本章目录

轨迹规划建模与生成

第六章 外部控制与轨迹规划

6.1 外部控制基础与控制分层
6.2 外部控制原理与控制模式
6.3 轨迹规划建模与生成
6.4 轨迹规划算法与避障
6.5 轨迹跟踪原理与高机动控制
6.6 前沿技术与控制方法
6.7 平台框架与通信接口
6.8 外部控制例程与实验验证
6.9 习题与课堂讨论

本节 5 个教学单元

6.3.1 规划目标与关键概念
教材对应：第6.1.3.1、6.1.3.2节（可行与最优）

6.3.2 问题建模与目标函数
教材对应：第6.1.3.3节（建模与目标）

6.3.3 约束条件
教材对应：第6.1.3.3节（约束条件）

6.3.4 离散与基函数表示
教材对应：第6.1.3.3节（轨迹表示）

6.3.5 轨迹生成与求解
教材对应：第6.1.3.3、6.1.3.5节（流程第3步）

6.3.1 规划目标与关键概念：规划目标

把“到达目标”写成可检查的运动任务

$$\mathbf{p}_0 = (0,0,-5)^{\mathsf{T}}\ \mathrm{m}, \quad \mathbf{p}_f = (10,0,-5)^{\mathsf{T}}\ \mathrm{m}$$

任务前：生成参考 → 执行中：在线重规划 → 任务后：返航或降落

坐标与初值：北—东—地（NED），地向朝下为正，离地5 m记作−5 m；起点已悬停。

任务条件：从起点$\mathbf{p}_0$到终点$\mathbf{p}_f$无障碍，两端停稳；速度≤3 m/s，加速度≤2 m/s²。

同一个到达任务，时间安排不同，所需的运动能力就不同。

6.3.1 规划目标与关键概念：关键概念

路径、轨迹、可行性和最优性分别判断什么

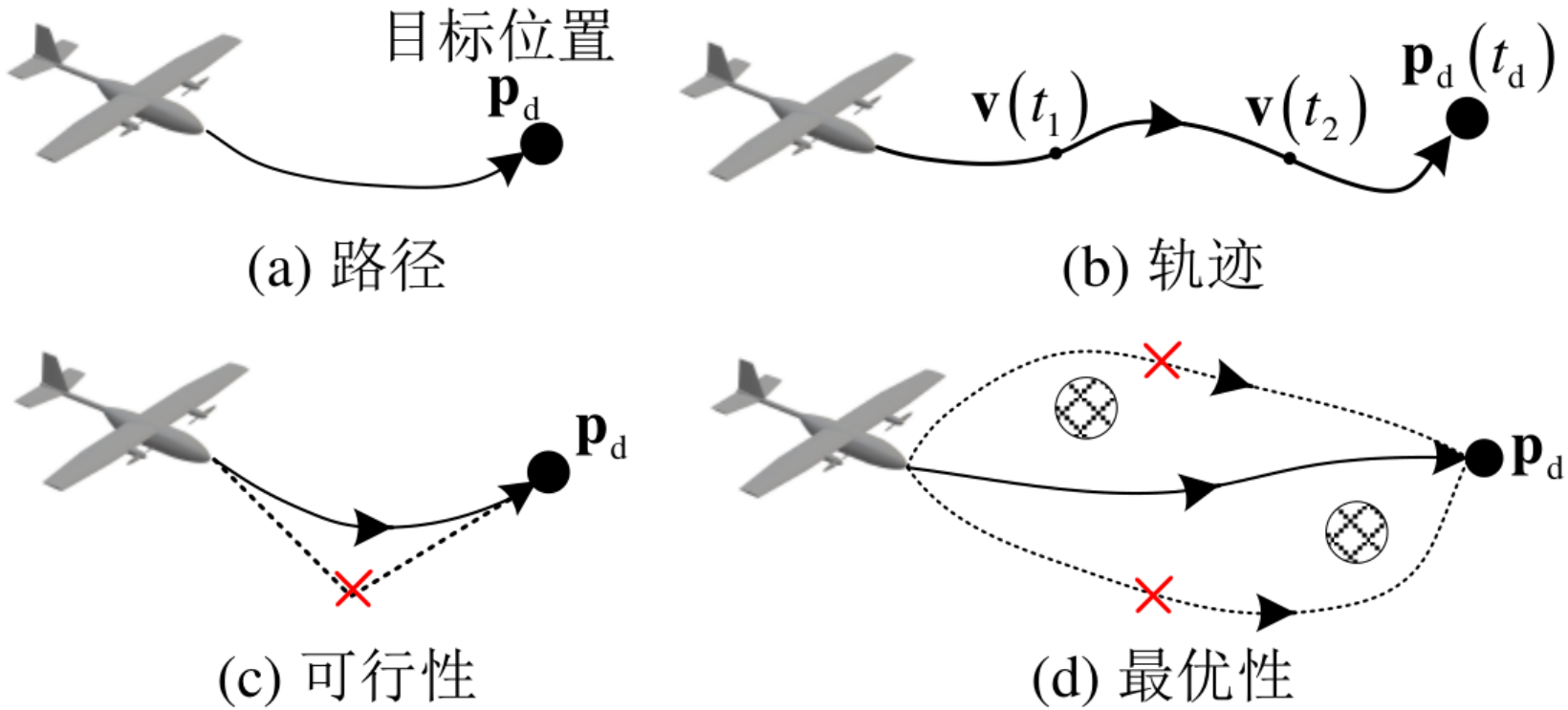


图6.5 路径只描述空间；轨迹增加时间；可行：满足约束；最优：可行轨迹中代价最小。
图例：红叉为载具做不到的急转，带叉圆为障碍物，$\mathbf{p}_d$为目标位置。

6.3.1 规划目标与关键概念：两点时间化

两点直线加入时间后，可以算出每个参考点

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{p}_0 + s(\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_0), \quad 0 \le s \le 1$$

$$s(t) = \frac{t}{T}, \quad T = 5\ \mathrm{s}, \quad \mathbf{p}(t) = \mathbf{r}(s(t))$$

$$\mathbf{p}(2) = (4,0,-5)^{\mathsf{T}}\ \mathrm{m}, \quad \mathbf{v} = (2,0,0)^{\mathsf{T}}\ \mathrm{m/s}$$

