本章目录

控制器设计与控制分配

第五章 滤波估计与底层控制

5.1 滤波估计与底层控制基础

5.2 传感器标定与滤波估计

5.3 控制器设计与控制分配

5.4 控制性能评估与调优

5.5 PX4架构与控制开发接口

5.6 底层控制开发与实验验证

5.7 其他机型与进阶控制案例

5.8 习题与课堂讨论

本节 4 个教学单元

5.3.1 PID控制器

教材对应：第5.1.3.1节

5.3.2 饱和PID控制器

教材对应：第5.1.3.1节

5.3.3 底层控制架构与控制器类型

教材对应：第5.1.2.4、5.1.3.1节

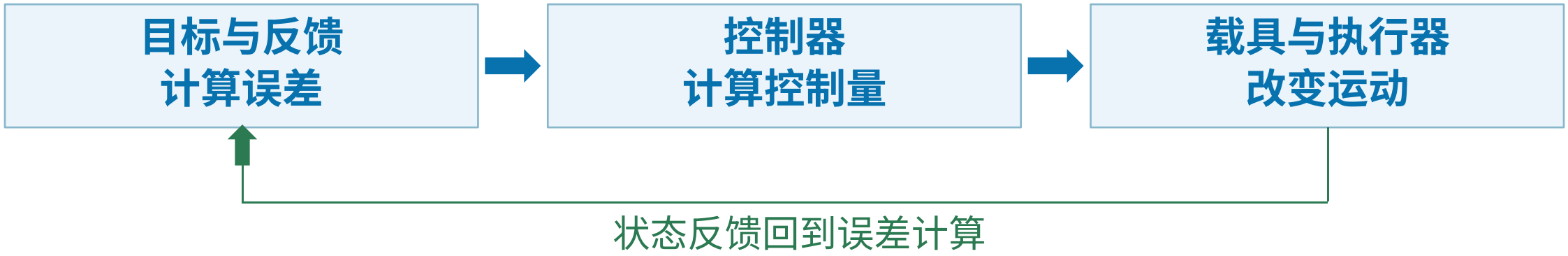
5.3.4 执行器控制分配求解

教材对应：第5.1.5节

5.3.1 PID控制器：目标与误差

目标与反馈共同决定控制量

比例、积分、微分（PID）控制器使用误差及其历史。先假设反馈准确，只看控制律。



$$e = r - \hat{y}, \qquad u = \mathcal{C}(e)$$

r 是目标，$\hat{y}$ 是反馈估计，e 是误差，u 是控制量。控制量的单位由接口决定。

5.3.1 PID控制器：PID组成

三项分别使用误差的不同时间信息

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau)\,\mathrm{d}\tau + K_d \frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}$$

式5.1

项	使用的信息	作用与代价
比例P	当前误差	立即纠偏，过大增益可能振荡
积分I	随时间累计的误差	积分补偿恒定偏差；需防积分饱和
微分D	误差的变化率	提供阻尼或趋势信息，噪声会被放大

微分由已有信号估算当前变化率；三项相加前须换算到同一输出单位。

5.3.1 PID控制器：增益单位

误差单位和输出单位决定增益单位

计算项	输入单位	若输出是力，增益单位
比例	e: m	K_p: N/m
积分	$\int e\,\mathrm{d}t$: m s	K_i: N/(m s)
微分	$\dot{e}$: m/s	K_d: N s/m

姿态误差采用rad、输出采用N·m时，增益的单位会随之改变。
归一化算例的数值用于读懂计算；实机参数按实际误差与输出单位整定。

5.3.1 PID控制器：离散PID

每一步积分都要包含采样时间

$$J_k = J_{k-1} + e_k \Delta t, \quad D_k = \frac{e_k - e_{k-1}}{\Delta t}, \quad u_k = K_p e_k + K_i J_k + K_d D_k$$

J为原始误差积分（本例单位s）；$I = K_i J$为加权积分贡献（与输出同单位）。

归一化教学例：$e_k = 0.20$，$e_{k-1} = 0.24$，$\Delta t = 0.1\ \mathrm{s}$，$J_{k-1} = 0.08\ \mathrm{s}$。

增益：$K_p = 2$，$K_i = 0.5\ \mathrm{s}^{-1}$，$K_d = 0.1\ \mathrm{s}$。

$$J_k = 0.08 + 0.20 \times 0.1 = 0.10\ \mathrm{s}, \quad D_k = (0.20 - 0.24)/0.1 = -0.40\ \mathrm{s}^{-1}$$

$$u_k = 2 \times 0.20 + 0.5 \times 0.10 + 0.1 \times (-0.40) = 0.40 + 0.05 - 0.04 = 0.41$$

5.3.1 PID控制器：微分实现

差分会把测量噪声放大成控制波动

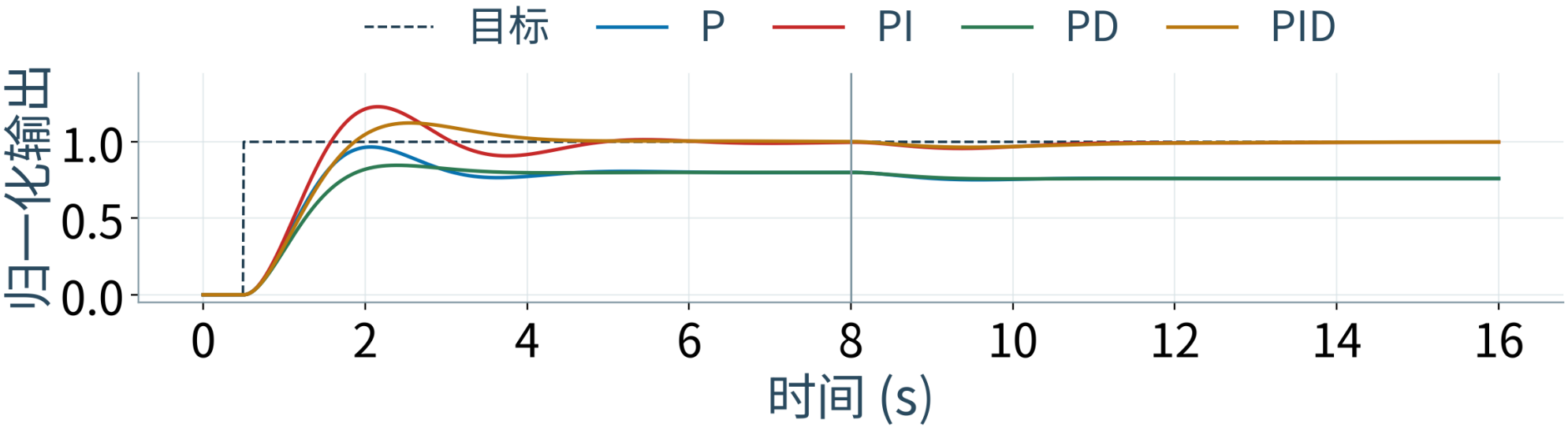
归一化静止读数：$0.010 \rightarrow -0.010$；$\Delta t = 0.01\ \mathrm{s}$，$K_d = 0.1\ \mathrm{s}$。
采用测量微分 $u_D = -K_d \dot{y}$，真实变化率为零。

$$\dot{y}_k = \frac{-0.010 - 0.010}{0.01} = -2.0\ \mathrm{s}^{-1} \qquad u_D = -0.1 \times (-2) = +0.20$$

