.3.3 约束条件：圆轨迹建模

圆轨迹的速度沿切线，加速度指向圆心

$$\theta = \omega t, \quad \mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} R \cos \theta \\ R \sin \theta \\ -5 \end{bmatrix}, \quad R = 5 \text{ m}$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -R\omega \sin \theta \\ R\omega \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} -R\omega^2 \cos \theta \\ -R\omega^2 \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix}$$



匀速绕圆段：取 $\omega = 0.4 \text{ rad/s}$ 为恒定角速度，角度自北向东计。

$$\mathbf{v}(0) = (0, 2, 0)^T \text{ m/s}, \quad \mathbf{a}(0) = (-0.8, 0, 0)^T \text{ m/s}^2$$

起停过渡还会产生切向加速度，需另检查运动上限。

6.3.3 约束条件：圆轨迹约束计算

半径固定后，角速度受两类上限共同限制

$$v = R|\omega|, \quad a = R\omega^2$$

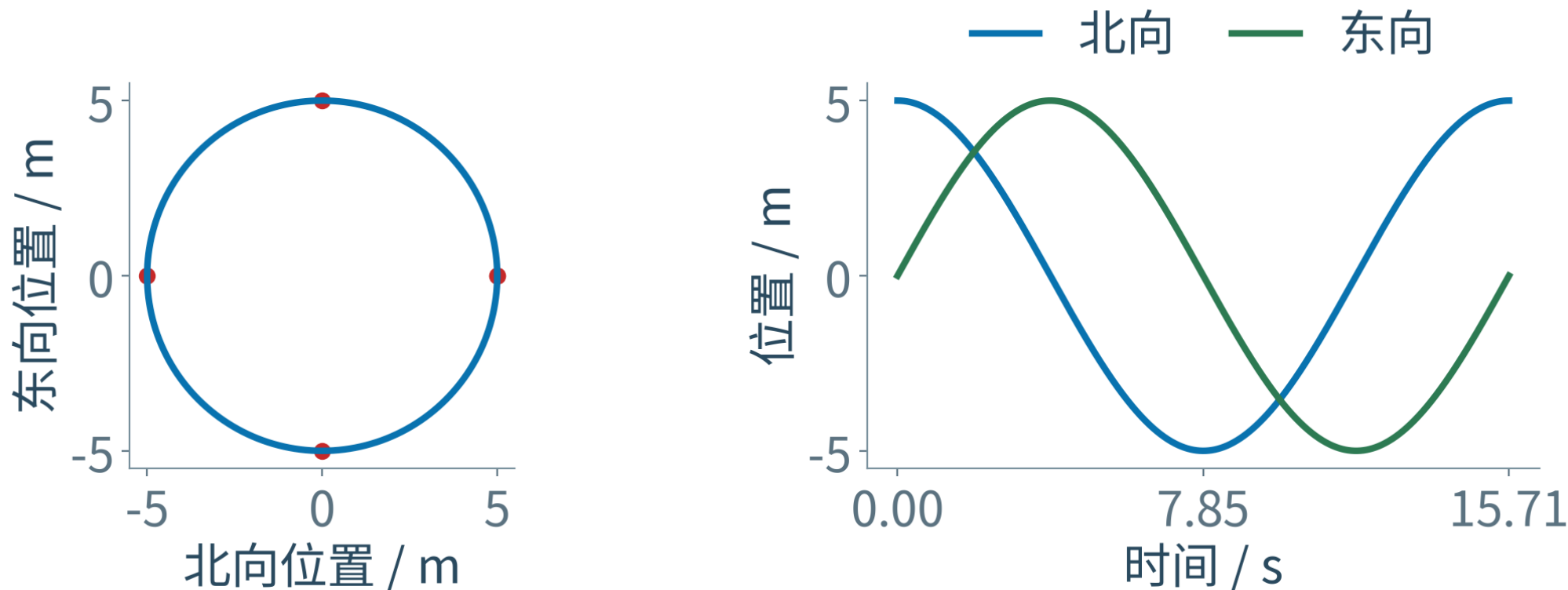
$$|\omega| \leq \min\left(\frac{v_{\max}}{R}, \sqrt{\frac{a_{\max}}{R}}\right) = \min(0.6, \sqrt{0.4}) = 0.6 \text{ rad/s}$$

$$T_{\text{lap}} = \frac{2\pi}{|\omega|} \geq 10.472 \text{ s}$$

角速度	速度	加速度	区间判断
0.4 rad/s	2 m/s	0.8 m/s ²	满足两个上限
0.8 rad/s	4 m/s	3.2 m/s ²	两个上限均超出