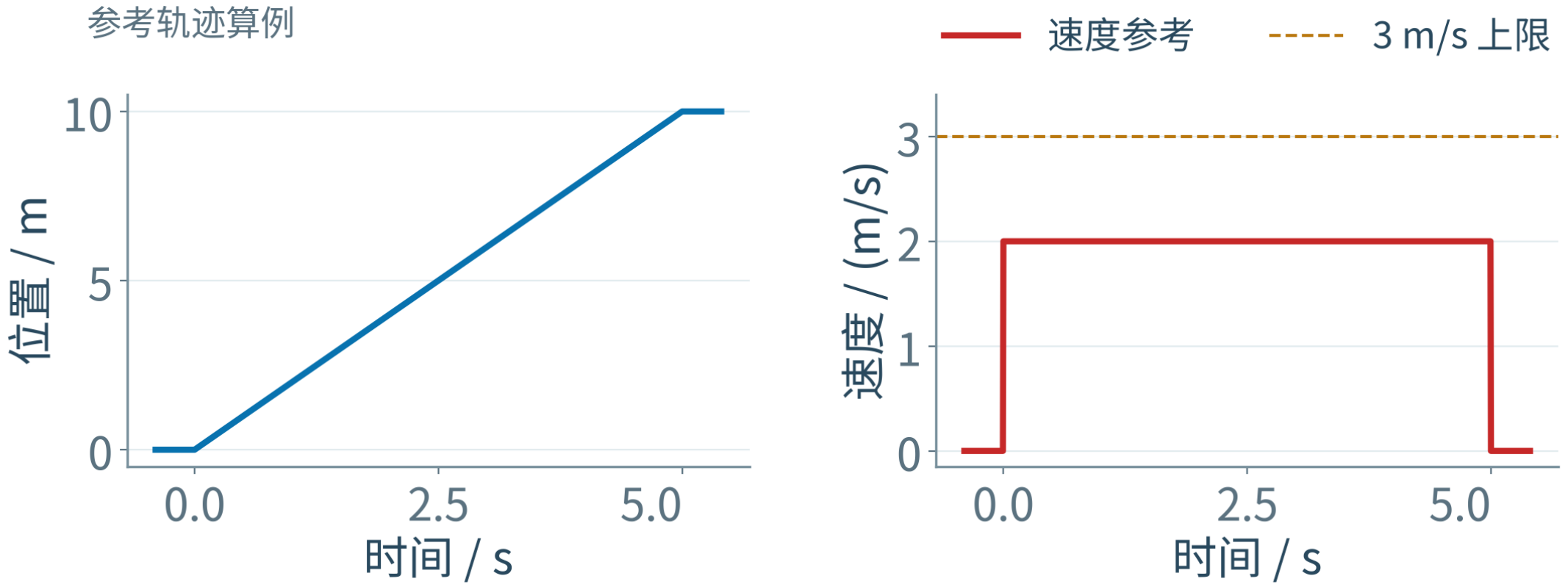
s为无量纲进度，T为总时长（s）；$\mathbf{r}$为路径，$\mathbf{p}$为位置参考（m）。

路径跟随：沿空间曲线运动，不要求某一时刻恰好经过指定点。

轨迹跟踪：在规定时刻跟上对应的位置及其运动状态。

6.3.1 规划目标与关键概念：完整参考结果

匀速段满足速度上限，起停处仍存在突变



图：匀速段2 m/s低于3 m/s上限；两端速度在0与2 m/s间跳变（竖线），有限加速度无法实现。

本章目录

轨迹规划建模与生成

第六章 外部控制与轨迹规划

6.1 外部控制基础与控制分层
6.2 外部控制原理与控制模式
6.3 轨迹规划建模与生成
6.4 轨迹规划算法与避障
6.5 轨迹跟踪原理与高机动控制
6.6 前沿技术与控制方法
6.7 平台框架与通信接口
6.8 外部控制例程与实验验证
6.9 习题与课堂讨论

本节 5 个教学单元

6.3.1 规划目标与关键概念
教材对应：第6.1.3.1、6.1.3.2节（可行与最优）

6.3.2 问题建模与目标函数
教材对应：第6.1.3.3节（建模与目标）

6.3.3 约束条件
教材对应：第6.1.3.3节（约束条件）

6.3.4 离散与基函数表示
教材对应：第6.1.3.3节（轨迹表示）

6.3.5 轨迹生成与求解
教材对应：第6.1.3.3、6.1.3.5节（流程第3步）

6.3.2 问题建模与目标函数：问题建模

位置与速度组成六维状态，加速度作为控制输入

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}(t) \\ \mathbf{v}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6, \quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{p}}$$

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{u} \quad (\mathbf{u} = \mathbf{a})$$

$\mathbf{u} = \mathbf{a}$ ➡ 积分 ➡ $\mathbf{v}$ ➡ 积分 ➡ $\mathbf{p}$

$$\mathbf{x}_i(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_i(t) \\ \mathbf{v}_i(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6, \quad i = 1, \ldots, N \qquad (6.1)$$

$\mathbf{p}, \mathbf{v}$：三维位置（m）与速度（m/s）；$\mathbf{u} = \mathbf{a}$：加速度控制量（m/s^2）。
六维状态$\mathbf{x}$由位置、速度组成；i为载具编号，N为载具总数。
姿态、角速度和执行器约束按任务扩展。

6.3.2 问题建模与目标函数：目标函数

目标函数比较代价，约束决定能否接受

$$J[\mathbf{p}] = \int_0^T \left(k_1 \|\dddot{\mathbf{p}}(t)\|^2 + k_2 \|\mathbf{u}(t)\|^2 \right) \mathrm{d}t$$

$$J^* = \min_{\{\mathbf{p}_i\}} \sum_{i=1}^{N} \int_0^T \left(k_1 \|\dddot{\mathbf{p}}_i\|^2 + k_2 \|\mathbf{u}_i\|^2 + \cdots \right) \mathrm{d}t \qquad (6.2)$$

平滑性项： $\dddot{\mathbf{p}}$是加加速度（Jerk），单位为$\mathrm{m/s^3}$。

权重与量纲： $k_1, k_2 > 0$；可先用参考尺度归一化。J^*即最小代价，教材式(6.2)记作J。

6.3.2 问题建模与目标函数：平滑性指标

Jerk与Snap分别惩罚不同阶的变化

量与单位	对应位置导数	平方积分指标
加加速度（Jerk）	$\mathbf{p}^{(3)}(t)$	$J_3 = \int_0^T \|\mathbf{p}^{(3)}\|^2 \, \mathrm{d}t$
单位： m/s^3	加速度的变化率	单段解：五次，6个端点条件
加加加速度（Snap）	$\mathbf{p}^{(4)}(t)$	$J_4 = \int_0^T \|\mathbf{p}^{(4)}\|^2 \, \mathrm{d}t$
单位： m/s^4	Jerk的变化率	单段解：七次，8个端点条件

时间、覆盖率、路径长度也可进入目标；指标应服务任务，并处理量纲和相互冲突。

6.3.2 问题建模与目标函数：一步计算

用一个三次候选算出一小段代价

$$x(t) = 0.08t^3, \quad 0 \le t \le 5\ \text{s}; \quad y = 0,\ z = -5$$

$$a_x(t) = 0.48t, \quad j_x(t) = 0.48$$

$$J = \int_0^5 \left[\left(\frac{j_x}{j_0} \right)^2 + \left(\frac{a_x}{a_0} \right)^2 \right] \mathrm{d}t$$