实现	输入与结果	注意条件
滤波微分	对差分结果低通	减少噪声，也引入相位滞后
测量微分	只对反馈求导 $-\dot{y}$	目标阶跃不进入D项，无微分冲击
角速度反馈	相应姿态通道用陀螺观测	一般体轴角速度与欧拉角导数不同

5.3.1 PID控制器：响应比较

同一对象上的四种响应有什么差别



图：独立二阶教学对象的P、PI、PD、PID响应

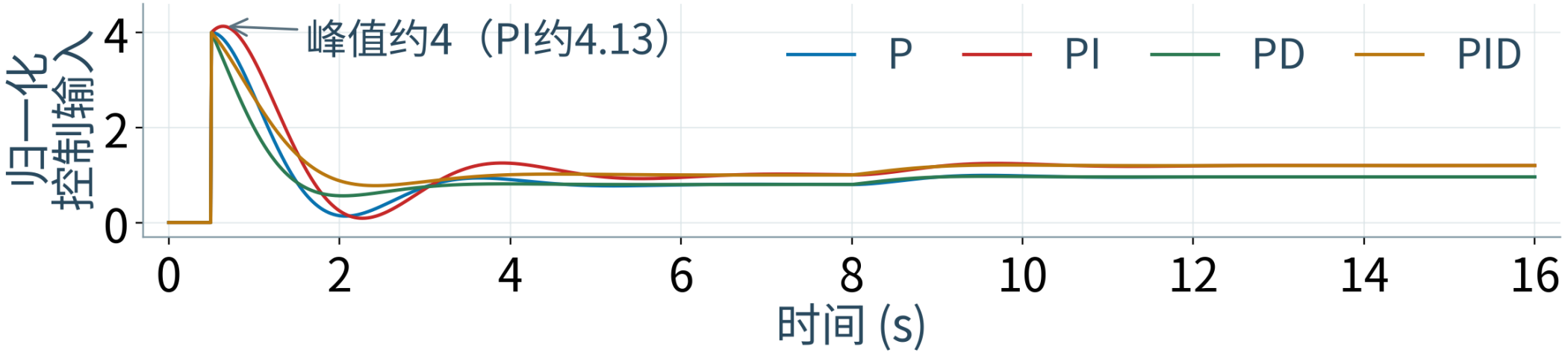
归一化对象 $\ddot{y} + 2\dot{y} + y = u + d$，零初值。　　测量微分 $u_D = -K_d\dot{y}$

0.5 s目标由0变为1；8 s输入端加 $d = -0.2$；四阶龙格–库塔（RK4）步长0.01 s。

增益 (K_p, K_i, K_d)：P(4,0,0)；PI(4,2,0)；PD(4,0,1)；PID(4,2,1)（K_i：s^{-1}，K_d：s）。

5.3.1 PID控制器：控制输入与结果

跟踪曲线还要配合控制量一起看



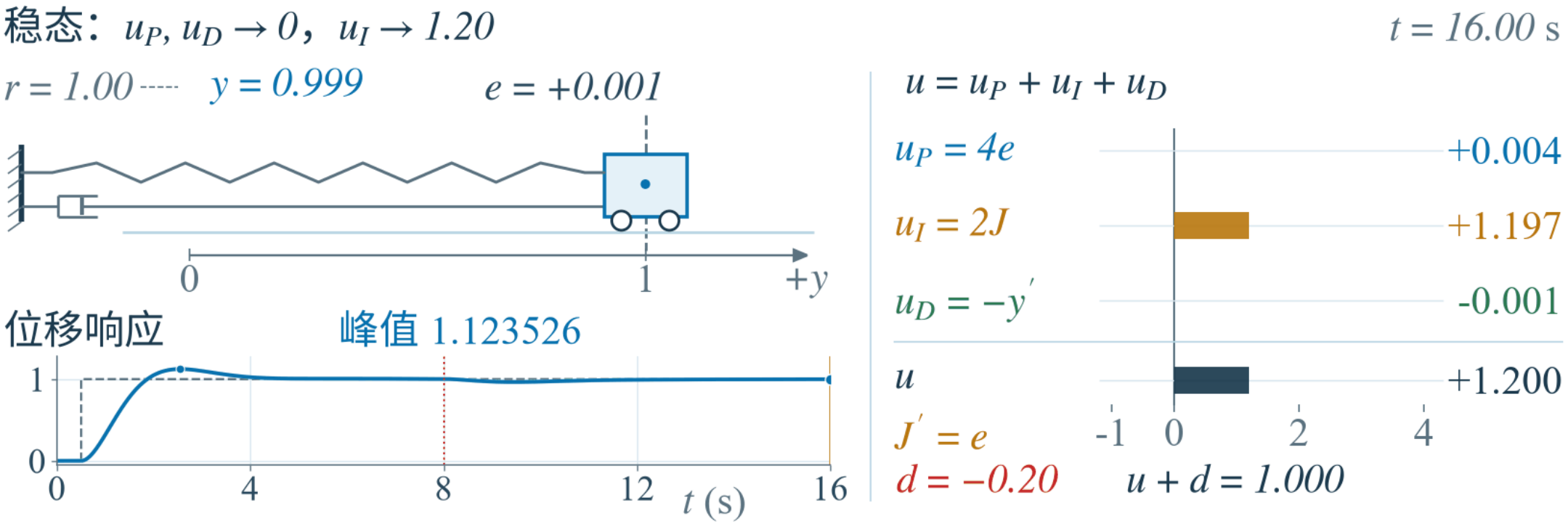
图：同一计算的控制输入，无输出限幅

方法	P	PI	PD	PID
16 s响应	0.7600	0.9986	0.7600	0.9991
响应峰值	0.9663	1.2296	0.8467	1.1235