6.3.3 约束条件：圆轨迹完整结果

一周的空间曲线和时间曲线要同时闭合



图：红点为每1/4圈位置，起点(5,0)先转向东；一周15.708 s，速度2 m/s、加速度0.8 m/s²。

6.3.3 约束条件：转弯与非完整约束

运动约束还取决于载具类型

$$a_n = v^2 \kappa = \frac{v^2}{R}, \quad R \geq R_{\min}$$

a_n : 法向加速度 (m/s^2)

$\kappa = 1/R$: 曲率 ($1/\text{m}$)

$R_{\min}$: 最小转弯半径 (m)

多旋翼	理想轮式车	固定翼
运动条件	运动条件	运动条件
推力、倾角、爬升能力	$-\dot{x} \sin \psi + \dot{y} \cos \psi = 0$	空速下限、转弯半径、爬升角
轨迹影响	轨迹影响	轨迹影响
可悬停，但加速度有界	无侧滑：速度沿车体朝向 ψ 为航向角，自北向东计	不能用停稳折返代替转弯

非完整约束：限制速度方向、不能积分成位置约束，如轮式车的无侧滑条件。

6.3.3 约束条件：防碰撞约束

多机安全间隔约束通常是非凸的

$$\|\mathbf{p}_i(t) - \mathbf{p}_j(t)\| \geq d_{\min}, \quad i \neq j, \quad t \in [0, T] \quad (6.4)$$

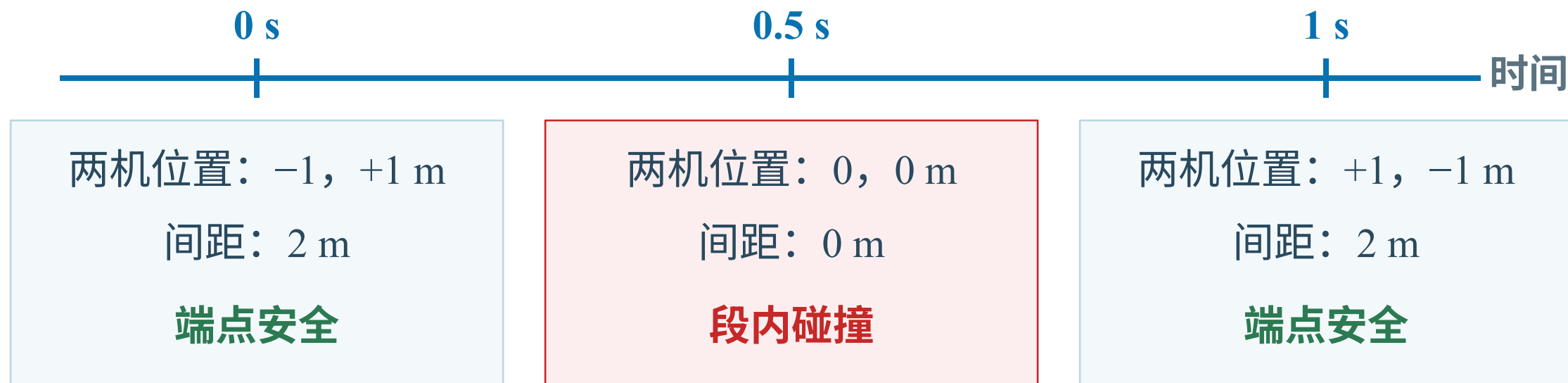
一维相对位置	与2 m安全间隔比较	是否可行
+2 m	距离2 m	是
-2 m	距离2 m	是
两者平均：0 m	距离0 m	否