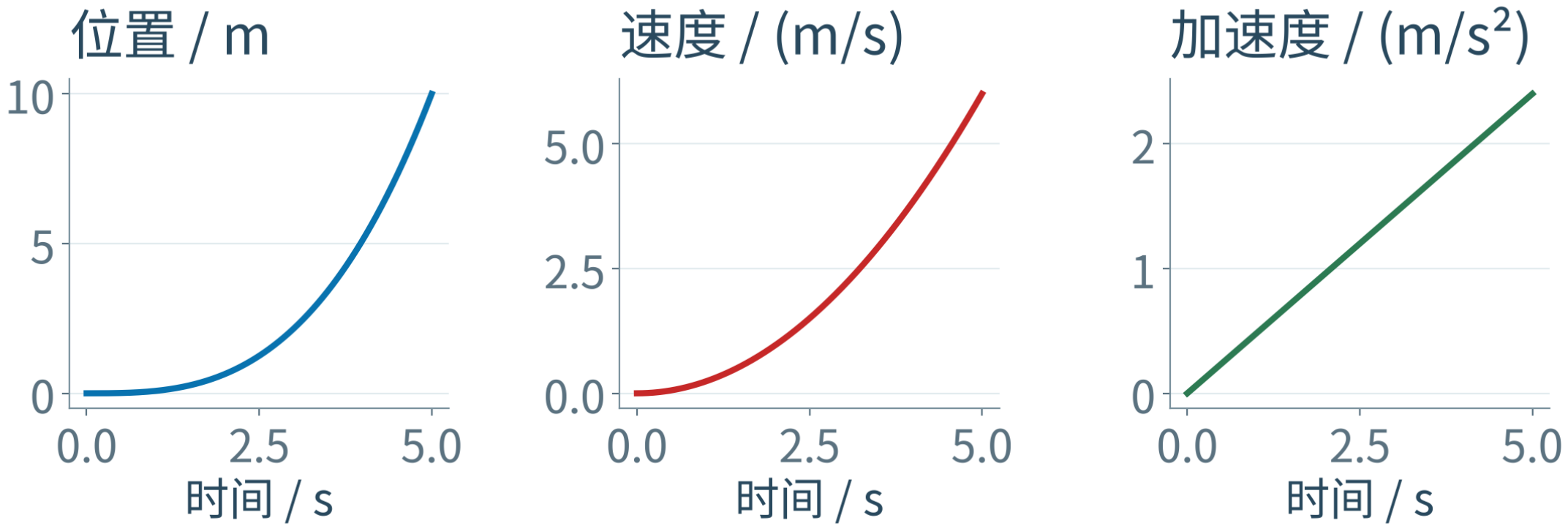
量纲：北向位置x（m），时间t（s）；a_x（m/s²），j_x（m/s³）。

参考尺度：$j_0 = 1\,\text{m/s}^3$, $a_0 = 1\,\text{m/s}^2$。在2 s处取0.1 s区间。

$$\Delta J \approx (0.48^2 + 0.96^2) \times 0.1 = 0.1152\ \text{s}$$

6.3.2 问题建模与目标函数：完整候选结果

完整积分得到代价，终点检查仍会淘汰候选



图：完整候选。$J = 1.152 + 9.6 = 10.752$ s；终端速度6 m/s，未满足停稳。

本章目录

轨迹规划建模与生成

第六章 外部控制与轨迹规划

6.1 外部控制基础与控制分层
6.2 外部控制原理与控制模式
6.3 轨迹规划建模与生成
6.4 轨迹规划算法与避障
6.5 轨迹跟踪原理与高机动控制
6.6 前沿技术与控制方法
6.7 平台框架与通信接口
6.8 外部控制例程与实验验证
6.9 习题与课堂讨论

本节 5 个教学单元

6.3.1 规划目标与关键概念
教材对应：第6.1.3.1、6.1.3.2节（可行与最优）

6.3.2 问题建模与目标函数
教材对应：第6.1.3.3节（建模与目标）

6.3.3 约束条件
教材对应：第6.1.3.3节（约束条件）

6.3.4 离散与基函数表示
教材对应：第6.1.3.3节（轨迹表示）

6.3.5 轨迹生成与求解
教材对应：第6.1.3.3、6.1.3.5节（流程第3步）

6.3.3 约束条件：边界条件

指定位置端点，还要指定怎样到达端点

$$\mathbf{p}_i(0) = \mathbf{p}_i^{\text{start}}, \quad \mathbf{p}_i(T) = \mathbf{p}_i^{\text{goal}} \qquad (6.3)$$

北向条件	起点	终点
位置	$x(0) = 0\ \text{m}$	$x(T) = 10\ \text{m}$
速度	$\dot{x}(0) = 0$	$\dot{x}(T) = 0$
加速度	$\ddot{x}(0) = 0$	$\ddot{x}(T) = 0$

“经过目标点”和“在目标点停稳”是两组不同的边界条件。

6.3.3 约束条件：运动上限

完成时间同时改变速度、加速度与Jerk

$$\|\dot{\mathbf{p}}_i(t)\| \le v_{\max}, \quad \|\ddot{\mathbf{p}}_i(t)\| \le a_{\max} \qquad (6.5)$$

$$\tau = \frac{t}{T}, \quad \mathbf{p}(t) = \mathbf{r}(\tau), \quad 0 \le \tau \le 1$$

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{r}'}{T}, \quad \mathbf{a} = \frac{\mathbf{r}''}{T^2}, \quad \mathbf{j} = \frac{\mathbf{r}'''}{T^3}$$

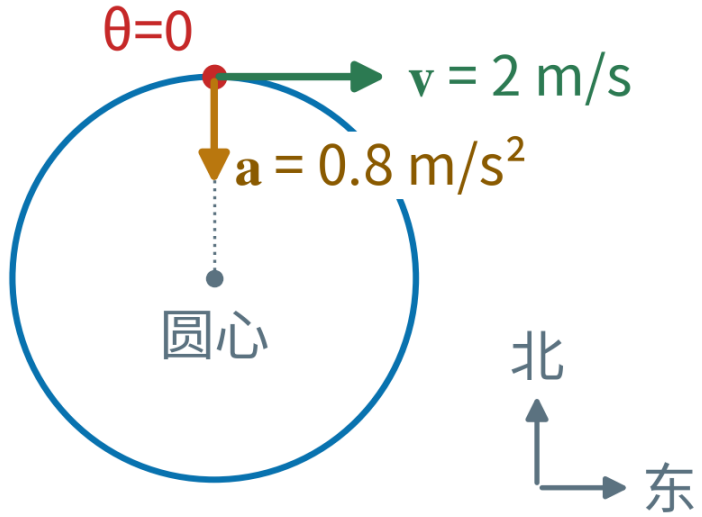
点表示对时间t求导，撇表示对归一化时间τ求导；$\|\cdot\|$表示向量模长。
本例限速3 m/s、限加速度2 m/s²，需检查整个时间区间。
同一曲线T加倍：速度、加速度、Jerk峰值分别降为1/2、1/4、1/8。