结论：P、PD稳态偏差约0.24；PI、PID靠积分补到约1，本例PID峰值较低；输入峰值约4。

5.3.1 PID控制器：三项贡献与运动响应

P、I、D怎样在同一时刻合成控制量



图：同一二阶对象中P、I、D的同步贡献（归一化量，无限幅）

观察：P随误差变化，D抑制快速运动；扰动后，I维持所需补偿。

课堂练习

换一组数据，再算一步离散PID

题目： 用离散PID递推式（误差差分形式）计算一步归一化输出。

数据： $e_k = 0.30$，$e_{k-1} = 0.20$，$\Delta t = 0.05\ \mathrm{s}$，$J_{k-1} = 0.10\ \mathrm{s}$。

增益： $K_p = 1.5$，$K_i = 0.8\ \mathrm{s^{-1}}$，$K_d = 0.05\ \mathrm{s}$。

（1）求 J_k、D_k、u_k；（2）目标不变时改用测量微分，D项是否改变？

参考要点

$$J_k = 0.10 + 0.30 \times 0.05 = 0.115\,\mathrm{s}, \quad D_k = \frac{0.30 - 0.20}{0.05} = 2.0\,\mathrm{s^{-1}}$$

$$u_k = 1.5 \times 0.30 + 0.8 \times 0.115 + 0.05 \times 2.0 = 0.45 + 0.092 + 0.10 = 0.642$$

（2）不变：目标不变时 $\dot{e} = -\dot{y}$，两种微分给出同一D项。

易错： 积分漏乘 Δt 得0.87；差分漏除 Δt 得0.547。

本章目录

控制器设计与控制分配

第五章 滤波估计与底层控制

5.1 滤波估计与底层控制基础
5.2 传感器标定与滤波估计
5.3 控制器设计与控制分配
5.4 控制性能评估与调优
5.5 PX4架构与控制开发接口
5.6 底层控制开发与实验验证
5.7 其他机型与进阶控制案例
5.8 习题与课堂讨论

本节 4 个教学单元

5.3.1 PID控制器
教材对应：第5.1.3.1节

5.3.2 饱和PID控制器
教材对应：第5.1.3.1节

5.3.3 底层控制架构与控制器类型
教材对应：第5.1.2.4、5.1.3.1节

5.3.4 执行器控制分配求解
教材对应：第5.1.5节

5.3.2 饱和PID控制器：输出限幅

控制器请求与执行器作用是两个信号

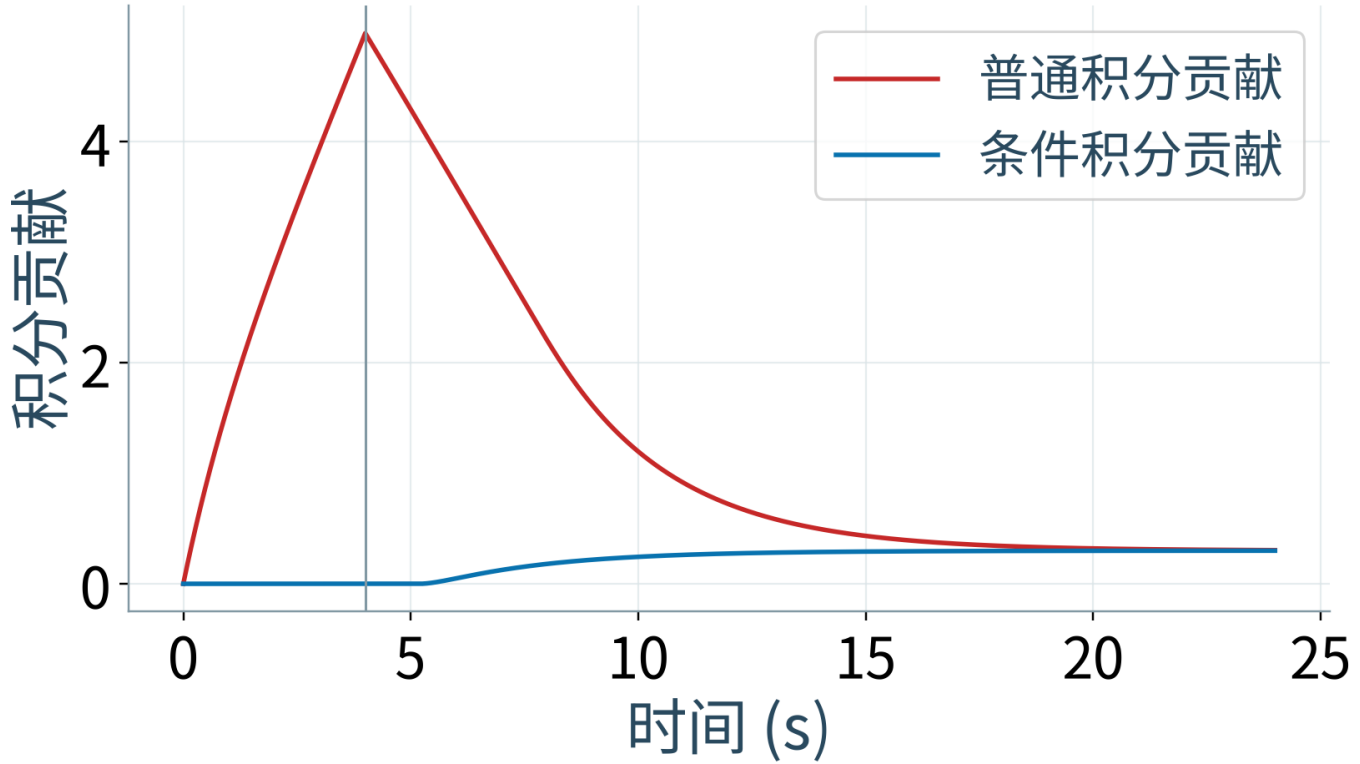
PID请求
原始控制量 → 饱和函数
限制范围 → 实际控制量
作用于对象

$$u = \mathrm{sat}_{[0,1]}(u_{\mathrm{raw}}) = \min(1, \max(0, u_{\mathrm{raw}}))$$

请求	实际输出	未实现部分
1.40	1.00	0.40
−0.20	0.00	−0.20

5.3.2 饱和PID控制器：积分饱和

目标超出能力时积分仍可继续增长



图：普通积分与条件积分的积分贡献I

模型 $\dot{y} = -y + u$

限幅 $0 \le u \le 1$

目标：2；4 s后0.3。

$K_p = 2$，$K_i = 1\ \mathrm{s}^{-1}$

普通积分 $I = K_i J$。

条件积分会暂停增量。

4 s时输出均0.982。

积分贡献 I：

普通4.982；条件0。

5.3.2 饱和PID控制器：条件积分

暂停同向累积，同时允许反向消减

本例 $K_i > 0$；I为积分贡献。正误差推动I增大，负误差推动I减小。

当前情况	误差方向	积分处理
上限饱和	误差为正	暂停同向累积
下限饱和	误差为负	暂停同向累积
饱和但误差反向	能减小饱和的方向	允许积分消减
未饱和	任意	正常积分