凸集：任意两点连线上的点仍在集合内；两点的平均是一种凸组合。
表中两点平均后离开可行集合，所以该约束非凸；求解后须复查原约束。

6.3.3 约束条件：连续区间复查

只检查采样时刻，可能漏掉中间碰撞

$$p_1(t) = -1 + 2t, \quad p_2(t) = 1 - 2t, \quad 0 \leq t \leq 1$$



离散节点通过检查，仍需验证节点之间的运动与安全约束。



6.3 轨迹规划建模与生成



本章目录

轨迹规划建模与生成

第六章 外部控制与轨迹规划

6.1 外部控制基础与控制分层

6.2 外部控制原理与控制模式

6.3 轨迹规划建模与生成

6.4 轨迹规划算法与避障

6.5 轨迹跟踪原理与高机动控制

6.6 前沿技术与控制方法

6.7 平台框架与通信接口

6.8 外部控制例程与实验验证

6.9 习题与课堂讨论

本节 5 个教学单元

6.3.1 规划目标与关键概念

教材对应：第6.1.3.1、6.1.3.2节（可行与最优）

6.3.2 问题建模与目标函数

教材对应：第6.1.3.3节（建模与目标）

6.3.3 约束条件

教材对应：第6.1.3.3节（约束条件）

6.3.4 离散与基函数表示

教材对应：第6.1.3.3节（轨迹表示）

6.3.5 轨迹生成与求解

教材对应：第6.1.3.3、6.1.3.5节（流程第3步）



6.3.4 离散与基函数表示：轨迹离散化

离散方法优化节点，差分联系相邻运动状态

$$\{t_k, \mathbf{p}_1(t_k), \dots, \mathbf{p}_N(t_k)\}_{k=0}^K \quad (6.6)$$

K 为区间数，共 $K + 1$ 个节点；对单机记 $\mathbf{p}_k = \mathbf{p}(t_k)$ ，等间隔 $\Delta t = t_{k+1} - t_k$ 。

$$\mathbf{v}_k \approx \frac{\mathbf{p}_{k+1} - \mathbf{p}_k}{\Delta t}, \quad \mathbf{a}_k \approx \frac{\mathbf{p}_{k+1} - 2\mathbf{p}_k + \mathbf{p}_{k-1}}{\Delta t^2}$$

例：相邻位置为0、0.1、0.4 m，采样间隔0.1 s；两个区间速度分别为1、3 m/s。

$$a_1 \approx \frac{0.4 - 2 \times 0.1 + 0}{0.1^2} = 20 \text{ m/s}^2$$

结论：相邻点只差0.1 m和0.3 m，加速度却达20 m/s²，远超2 m/s²上限。

6.3.4 离散与基函数表示：基函数表示

基函数方法直接优化轨迹的系数

$$\mathbf{p}_i(t) = \sum_{j=0}^M \phi_j(t) \mathbf{A}_{i,j} = \mathbf{A}_i \boldsymbol{\Phi}(t) \quad (6.7)$$

$$\mathbf{A}_{i,j} = \begin{bmatrix} \alpha_{i,j} \\ \beta_{i,j} \\ \gamma_{i,j} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{3 \times (M+1)}$$

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = [\phi_0(t), \dots, \phi_M(t)]^\top$$

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{A}_i \dot{\boldsymbol{\Phi}}, \quad \mathbf{a}_i = \mathbf{A}_i \ddot{\boldsymbol{\Phi}}$$

ϕ_j 为第 j 个已选基函数，共 $M + 1$ 个； $\boldsymbol{\Phi}$ 为基函数列向量。

$\mathbf{A}_i$ 为第 i 架载具的待求系数矩阵；每列 $\mathbf{A}_{i,j}$ 含北、东、地三个系数。

求出系数后，便可计算任意时刻的位置、速度和加速度。

6.3.4 离散与基函数表示：基函数类型

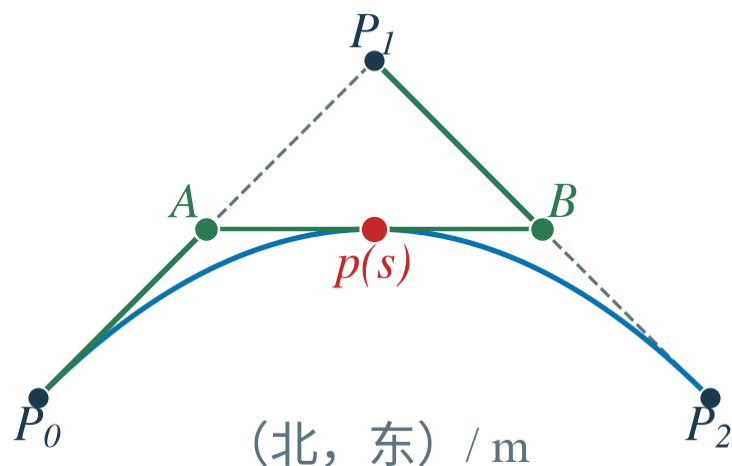
基函数的选择改变表达能力与约束写法

基函数族	主要参数	适用性质与检查重点
多项式	各次幂的系数	解析求导；关注尺度与段间连续性
贝塞尔曲线	控制点与次数	形状直观；控制点通常不是途经点
B样条	控制点、次数 节点向量	局部支撑：控制点只影响邻近一段 节点重复会降低连续性
傅里叶基函数	正弦、余弦系数	周期表达；核对周期边界
径向基函数 (RBF)	中心、宽度和权重	按距中心的远近构造形状