6.3.3 约束条件：圆轨迹建模

圆轨迹的速度沿切线，加速度指向圆心

$$\theta = \omega t, \quad \mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} R\cos\theta \\ R\sin\theta \\ -5 \end{bmatrix}, \quad R = 5\ \mathrm{m}$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -R\omega\sin\theta \\ R\omega\cos\theta \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} -R\omega^2\cos\theta \\ -R\omega^2\sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$



匀速绕圆段：取$\omega = 0.4\ \mathrm{rad/s}$为恒定角速度，角度自北向东计。

$$\mathbf{v}(0) = (0,2,0)^{\mathrm{T}}\ \mathrm{m/s}, \quad \mathbf{a}(0) = (-0.8,0,0)^{\mathrm{T}}\ \mathrm{m/s^2}$$

起停过渡还会产生切向加速度，需另检查运动上限。

6.3.3 约束条件：圆轨迹约束计算

半径固定后，角速度受两类上限共同限制

$$v = R|\omega|, \quad a = R\omega^2$$

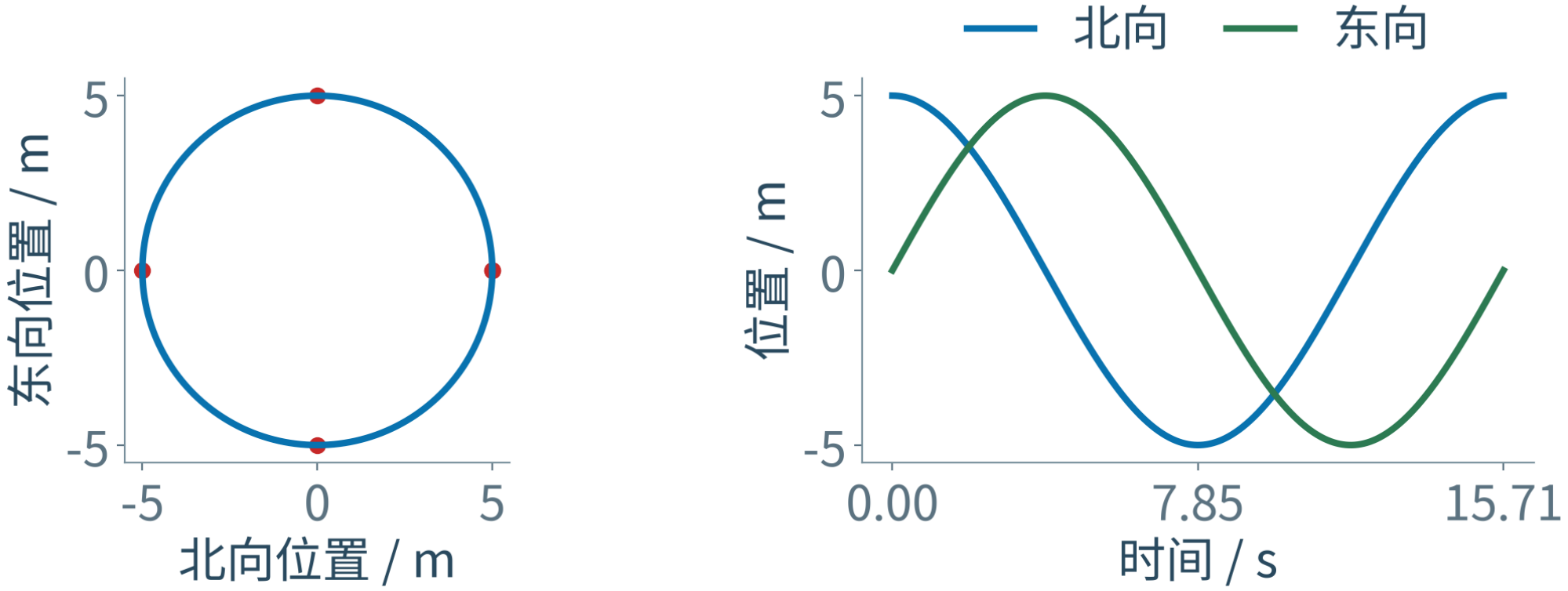
$$|\omega| \le \min\left(\frac{v_{\max}}{R}, \sqrt{\frac{a_{\max}}{R}}\right) = \min(0.6, \sqrt{0.4}) = 0.6\ \text{rad/s}$$

$$T_{\text{lap}} = \frac{2\pi}{|\omega|} \ge 10.472\ \text{s}$$

角速度	速度	加速度	区间判断
0.4 rad/s	2 m/s	0.8 m/s²	满足两个上限
0.8 rad/s	4 m/s	3.2 m/s²	两个上限均超出

6.3.3 约束条件：圆轨迹完整结果

一周的空间曲线和时间曲线要同时闭合



图：红点为每1/4圈位置，起点(5,0)先转向东；一周15.708 s，速度2 m/s、加速度0.8 m/s²。

6.3.3 约束条件：转弯与非完整约束

运动约束还取决于载具类型

$$a_{\mathrm{n}} = v^2\kappa = \frac{v^2}{R}, \quad R \geq R_{\min}$$

a_n：法向加速度（$\mathrm{m/s^2}$）
$\kappa = 1/R$：曲率（$1/\mathrm{m}$）
$R_{\min}$：最小转弯半径（m）

多旋翼	理想轮式车	固定翼
运动条件	运动条件	运动条件
推力、倾角、爬升能力	$-\dot{x}\sin\psi + \dot{y}\cos\psi = 0$	空速下限、转弯半径、爬升角
轨迹影响	轨迹影响	轨迹影响
可悬停，但加速度有界	无侧滑：速度沿车体朝向 ψ为航向角，自北向东计	不能用停稳折返代替转弯

非完整约束：限制速度方向、不能积分成位置约束，如轮式车的无侧滑条件。

6.3.3 约束条件：防碰撞约束

多机安全间隔约束通常是非凸的

$$\|\mathbf{p}_i(t) - \mathbf{p}_j(t)\| \geq d_{\min}, \quad i \neq j, \quad t \in [0, T] \qquad (6.4)$$