$K_p = 2$，$K_i = 1\ \mathrm{s}^{-1}$，$K_d = 0$，$\Delta t = 0.1\ \mathrm{s}$，$I_{k-1} = 0.40$，$e_k = 0.50$，限幅 $[0,1]$。

$$I_{\mathrm{trial}} = 0.40 + 1 \times 0.50 \times 0.1 = 0.45, \quad u_{\mathrm{trial}} = 2 \times 0.50 + 0.45 = 1.45$$

试算 $u_{\mathrm{trial}} = 1.45 > 1$ 且 $e_k > 0$，本步保留 $I_k = 0.40$；反向误差允许消减。

5.3.2 饱和PID控制器：反算机制

用实现量与请求量的差修正积分

$$\dot{I} = K_i e + K_{\text{aw}}(u - u_{\text{raw}})$$

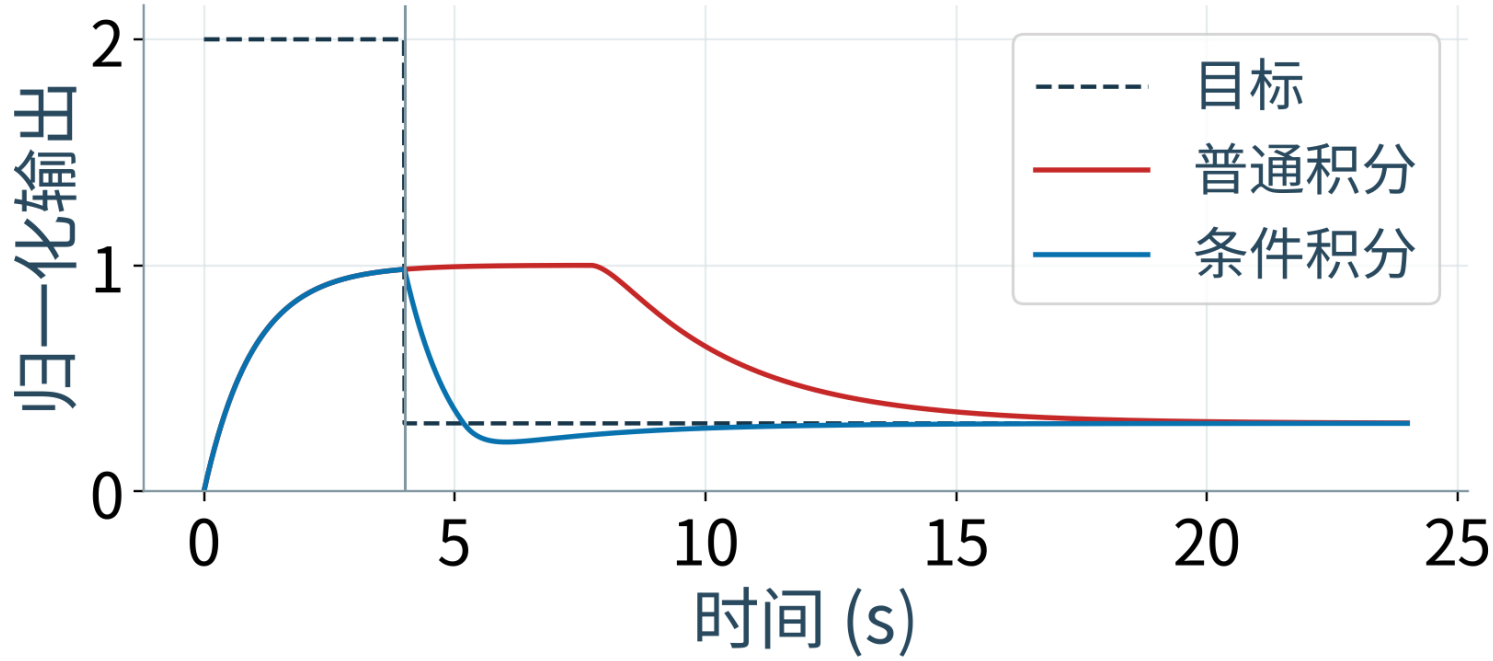
I为积分通道贡献，反算修正其状态；无额外修正时$I = K_i J$（J为原始误差积分）。
I与输出同单位，K_{aw}单位s^{-1}；$K_p = 2$、$K_i = 1\ \text{s}^{-1}$、$K_{\text{aw}} = 2\ \text{s}^{-1}$。
$e = 0.5$，$I_{k-1} = 0.40$，$\Delta t = 0.1\ \text{s}$；请求$u_{\text{raw}} = 1.4$，实现$u = 1.0$。