6.3.4 离散与基函数表示：控制点算例

贝塞尔控制点牵引曲线，通常不被曲线经过

$$\mathbf{p}(s) = (1-s)^2 \mathbf{P}_0 + 2s(1-s) \mathbf{P}_1 + s^2 \mathbf{P}_2$$



参数 $s = 0.50$

一次插值

$A = (2.5, 2.5)$

$B = (7.5, 2.5)$

二次插值

$p = (5.0, 2.5)$

三个控制点：

$\mathbf{P}_0 = (0,0)$

$\mathbf{P}_1 = (5,5)$

$\mathbf{P}_2 = (10,0)$

图：虚线为控制多边形；曲线落在控制点凸包内，凸包整体避障即可保证曲线安全。

$$\mathbf{p}(0.5) = \frac{1}{4} (0,0) + \frac{1}{2} (5,5) + \frac{1}{4} (10,0) = (5,2.5)$$

6.3.4 离散与基函数表示：多项式基函数

七次多项式有八个系数，长时间宜归一化

$$x_i(t) = \alpha_{i,0} + \alpha_{i,1}t + \cdots + \alpha_{i,6}t^6 + \alpha_{i,7}t^7 \quad (6.8)$$

$$\tau = \frac{t - t_0}{T}, \quad x_i(t) = \sum_{j=0}^7 c_{i,j} \tau^j, \quad 0 \leq \tau \leq 1$$

$$30^7 = 2.187 \times 10^{10}, \quad 0 \leq \tau^7 \leq 1$$

t_0 为段起时刻， T 为段时长（s）； $c_{i,j}$ 是归一化后的系数（m）。

原系数 $\alpha_{i,j}$ 的单位为 m/s^j ；量级算例取段长30 s。

选七次：最小Snap单段解为七次，8个系数由两端位置、速度、加速度与Jerk确定。

6.3.4 离散与基函数表示：变量数量

同一任务下，离散节点数远多于基函数系数

表示与计数口径	原始标量数	固定两端位置后
30个区间，31个节点	$10 \times 31 \times 3 = 930$	$930 - 60 = 870$
明确采用30个节点	$10 \times 30 \times 3 = 900$	$900 - 60 = 840$
每轴单段七次多项式	$10 \times 8 \times 3 = 240$	$240 - 60 = 180$

例：10架载具、三维位置、固定时间；仅计位置节点或系数。
端点约束可保留或消元，原始标量数与消元后变量数不可混用。



6.3 轨迹规划建模与生成



本章目录

轨迹规划建模与生成

第六章 外部控制与轨迹规划

6.1 外部控制基础与控制分层

6.2 外部控制原理与控制模式

6.3 轨迹规划建模与生成

6.4 轨迹规划算法与避障

6.5 轨迹跟踪原理与高机动控制

6.6 前沿技术与控制方法

6.7 平台框架与通信接口

6.8 外部控制例程与实验验证

6.9 习题与课堂讨论

本节 5 个教学单元

6.3.1 规划目标与关键概念

教材对应：第6.1.3.1、6.1.3.2节（可行与最优）

6.3.2 问题建模与目标函数

教材对应：第6.1.3.3节（建模与目标）

6.3.3 约束条件

教材对应：第6.1.3.3节（约束条件）

6.3.4 离散与基函数表示

教材对应：第6.1.3.3节（轨迹表示）

6.3.5 轨迹生成与求解

教材对应：第6.1.3.3、6.1.3.5节（流程第3步）



6.3.5 轨迹生成与求解：五次时间化推导

六个端点条件唯一确定单段五次曲线

$$x(t) = 10q(\tau), \quad q(\tau) = \sum_{j=0}^5 c_j \tau^j, \quad \tau = t/T$$

$$q(0) = q'(0) = q''(0) = 0$$

$$q(1) = 1, \quad q'(1) = q''(1) = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 12 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$c_0 = c_1 = c_2 = 0, \quad (c_3, c_4, c_5) = (10, -15, 6)$$

$$q(\tau) = 10\tau^3 - 15\tau^4 + 6\tau^5$$

q 为归一化位移， c_j 为其系数，均无量纲； x 以m计， T 以s计。

最优性：固定 T 与两端位置、速度、加速度时，这条五次曲线的Jerk平方积分最小。



6.3 轨迹规划建模与生成



6.3.5 轨迹生成与求解：五次轨迹一步计算

由同一个多项式同时求出位置、速度和加速度

$$q = 10\tau^3 - 15\tau^4 + 6\tau^5, \quad x = 10q$$

$$q' = 30\tau^2(1 - \tau)^2, \quad v_x = \frac{10}{T} q'$$

$$q'' = 60\tau - 180\tau^2 + 120\tau^3, \quad a_x = \frac{10}{T^2} q''$$

代入 $T = 5 \text{ s}$, $t = 1.25 \text{ s}$, $\tau = 0.25$:

$$x = 1.03515625 \text{ m}, \quad v_x = 2.109375 \text{ m/s}, \quad a_x = 2.25 \text{ m/s}^2$$