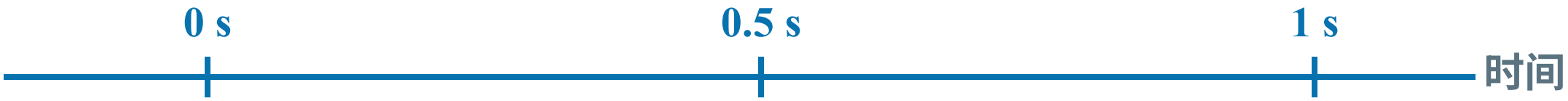
一维相对位置	与2 m安全间隔比较	是否可行
+2 m	距离2 m	是
−2 m	距离2 m	是
两者平均：0 m	距离0 m	否

凸集：任意两点连线上的点仍在集合内；两点的平均是一种凸组合。
表中两点平均后离开可行集合，所以该约束非凸；求解后须复查原约束。

6.3.3 约束条件：连续区间复查

只检查采样时刻，可能漏掉中间碰撞

$$p_1(t) = -1 + 2t, \quad p_2(t) = 1 - 2t, \quad 0 \le t \le 1$$



0 s	0.5 s	1 s
两机位置：−1，+1 m 间距：2 m **端点安全**	两机位置：0，0 m 间距：0 m **段内碰撞**	两机位置：+1，−1 m 间距：2 m **端点安全**

离散节点通过检查，仍需验证节点之间的运动与安全约束。

本章目录

轨迹规划建模与生成

第六章 外部控制与轨迹规划

6.1 外部控制基础与控制分层
6.2 外部控制原理与控制模式
6.3 轨迹规划建模与生成
6.4 轨迹规划算法与避障
6.5 轨迹跟踪原理与高机动控制
6.6 前沿技术与控制方法
6.7 平台框架与通信接口
6.8 外部控制例程与实验验证
6.9 习题与课堂讨论

本节 5 个教学单元

6.3.1 规划目标与关键概念
教材对应：第6.1.3.1、6.1.3.2节（可行与最优）

6.3.2 问题建模与目标函数
教材对应：第6.1.3.3节（建模与目标）

6.3.3 约束条件
教材对应：第6.1.3.3节（约束条件）

6.3.4 离散与基函数表示
教材对应：第6.1.3.3节（轨迹表示）

6.3.5 轨迹生成与求解
教材对应：第6.1.3.3、6.1.3.5节（流程第3步）

6.3.4 离散与基函数表示：轨迹离散化

离散方法优化节点，差分联系相邻运动状态

$$\{t_k, \mathbf{p}_1(t_k), \dots, \mathbf{p}_N(t_k)\}_{k=0}^{K} \qquad (6.6)$$

K为区间数，共$K+1$个节点；对单机记$\mathbf{p}_k = \mathbf{p}(t_k)$，等间隔$\Delta t = t_{k+1} - t_k$。

$$\mathbf{v}_k \approx \frac{\mathbf{p}_{k+1} - \mathbf{p}_k}{\Delta t}, \quad \mathbf{a}_k \approx \frac{\mathbf{p}_{k+1} - 2\mathbf{p}_k + \mathbf{p}_{k-1}}{\Delta t^2}$$

例：相邻位置为0、0.1、0.4 m，采样间隔0.1 s；两个区间速度分别为1、3 m/s。

$$a_1 \approx \frac{0.4 - 2 \times 0.1 + 0}{0.1^2} = 20\ \mathrm{m/s^2}$$

结论：相邻点只差0.1 m和0.3 m，加速度却达20 m/s²，远超2 m/s²上限。

6.3.4 离散与基函数表示：基函数表示

基函数方法直接优化轨迹的系数

$$\mathbf{p}_i(t) = \sum_{j=0}^{M} \phi_j(t)\mathbf{A}_{i,j} = \mathbf{A}_i\boldsymbol{\Phi}(t) \qquad (6.7)$$

$$\mathbf{A}_{i,j} = \begin{bmatrix} \alpha_{i,j} \\ \beta_{i,j} \\ \gamma_{i,j} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{3\times(M+1)}$$

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = [\phi_0(t), \dots, \phi_M(t)]^{\mathsf{T}}$$

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{A}_i\dot{\boldsymbol{\Phi}}, \quad \mathbf{a}_i = \mathbf{A}_i\ddot{\boldsymbol{\Phi}}$$

ϕ_j为第j个已选基函数，共$M+1$个；$\boldsymbol{\Phi}$为基函数列向量。
$\mathbf{A}_i$为第i架载具的待求系数矩阵；每列$\mathbf{A}_{i,j}$含北、东、地三个系数。
求出系数后，便可计算任意时刻的位置、速度和加速度。

6.3.4 离散与基函数表示：基函数类型

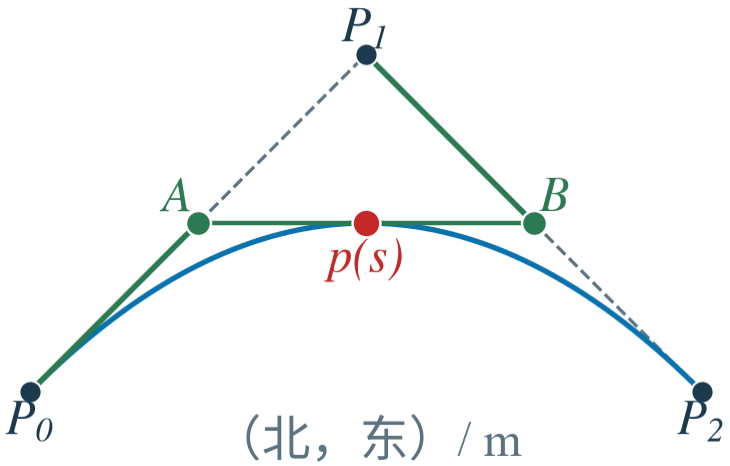
基函数的选择改变表达能力与约束写法

基函数族	主要参数	适用性质与检查重点
多项式	各次幂的系数	解析求导；关注尺度与段间连续性
贝塞尔曲线	控制点与次数	形状直观；控制点通常不是途经点
B样条	控制点、次数 节点向量	局部支撑：控制点只影响邻近一段 节点重复会降低连续性
傅里叶基函数	正弦、余弦系数	周期表达；核对周期边界
径向基函数（RBF）	中心、宽度和权重	按距中心的远近构造形状

6.3.4 离散与基函数表示：控制点算例

贝塞尔控制点牵引曲线，通常不被曲线经过

$$\mathbf{p}(s) = (1-s)^2\mathbf{P}_0 + 2s(1-s)\mathbf{P}_1 + s^2\mathbf{P}_2$$



参数 $s = 0.50$

一次插值

$A = (2.5, 2.5)$

$B = (7.5, 2.5)$

二次插值

$p = (5.0, 2.5)$

三个控制点：

$\mathbf{P}_0 = (0,0)$

$\mathbf{P}_1 = (5,5)$

$\mathbf{P}_2 = (10,0)$

图：虚线为控制多边形；曲线落在控制点凸包内，凸包整体避障即可保证曲线安全。

$$\mathbf{p}(0.5) = \frac{1}{4}(0,0) + \frac{1}{2}(5,5) + \frac{1}{4}(10,0) = (5,2.5)$$