$$\dot{I} = 1 \times 0.5 + 2(1.0 - 1.4) = -0.3\ \text{s}^{-1}$$

$$I_k = 0.40 + (-0.3) \times 0.1 = 0.37$$

5.3.2 饱和PID控制器：恢复行为

相同物理上限下比较恢复时间



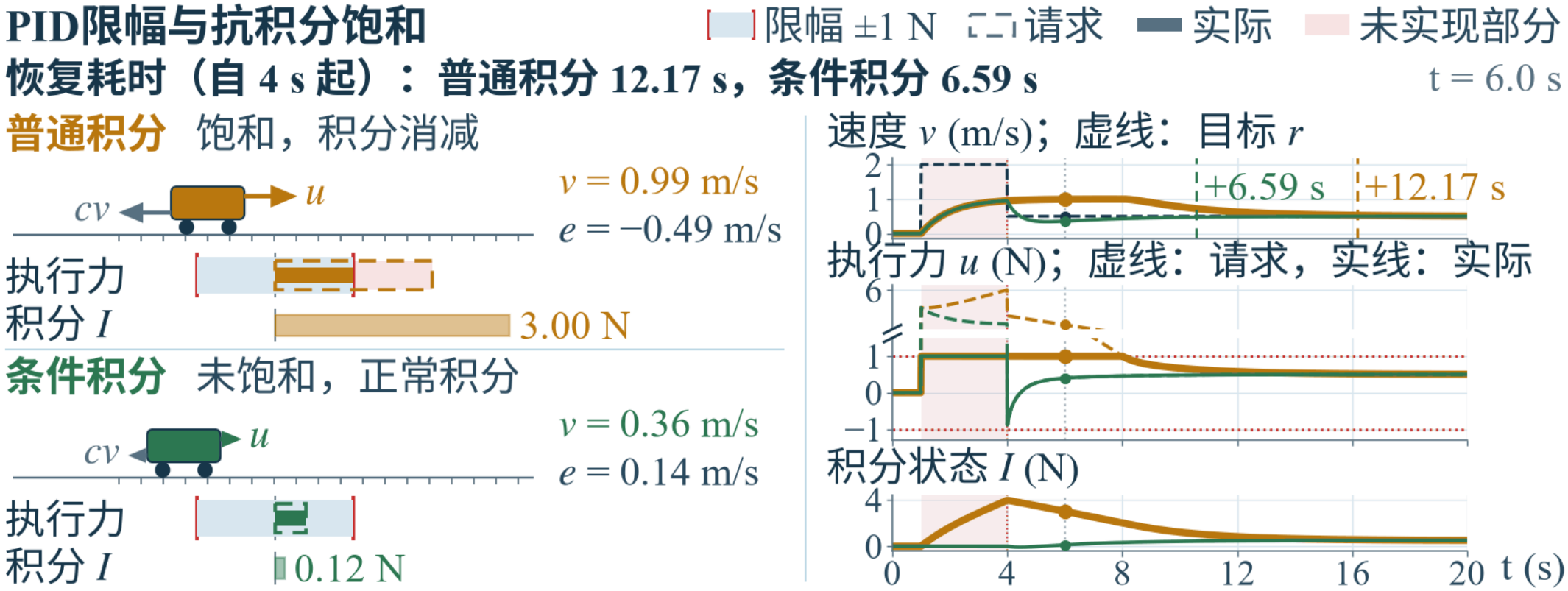
图：相同限幅下的恢复过程

4 s：目标由2改为0.3。
判据：进入并持续保持 $|y - 0.3| \le 0.03$。
恢复时刻：
普通16.39 s；条件9.10 s
从4 s起算的耗时：
普通12.39 s；条件5.10 s
模型、增益、限幅和初值相同；只改积分策略。

执行器无法实现的持续请求，会改变积分器的恢复过程。

5.3.2 饱和PID控制器：速度控制算例

独立速度PID算例：积分策略怎样影响恢复



图：PID教学仿真；cv为线性阻力，c=1 N·s/m；4 s目标由2降为0.5 m/s

5.3.2 饱和PID控制器：速度算例参数与读图

1–4 s两车运动相同，积分历史决定4 s后的恢复

对象： $m\dot{v} = u - cv$，$m = 1$ kg，线性阻力 $c = 1$ N·s/m（动图中的cv）。
PID： $K_p = 2$ N·s/m，$K_i = 1$ N/m，$K_d = 0.1$ N·s²/m；测量速度微分经0.1 s低通。
限幅： 执行力 $|u| \le 1$ N，稳态速度最多1 m/s。
判据： 恢复指此后一直满足 $|e| \le 0.025$ m/s。
目标： 1 s由0升到2 m/s（超出能力），4 s降到0.5 m/s。

1–4 s： 实际力同为1 N，两车运动相同；普通积分累积到 $I \approx 3.95$ N，条件积分 $I = 0$。
4 s后普通积分： 请求约3.05 N仍处上限饱和，继续满推，约8 s才退出饱和。
4 s后条件积分： 请求约−0.91 N，立即制动，速度最低约0.34 m/s后回升。
结论： 从4 s起算，恢复耗时普通约12.17 s、条件约6.59 s。

课堂练习

饱和时积分该不该更新

题目： PI控制加条件积分，判断规则同“条件积分”一页。

参数： $K_p = 1.5$，$K_i = 2\ \mathrm{s}^{-1}$，$\Delta t = 0.05\ \mathrm{s}$，限幅 $[0,1]$。

（1）$I_{k-1} = 0.30$，$e_k = 0.60$；（2）$I_{k-1} = 1.40$，$e_k = -0.20$。

用试算值判断本步是否更新积分，求 I_k 与实际输出 u。

参考要点

(1) $I_{\mathrm{trial}} = 0.30 + 2 \times 0.60 \times 0.05 = 0.36,\quad u_{\mathrm{trial}} = 1.5 \times 0.60 + 0.36 = 1.26 > 1$

上限饱和且 $e_k > 0$：暂停，$I_k = 0.30$，$u = 1$。

(2) $I_{\mathrm{trial}} = 1.40 + 2 \times (-0.20) \times 0.05 = 1.38,\quad u_{\mathrm{trial}} = -0.30 + 1.38 = 1.08 > 1$