6.3.5 轨迹生成与求解：时间选择

解析峰值给出这条五次曲线的时间下限

$$v_{\text{peak}} = \frac{1.875D}{T}, \quad a_{\text{peak}} = \frac{10D}{\sqrt{3}T^2}, \quad D = 10 \text{ m}$$

来历： $q'(0.5) = 1.875$; $q''' = 0$ 时 $\tau = (3 \pm \sqrt{3})/6$, $|q''|_{\text{max}} = 10/\sqrt{3} \approx 5.774$ 。

$$T \geq \max\left(\frac{1.875D}{v_{\text{max}}}, \sqrt{\frac{10D}{\sqrt{3}a_{\text{max}}}}\right)$$
$$T \geq \max(6.25, 5.373) \text{ s} = 6.25 \text{ s}$$

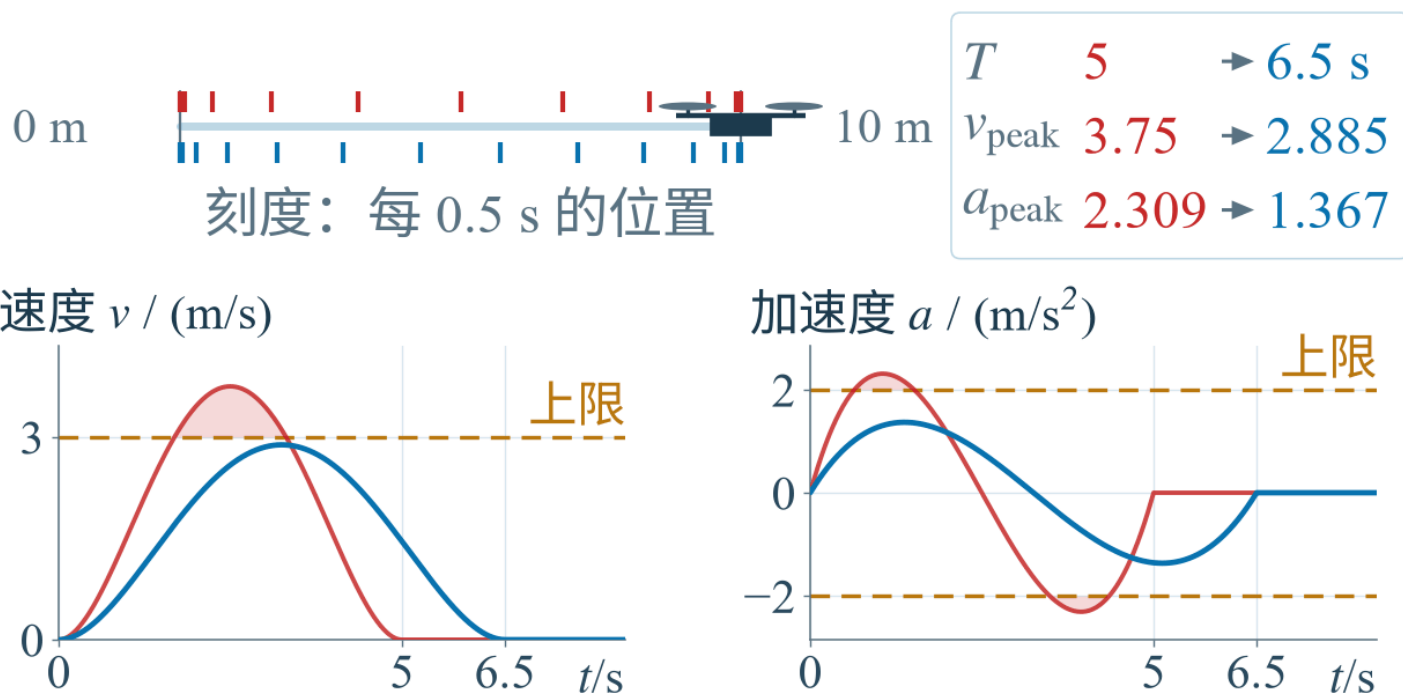
取6.5 s：峰值速度2.885 m/s，峰值加速度1.367 m/s²，满足给定运动上限。