6.3.4 离散与基函数表示：多项式基函数

七次多项式有八个系数，长时间宜归一化

$$x_i(t) = \alpha_{i,0} + \alpha_{i,1}t + \cdots + \alpha_{i,6}t^6 + \alpha_{i,7}t^7 \qquad (6.8)$$

$$\tau = \frac{t - t_0}{T}, \quad x_i(t) = \sum_{j=0}^{7} c_{i,j}\tau^j, \quad 0 \le \tau \le 1$$

$$30^7 = 2.187 \times 10^{10}, \quad 0 \le \tau^7 \le 1$$

t_0为段起时刻，T为段时长（s）；$c_{i,j}$是归一化后的系数（m）。
原系数$\alpha_{i,j}$的单位为$\mathrm{m/s}^j$；量级算例取段长30 s。
选七次：最小Snap单段解为七次，8个系数由两端位置、速度、加速度与Jerk确定。

6.3.4 离散与基函数表示：变量数量

同一任务下，离散节点数远多于基函数系数

表示与计数口径	原始标量数	固定两端位置后
30个区间，31个节点	$10 \times 31 \times 3 = 930$	$930 - 60 = 870$
明确采用30个节点	$10 \times 30 \times 3 = 900$	$900 - 60 = 840$
每轴单段七次多项式	$10 \times 8 \times 3 = 240$	$240 - 60 = 180$

例：10架载具、三维位置、固定时间；仅计位置节点或系数。
端点约束可保留或消元，原始标量数与消元后变量数不可混用。

本章目录

轨迹规划建模与生成

第六章 外部控制与轨迹规划

6.1 外部控制基础与控制分层
6.2 外部控制原理与控制模式
6.3 轨迹规划建模与生成
6.4 轨迹规划算法与避障
6.5 轨迹跟踪原理与高机动控制
6.6 前沿技术与控制方法
6.7 平台框架与通信接口
6.8 外部控制例程与实验验证
6.9 习题与课堂讨论

本节 5 个教学单元

6.3.1 规划目标与关键概念
教材对应：第6.1.3.1、6.1.3.2节（可行与最优）

6.3.2 问题建模与目标函数
教材对应：第6.1.3.3节（建模与目标）

6.3.3 约束条件
教材对应：第6.1.3.3节（约束条件）

6.3.4 离散与基函数表示
教材对应：第6.1.3.3节（轨迹表示）

6.3.5 轨迹生成与求解
教材对应：第6.1.3.3、6.1.3.5节（流程第3步）

6.3.5 轨迹生成与求解：五次时间化推导

六个端点条件唯一确定单段五次曲线

$$x(t) = 10q(\tau), \quad q(\tau) = \sum_{j=0}^{5} c_j \tau^j, \quad \tau = t/T$$

$$q(0) = q'(0) = q''(0) = 0$$

$$q(1) = 1, \quad q'(1) = q''(1) = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 12 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$c_0 = c_1 = c_2 = 0, \quad (c_3, c_4, c_5) = (10, -15, 6)$$

$$q(\tau) = 10\tau^3 - 15\tau^4 + 6\tau^5$$

q为归一化位移，c_j为其系数，均无量纲；x以m计，T以s计。

最优性：固定T与两端位置、速度、加速度时，这条五次曲线的Jerk平方积分最小。

6.3.5 轨迹生成与求解：五次轨迹一步计算

由同一个多项式同时求出位置、速度和加速度

$$q = 10\tau^3 - 15\tau^4 + 6\tau^5, \quad x = 10q$$

$$q' = 30\tau^2(1-\tau)^2, \quad v_x = \frac{10}{T}q'$$

$$q'' = 60\tau - 180\tau^2 + 120\tau^3, \quad a_x = \frac{10}{T^2}q''$$

代入$T = 5\ \mathrm{s},\ t = 1.25\ \mathrm{s},\ \tau = 0.25$：

$$x = 1.03515625\ \mathrm{m}, \quad v_x = 2.109375\ \mathrm{m/s}, \quad a_x = 2.25\ \mathrm{m/s^2}$$

6.3.5 轨迹生成与求解：时间选择

解析峰值给出这条五次曲线的时间下限

$$v_{\text{peak}} = \frac{1.875D}{T}, \quad a_{\text{peak}} = \frac{10D}{\sqrt{3}\,T^2}, \quad D = 10\ \text{m}$$

来历： $q'(0.5) = 1.875$；$q''' = 0$时$\tau = (3 \pm \sqrt{3})/6$，$|q''|_{\max} = 10/\sqrt{3} \approx 5.774$。

$$T \geq \max\left(\frac{1.875D}{v_{\max}}, \sqrt{\frac{10D}{\sqrt{3}\,a_{\max}}}\right)$$

$$T \geq \max(6.25, 5.373)\ \text{s} = 6.25\ \text{s}$$

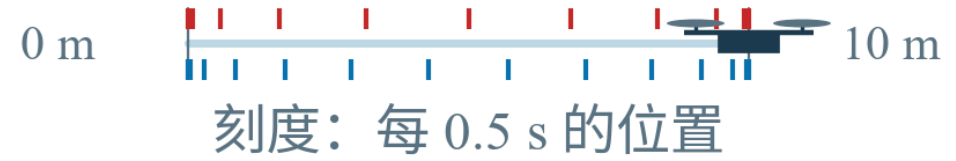
取6.5 s：峰值速度2.885 m/s，峰值加速度1.367 m/s²，满足给定运动上限。