仍上限饱和，但 $e_k < 0$ 能减小饱和：允许更新，$I_k = 1.38$，$u = 1$。

易错： “一饱和就冻结”会把（2）错写成1.40。

本章目录

控制器设计与控制分配

第五章 滤波估计与底层控制

5.1 滤波估计与底层控制基础

5.2 传感器标定与滤波估计

5.3 控制器设计与控制分配

5.4 控制性能评估与调优

5.5 PX4架构与控制开发接口

5.6 底层控制开发与实验验证

5.7 其他机型与进阶控制案例

5.8 习题与课堂讨论

本节 4 个教学单元

5.3.1 PID控制器

教材对应：第5.1.3.1节

5.3.2 饱和PID控制器

教材对应：第5.1.3.1节

5.3.3 底层控制架构与控制器类型

教材对应：第5.1.2.4、5.1.3.1节

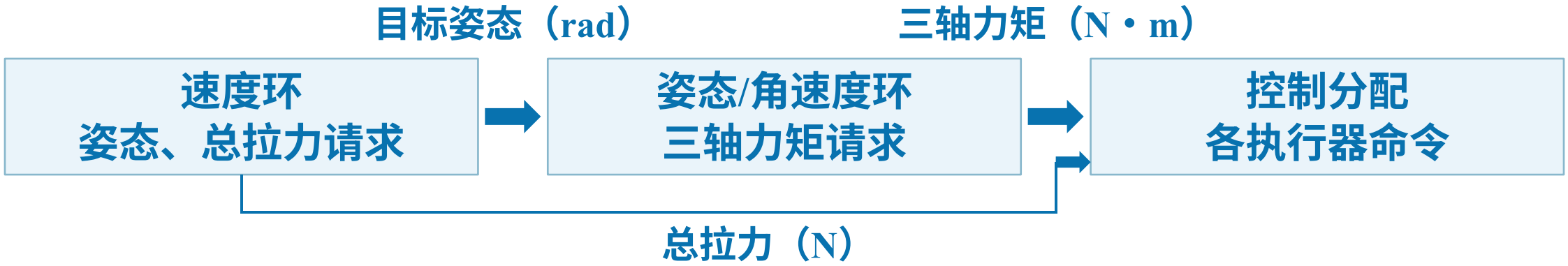
5.3.4 执行器控制分配求解

教材对应：第5.1.5节

5.3.3 底层控制架构与控制器类型：底层控制系统框架

控制器请求还要经过分配器实现

教材图5.2（课件5.1）给出完整系统；本图展开其中控制支路的中间量与单位。

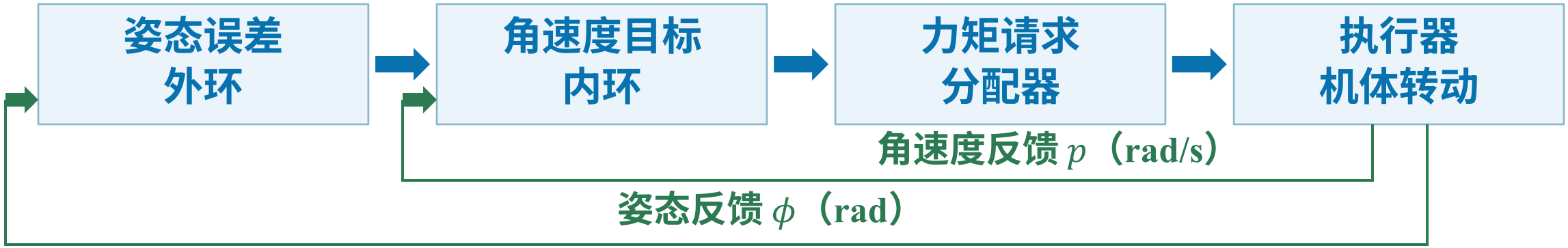


模块	输入量	输出量
速度环	速度目标/反馈，m/s	期望姿态rad、总拉力N
姿态/角速度环	姿态rad、角速度rad/s	期望三轴力矩N·m
分配器	总拉力与三轴力矩	各电机转速或相应执行器量

5.3.3 底层控制架构与控制器类型：姿态内外环

姿态环给角速度目标，内环给力矩

控制器分PID、饱和PID、基于模型、智能四类；本单元先搭串级，再看后两类替换哪一层。



$$p_{\mathrm{sp}} = K_{\phi}(\phi_{\mathrm{sp}} - \phi), \qquad \tau_x = K_{\omega}(p_{\mathrm{sp}} - p)$$

姿态反馈 ϕ（rad）返回外环，角速度反馈 p（rad/s）返回内环。
下标sp表示目标值；三维姿态常用四元数误差，内环带宽须高于外环。

5.3.3 底层控制架构与控制器类型：有限内环带宽

有限角速度内环变慢，本例姿态超调增大

本例超调：快 0%，慢 16.3%

$t = 0.907$ s

快内环 $a = 16$ rad/s



$\phi = 0.149$ rad

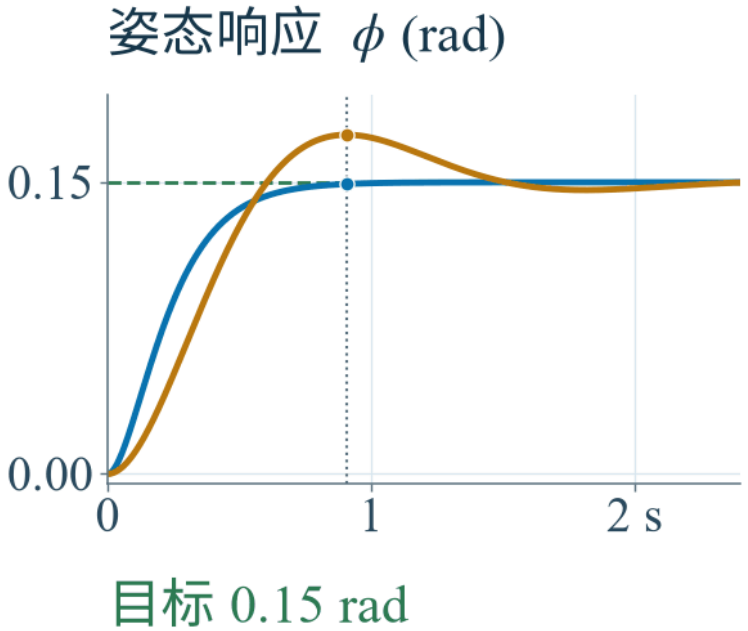
$p = +0.006$ rad/s

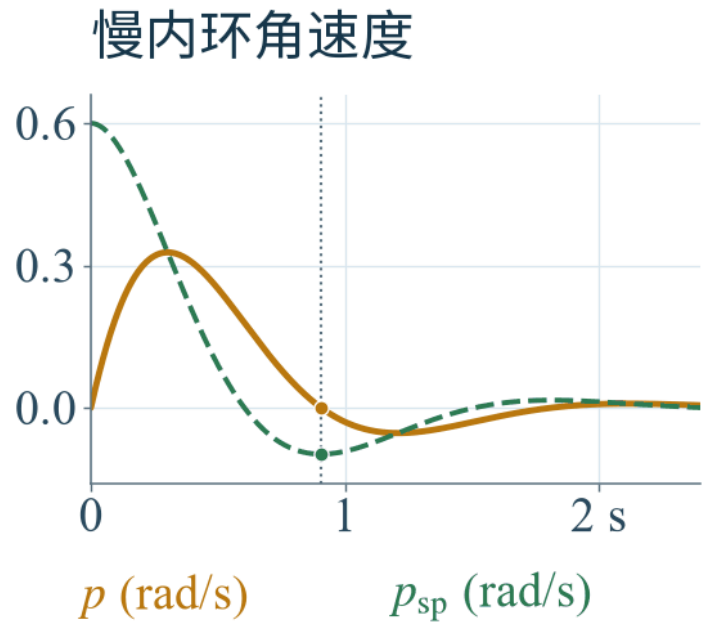
慢内环 $a = 4$ rad/s



$\phi = 0.174$ rad

$p = +0.000$ rad/s





图：同一姿态外环下的快慢角速度内环（教学数值仿真，无时延、限幅）

纯惯量模型：$\dot{\phi} = p,\quad J\dot{p} = \tau_x$；$J = 0.02$ kg·m²，$K_\phi = 4$ s⁻¹，$\phi_{sp} = 0.15$ rad。

仅变内环带宽 $a = K_\omega / J$：16 / 4 rad/s；慢组过目标时 $p > 0$，继续转动而超调。

5.3.3 底层控制架构与控制器类型：位置内外环

水平加速度由倾斜的拉力产生

加速度目标 $a_x = 1.2\ \mathrm{m/s^2}$ 取自串级信号计算：位置误差0.8 m经两层增益得到。

位置误差 位置环 → 速度目标 速度环 → 加速度目标 姿态与拉力 → 姿态内环 执行器

本例竖直速度与竖直加速度均为零；竖直外力仅含重力和拉力。

$$T\sin\beta = ma_x, \quad T\cos\beta = mg, \quad \beta = \mathrm{atan2}(a_x, g)$$

二维教学约定：高度向上为正，β 向水平加速度方向倾斜。
若 $m = 1\ \mathrm{kg}$、$a_x = 1.2\ \mathrm{m/s^2}$、$g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$，则 $\beta = 6.98°$，$T = 9.873\ \mathrm{N}$。
映射到教材NED（北-东-地）坐标时，按目标方向及机体轴重算符号。