代价对比： 此轨迹 $J \approx 12.45 \text{ s}$ ，高于不可行三次候选的10.75 s；先筛约束再比代价。

6.3.5 轨迹生成与求解：时间缩放过程

拉长完成时间：路径不变，速度和加速度峰值下降

时间下限 $T \geq \max(6.25, 5.373) \text{ s}$ ，取 6.5 s



路径不变：两次都从0 m到10 m并在终点停稳，变的只是各时刻的位置。

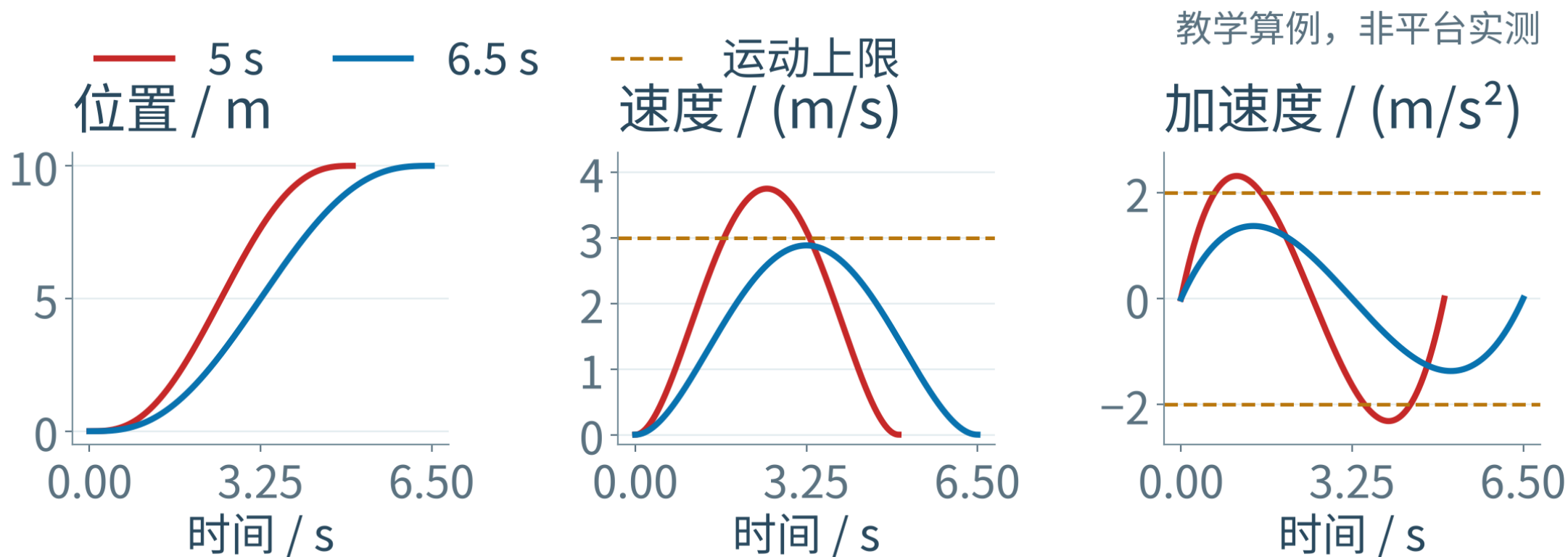
峰值缩放：速度峰值与 T 成反比，加速度峰值与 T^2 成反比。

时间下限：加速度5.373 s即达标，速度需6.25 s；取6.5 s留出裕量。

图：同一路径由5 s拉长到6.5 s的动画（数值来自解析计算）

6.3.5 轨迹生成与求解：完整五次轨迹结果

同一路径延长到6.5 s后通过两项运动上限



图：红线5 s，蓝线6.5 s；橙色虚线为3 m/s、2 m/s²上限。蓝线峰值2.885 m/s、1.367 m/s²。

6.3.5 轨迹生成与求解：分段生成

多点轨迹需要同时规定段内函数和连接条件

航点	位置（北，东） / m	通过时刻	通过条件
起点	(0, 0)	0 s	静止
中间点	(5, 3)	4.2 s	停稳后再出发
终点	(10, 0)	8.4 s	静止

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{P}_\ell + (\mathbf{P}_{\ell+1} - \mathbf{P}_\ell) q \left(\frac{t - t_\ell}{4.2} \right)$$