代价对比： 此轨迹$J \approx 12.45$ s，高于不可行三次候选的10.75 s；先筛约束再比代价。

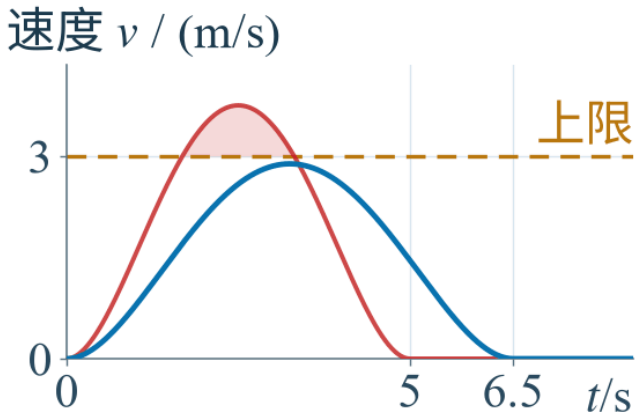
6.3.5 轨迹生成与求解：时间缩放过程

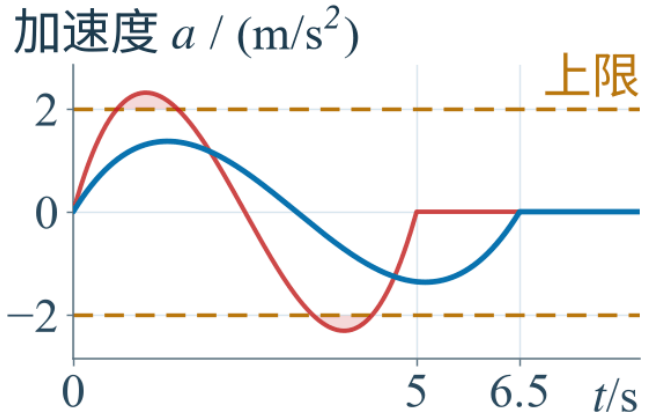
拉长完成时间：路径不变，速度和加速度峰值下降

时间下限 $T \geq \max(6.25, 5.373)$ s，取 6.5 s



T	5	→ 6.5 s
v_{peak}	3.75	→ 2.885
a_{peak}	2.309	→ 1.367





图：同一路径由5 s拉长到6.5 s的动画（数值来自解析计算）

路径不变：两次都从0 m到10 m并在终点停稳，变的只是各时刻的位置。

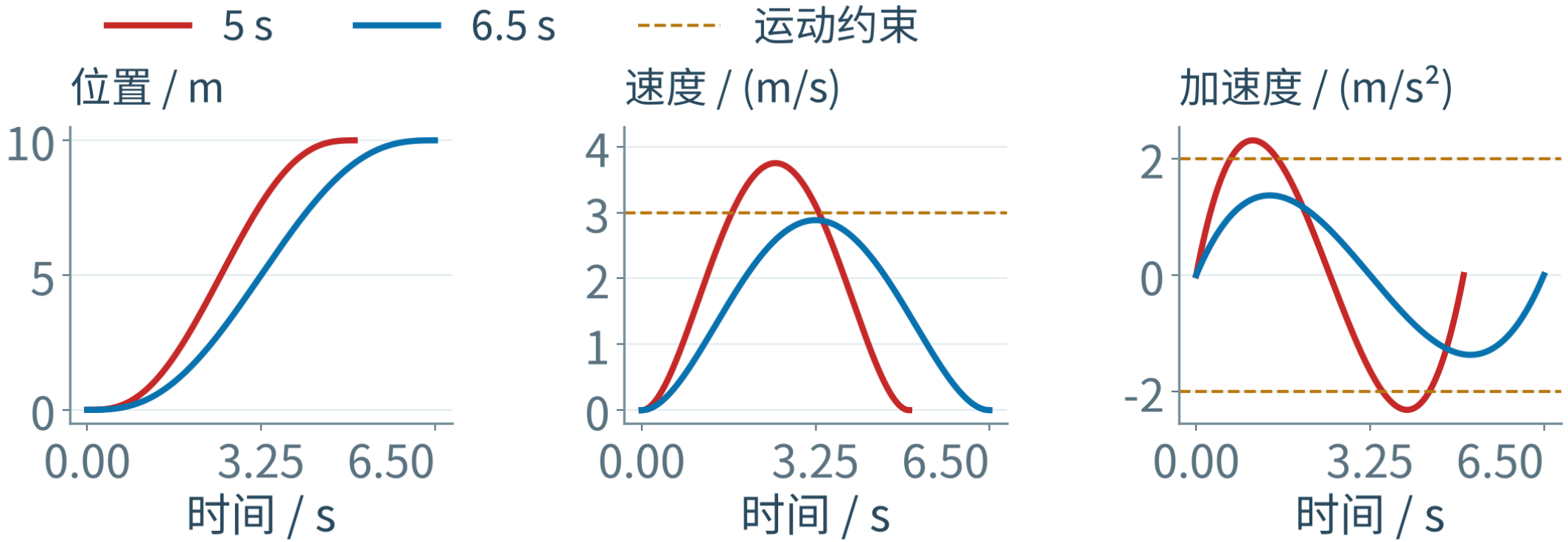
峰值缩放：速度峰值与T成反比，加速度峰值与T^2成反比。

时间下限：加速度5.373 s即达标，速度需6.25 s；取6.5 s留出裕量。

6.3.5 轨迹生成与求解：完整五次轨迹结果

同一路径延长到6.5 s后通过两项运动上限

五次参考轨迹算例



图：红线5 s，蓝线6.5 s；橙色虚线为3 m/s、2 m/s²上限。蓝线峰值2.885 m/s、1.367 m/s²。

6.3.5 轨迹生成与求解：分段生成

多点轨迹需要同时规定段内函数和连接条件

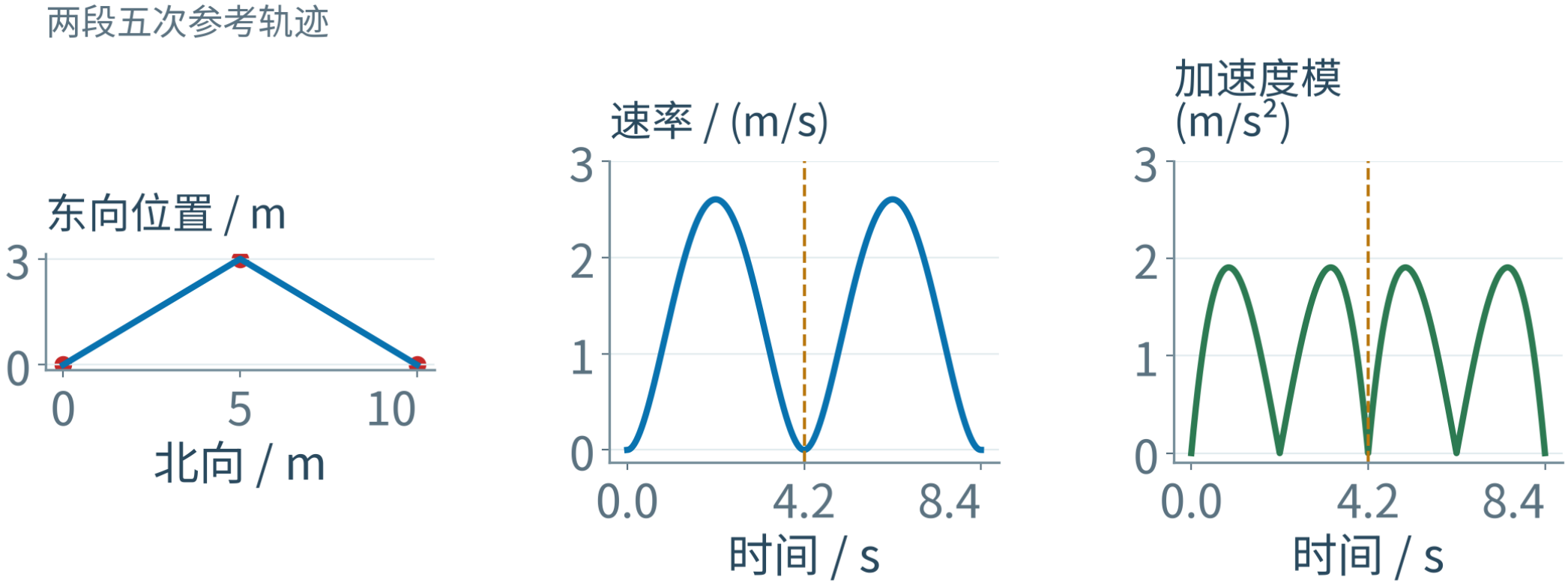
航点	位置（北，东）/ m	通过时刻	通过条件
起点	(0，0)	0 s	静止
中间点	(5，3)	4.2 s	停稳后再出发
终点	(10，0)	8.4 s	静止