5.3.3 底层控制架构与控制器类型：串级信号计算

一次位置纠偏得到1.2 m/s²

水平位置目标1.0 m，当前0.2 m，速度0.2 m/s。外环 $K_x = 1\ \mathrm{s}^{-1}$，内环 $K_v = 2\ \mathrm{s}^{-1}$。

$$v_{\mathrm{sp}} = K_x(x_{\mathrm{sp}} - x) = 1(1.0 - 0.2) = 0.8\ \mathrm{m/s}$$

$$a_{\mathrm{sp}} = K_v(v_{\mathrm{sp}} - v) = 2(0.8 - 0.2) = 1.2\ \mathrm{m/s^2}$$

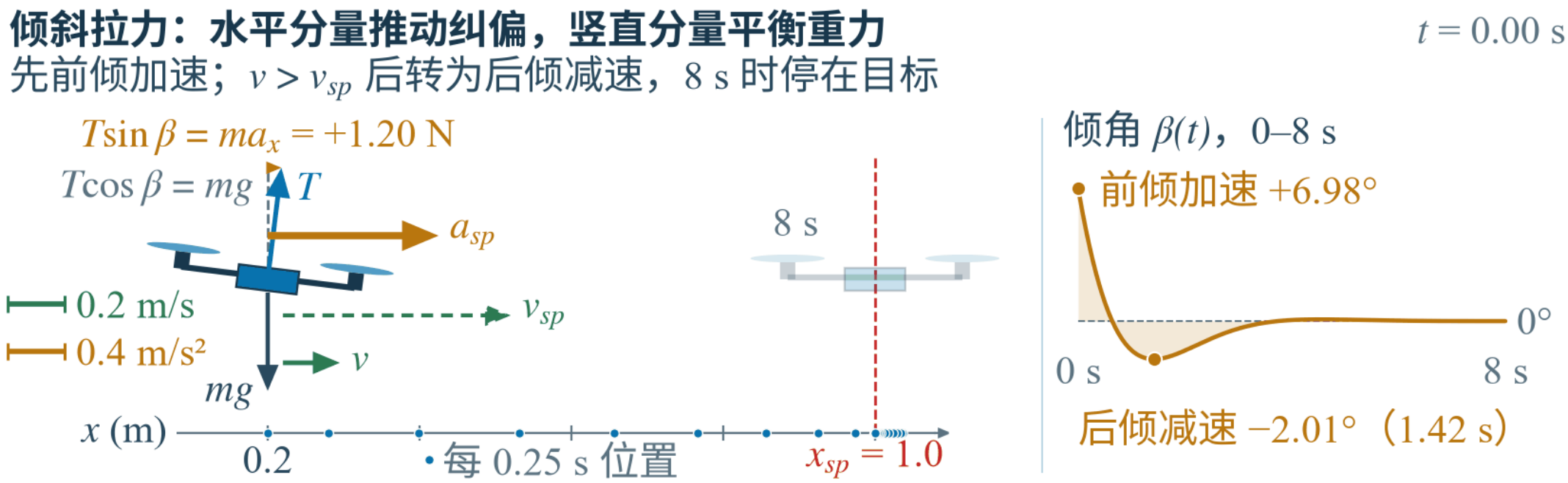
外环把距离误差换为速度，内环把速度误差换为加速度。
教学对象 $\dot{x} = v$、$\dot{v} = a$，暂设加速度内环理想实现，闭环结果见串级完整响应。