$\ell = 0, 1$ 为段号； $t_0 = 0 \text{ s}$, $t_1 = 4.2 \text{ s}$ 为各段起时刻。

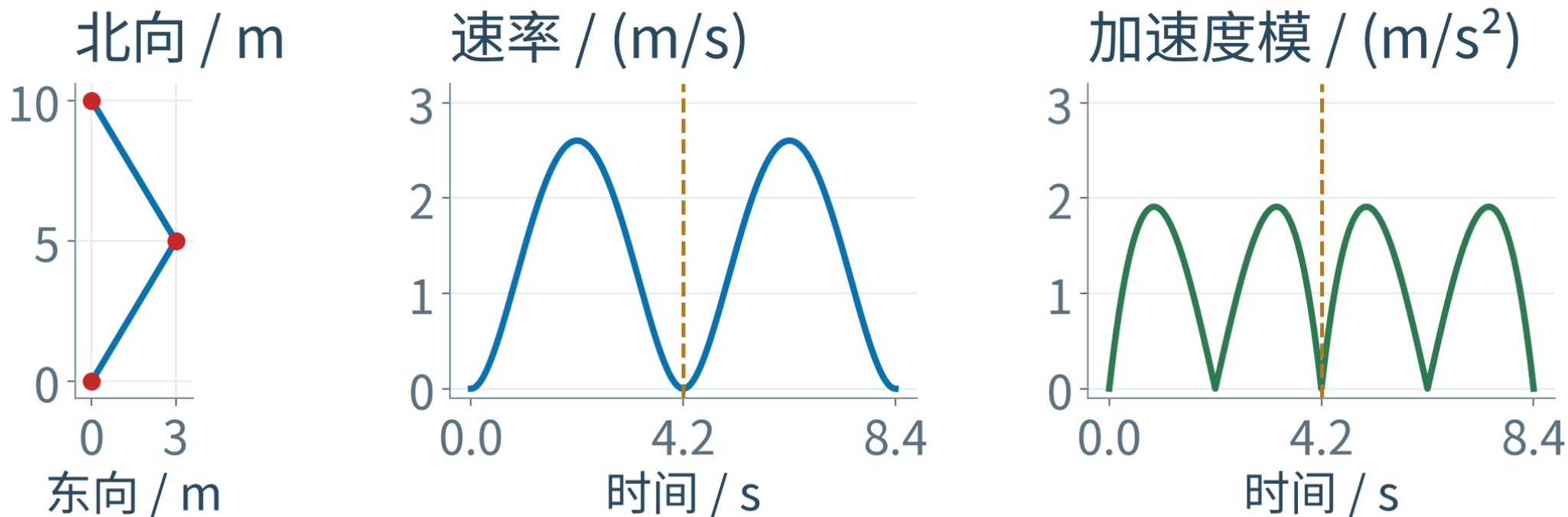
$\mathbf{P}_\ell$ 为三维航点，垂直坐标均为 -5 m ；段间位置、速度、加速度连续。

段长 $\sqrt{34} \approx 5.83 \text{ m}$ ，按时间下限公式得 $T \geq 4.10 \text{ s}$ ，取 4.2 s 。

6.3.5 轨迹生成与求解：多点完整结果

加入中间点后，检查停稳时刻与每段峰值

教学算例，非平台实测



图：中间点4.2 s停稳；峰值速度2.603 m/s、峰值加速度1.908 m/s²。

6.3.5 轨迹生成与求解：求解与复查

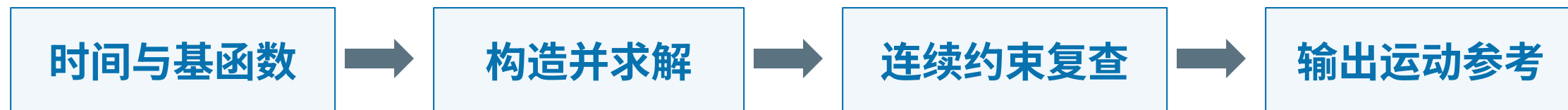
固定时间与基函数后，平滑生成常可写成凸二次规划

$$\min_{\mathbf{c}} \frac{1}{2} \mathbf{c}^T \mathbf{H} \mathbf{c} + \mathbf{f}^T \mathbf{c}, \quad \mathbf{H} \geq 0 \quad \mathbf{l} \leq \mathbf{A} \mathbf{c} \leq \mathbf{u}$$