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{P}_\ell + (\mathbf{P}_{\ell+1} - \mathbf{P}_\ell)\, q\left(\frac{t - t_\ell}{4.2}\right)$$

$\ell = 0,1$为段号；$t_0 = 0\,\mathrm{s}, \quad t_1 = 4.2\,\mathrm{s}$为各段起时刻。
$\mathbf{P}_\ell$为三维航点，垂直坐标均为-5 m；段间位置、速度、加速度连续。
段长$\sqrt{34} \approx 5.83$ m，按时间下限公式得$T \geq 4.10$ s，取4.2 s。

6.3.5 轨迹生成与求解：多点完整结果

加入中间点后，检查停稳时刻与每段峰值



图：中间点4.2 s停稳；峰值速度2.603 m/s、峰值加速度1.908 m/s²。

6.3.5 轨迹生成与求解：求解与复查

固定时间与基函数后，平滑生成常可写成凸二次规划

$$\min_{\mathbf{c}} \ \frac{1}{2}\mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{H}\mathbf{c} + \mathbf{f}^{\mathsf{T}}\mathbf{c}, \quad \mathbf{H} \succeq 0 \qquad\qquad \mathbf{l} \le \mathbf{A}\mathbf{c} \le \mathbf{u}$$

$\mathbf{c}$为待求轨迹系数；$\mathbf{H}, \mathbf{f}$为已知的二次项矩阵和一次项系数。
$\mathbf{A}$为线性约束矩阵，$\mathbf{l}, \mathbf{u}$为下界与上界；$\mathbf{H} \succeq 0$表示半正定（目标为凸）。
这里的$\mathbf{u}$是约束上界，与双积分模型中的控制量不同。

时间与基函数 → **构造并求解** → **连续约束复查** → **输出运动参考**

二次规划（QP）：目标是系数的二次函数，约束为线性；可用OSQP等求解器。
速度模长上界是凸约束但非线性，多机距离下界非凸，两者都须另作处理。
全局可先离散搜索，再用局部基函数时间化和平滑。
最终输出位置、速度和加速度（PVA）。

6.3.5 轨迹生成与求解：例程阅读

安装版直线例程把插值参数逐点送给接口

入口：[安装目录]/RflySimAPIs/6.RflySimExtCtrl/
2.AdvExps/e4.TrajPlanExps/1.LineTrajMotion/LineWPCtrl.py

```
start = (0, 0, -10); end = (20, 15, -10); num_points = 100
for i in range(num_points):
    t = i / (num_points - 1)
    x = start[0] + (end[0] - start[0]) * t
    mav.SendPosNED(x, y, z, yaw)
    time.sleep(0.033)
```

$$i = 33: \quad s = \frac{33}{99} = \frac{1}{3}, \quad \mathbf{p} = (6.667, 5, -10)^{\mathsf{T}}\ \mathrm{m}$$

t为0到1的插值参数；100点间隔0.033 s，约3.3 s走完25 m（名义约7.6 m/s）。
起停速度跳变，与本节线性参考同类；运行见课件6.8.2「例程运行与判据」。

6.3.5 轨迹生成与求解：例程导数核对

圆例程默认direction=−1时，北向速度与位置导数不符

目录：[安装目录]/RflySimAPIs/6.RflySimExtCtrl/2.AdvExps/e4.TrajPlanExps/3.CirularTrajMotion/
入口：UAVCtrl.py（圆形轨迹例程源码）

一致形式：d对应direction，ω为角速度（rad/s），t为经过时间（s）。

$$\theta = d\omega t, \quad d \in \{-1, +1\}, \quad x = R\cos\theta, \quad y = R\sin\theta$$

$$v_x = -Rd\omega\sin\theta, \quad v_y = Rd\omega\cos\theta$$

源码默认：$d = -1$, $R = 6\,\mathrm{m}$, $\omega = 0.4\,\mathrm{rad/s}$。
当angle = $\pi/2$，打印位置的北向导数为-2.4 m/s，发送值却为+2.4 m/s。

源码要点： angle = ω*elapsed；vx = -R*ω*sin(angle)*direction；打印x = R*cos(angle)

方向、源码与积分反例见课件6.5「圆形轨迹」「例程阅读」「源码反例」页；运行判据见课件6.8.2「预期与排查」页。

课堂练习

用新数据检查变量数、运动上限与区间安全

问题	参考要点
20架三维载具，50个时间区间，位置标量共多少？	51个节点：20×51×3=3060；固定两端位置后剩3060−120=2940。
半径2 m的圆，限速3 m/s、限加速度2 m/s²，角速度最大取多少？	按速度1.5 rad/s，按加速度1.0 rad/s；取1.0 rad/s，这次加速度约束起作用。
15 m五次起停轨迹要求6 s完成，是否满足上限？最短需多久？	峰值4.69 m/s、2.41 m/s²，均超限；按时间下限公式至少需9.375 s。
两机1 s内匀速沿北、东两轴穿过原点，起止距原点2 m。间隔须≥2 m，只查起止两刻够吗？	不够：起止间距2.83 m，但0.5 s时两机同在原点，间距为0；须检查连续区间。

本节小结

轨迹生成的结果是一组经过检查的时间函数

建模：位置、时间、边界状态、运动能力和环境要求共同定义问题。

求解：先明确优化节点还是系数，核对变量数量与约束类型。

核验：检查全时域端点、导数峰值、连续性和安全间隔，再输出PVA。

易错点：可行不代表最优，平滑不代表满足上限，参考不代表实际轨迹；K个区间有K+1个节点，节点安全还须查区间。

轨迹建模给出可计算的参考；规划求解和闭环执行仍各有任务。