$\mathbf{c}$ 为待求轨迹系数； $\mathbf{H}, \mathbf{f}$ 为已知的二次项矩阵和一次项系数。

$\mathbf{A}$ 为线性约束矩阵， $\mathbf{l}, \mathbf{u}$ 为下界与上界； $\mathbf{H} \geq 0$ 表示半正定（目标为凸）。

这里的 $\mathbf{u}$ 是约束上界，与双积分模型中的控制量不同。



二次规划（QP）：目标是系数的二次函数，约束为线性；可用OSQP等求解器。

速度模长上界是凸约束但非线性，多机距离下界非凸，两者都须另作处理。

全局可先离散搜索，再用局部基函数时间化和平滑。

最终输出位置、速度和加速度（PVA）。

6.3.5 轨迹生成与求解：例程阅读

安装版直线例程把插值参数逐点送给接口

入口：[安装目录]/RflySimAPIs/6.RflySimExtCtrl/

2.AdvExps/e4.TrajPlanExps/1.LineTrajMotion/LineWPCtrl.py

```
start = (0, 0, -10); end = (20, 15, -10); num_points = 100
```

```
for i in range(num_points):
```

```
    t = i / (num_points - 1)
```

```
    x = start[0] + (end[0] - start[0]) * t
```

```
    mav.SendPosNED(x, y, z, yaw)
```

```
    time.sleep(0.033)
```

$$i = 33: \quad s = \frac{33}{99} = \frac{1}{3}, \quad \mathbf{p} = (6.667, 5, -10)^T \text{ m}$$

t为0到1的插值参数；100点间隔0.033 s，约3.3 s走完25 m（名义约7.6 m/s）。起停速度跳变，与本节线性参考同类；运行见课件6.8.2「例程运行与判据」。

6.3.5 轨迹生成与求解：例程导数核对

圆例程默认direction=-1时，北向速度与位置导数不符

目录：[安装目录]/RflySimAPIs/6.RflySimExtCtrl/2.AdvExps/e4.TrajPlanExps/3.CircularTrajMotion/
入口：UAVCtrl.py（圆形轨迹例程源码）

一致形式： d 对应direction， ω 为角速度（rad/s）， t 为经过时间（s）。

$$\theta = d\omega t, \quad d \in \{-1, +1\}, \quad x = R \cos \theta, \quad y = R \sin \theta$$

$$v_x = -Rd\omega \sin \theta, \quad v_y = Rd\omega \cos \theta$$

源码默认： $d = -1$, $R = 6 \text{ m}$, $\omega = 0.4 \text{ rad/s}$ 。

当 $\text{angle} = \pi/2$ ，打印位置的北向导数为-2.4 m/s，发送值却为+2.4 m/s。

源码要点： $\text{angle} = \omega * \text{elapsed}$; $v_x = -R * \omega * \sin(\text{angle}) * \text{direction}$; 打印 $x = R * \cos(\text{angle})$
方向、源码与积分反例见课件6.5「圆形轨迹」「例程阅读」「源码反例」页；运行判
据见课件6.8.2「预期与排查」页。

课堂练习

用新数据检查变量数、运动上限与区间安全

问题	参考要点
20架三维载具，50个时间区间，位置标量共多少？	51个节点： $20 \times 51 \times 3 = 3060$ ；固定两端位置后剩 $3060 - 120 = 2940$ 。
半径2 m的圆，限速3 m/s、限加速度 2 m/s^2 ，角速度最大取多少？	按速度1.5 rad/s，按加速度1.0 rad/s；取1.0 rad/s，这次加速度约束起作用。
15 m五次起停轨迹要求6 s完成，是否满足上限？最短需多久？	峰值4.69 m/s、 2.41 m/s^2 ，均超限；按时间下限公式至少需9.375 s。
两机1 s内匀速沿北、东两轴穿过原点，起止距原点2 m。间隔须 $\geq 2 \text{ m}$ ，只查起止两刻够吗？	不够：起止间距2.83 m，但0.5 s时两机同在原点，间距为0；须检查连续区间。

本节小结

轨迹生成的结果是一组经过检查的时间函数

建模：位置、时间、边界状态、运动能力和环境要求共同定义问题。

求解：先明确优化节点还是系数，核对变量数量与约束类型。

核验：检查全时域端点、导数峰值、连续性和安全间隔，再输出PVA。

易错点：可行不代表最优，平滑不代表满足上限，参考不代表实际轨迹； K 个区间有 $K+1$ 个节点，节点安全还须查区间。

轨迹建模给出可计算的参考；规划求解和闭环执行仍各有任务。