5.3.3 底层控制架构与控制器类型：串级纠偏过程

速度超过目标后，前倾加速转为后倾减速

倾斜拉力：水平分量推动纠偏，竖直分量平衡重力

先前倾加速；$v > v_{sp}$ 后转为后倾减速，8 s 时停在目标



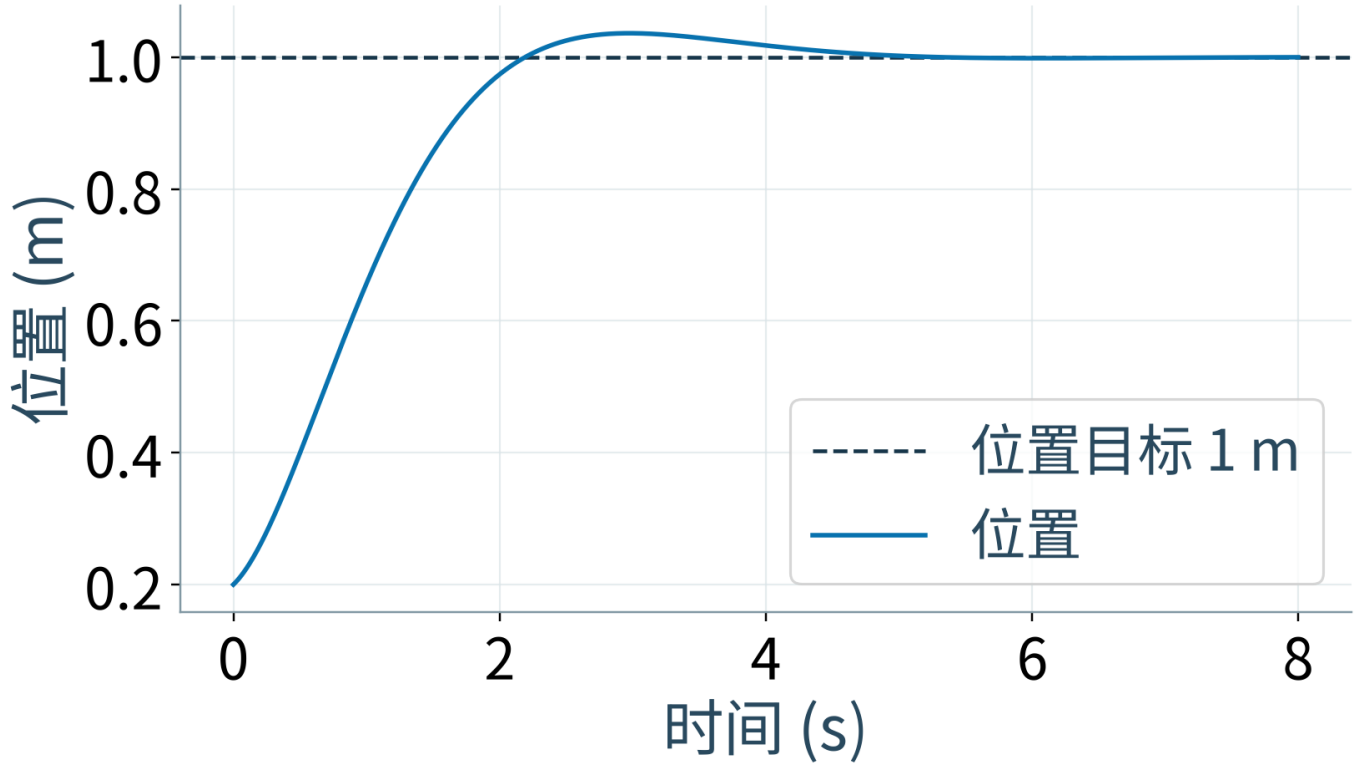
图：位置速度串级教学算例，前倾加速、后倾减速后收敛（数值仿真）

定格四步： 误差0.8 m → v_{sp}=0.8 m/s → a_{sp}=1.2 m/s² → 前倾6.98°，拉力9.873 N。

运动回放： $v < v_{sp}$ 时 a_{sp} 向前，前倾加速；$v > v_{sp}$ 后 a_{sp} 反向，后倾约2°减速。

5.3.3 底层控制架构与控制器类型：串级完整响应

相同参数下位置逐步回到目标



图：位置与速度串级教学计算

独立水平运动教学计算。
目标1 m，初始0.2 m。
初速0.2 m/s，间隔0.01 s。
$K_x = 1\ \mathrm{s}^{-1}$，$K_v = 2\ \mathrm{s}^{-1}$
8 s位置 0.9999 m
峰值 1.0363 m
初次加速度1.2 m/s²

5.3.3 底层控制架构与控制器类型：基于模型的控制器

极点配置与LQR怎样提出设计目标

方法	需要的模型与设计选择	得到什么
极点配置	线性模型；指定闭环状态矩阵 A_{cl} 的特征值（闭环极点）	反馈增益，用来设定衰减速度与振荡特性
线性二次型调节器（LQR）	线性模型，状态/输入的二次权重	在给定问题下优化状态与输入代价

$$u = -Kx, \quad A_{\mathrm{cl}} = A - BK$$

其中 x 为状态，A、B 为状态矩阵与输入矩阵，K 为反馈增益；两者都可替换串级中某一层的PID，增益意义由模型、状态与单位确定；求解与算例见课件5.4「两种状态反馈设计」页。

5.3.3 底层控制架构与控制器类型：滑模与模型预测

模型还可用于鲁棒控制和约束优化

方法	机制	实际关注的条件
滑模控制	滑模面是预设的状态关系； 切换控制使状态先趋近该面， 再沿该面收敛，抑制匹配扰动。	匹配：扰动与输入同通道； 抖振：快速切换的高频波动 还须关注离散采样。
模型预测控制（MPC）	k：执行 | k+1 | k+2 | … | k+N → 窗口右移 预测N步并优化，只执行首步；关注约束、求解耗时与可行性。	

建立模型 → 给出目标与约束 → 设计控制律 → 同工况验证

模型来自机理推导或最小二乘等数据辨识；设计后经软/硬件在环仿真，再实物微调。

5.3.3 底层控制架构与控制器类型：智能控制器

学习与搜索参与控制链的位置不同

方法	参与的位置	学习或搜索的对象
模糊控制	控制律	经验规则与去模糊化输出
神经网络	模型或控制律	数据中的非线性映射
遗传算法	常用于离线参数设计	候选参数或结构及评价函数
强化学习	交互训练的策略	奖励引导的动作选择

在线控制、离线搜索、模型学习各有分工；性能取决于训练范围、约束和闭环验证。

本章目录

控制器设计与控制分配

第五章 滤波估计与底层控制

5.1 滤波估计与底层控制基础

5.2 传感器标定与滤波估计

5.3 控制器设计与控制分配

5.4 控制性能评估与调优

5.5 PX4架构与控制开发接口

5.6 底层控制开发与实验验证

5.7 其他机型与进阶控制案例

5.8 习题与课堂讨论

本节 4 个教学单元

5.3.1 PID控制器

教材对应：第5.1.3.1节

5.3.2 饱和PID控制器

教材对应：第5.1.3.1节

5.3.3 底层控制架构与控制器类型

教材对应：第5.1.2.4、5.1.3.1节

5.3.4 执行器控制分配求解

教材对应：第5.1.5节

5.3.4 执行器控制分配求解：控制分配

每个电机对总拉力与三轴力矩都有一列贡献

$$\mathbf{u} = [f, \tau_x, \tau_y, \tau_z]^\top = \mathbf{M}_{n_r}\mathbf{P}, \quad \mathbf{P} = [\varpi_1^2, \ldots, \varpi_{n_r}^2]^\top$$

式5.21

n_r为旋翼数；$P_i = \varpi_i^2$为转速平方，单位(rad/s)²；f为总拉力（N）。

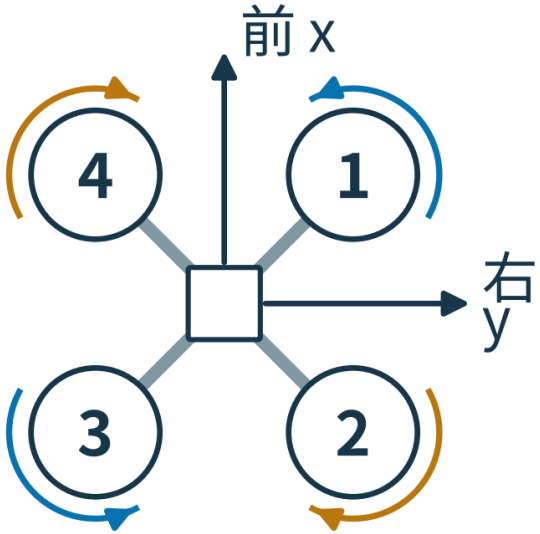
矩阵行	物理量	该行元素的含义
总拉力	N	这个旋翼的拉力系数
滚转/俯仰力矩	N·m	拉力系数乘相应力臂与符号
偏航力矩	N·m	反扭矩贡献，受旋向影响

M将各转速平方映射为总拉力与三轴力矩；P不是归一化油门。

5.3.4 执行器控制分配求解：编号与符号

四旋翼的列顺序由机体坐标确定

电机	位置 $[x_i, y_i]$，m	滚转 / 俯仰 / 偏航贡献符号
1 前右	$[+0.1, +0.1]$	$-/+/+$
2 后右	$[-0.1, +0.1]$	$-/-/-$
3 后左	$[-0.1, -0.1]$	$+/-/+$
4 前左	$[+0.1, -0.1]$	$+/+/-$



逆时针 1、3 顺时针 2、4

图：俯视布局与旋向

俯视，机体轴为前、右、下，编号沿机身顺时针。
正拉力大小沿机体−z作用，电机1/3采用产生正偏航反扭矩的旋向，2/4相反。

5.3.4 执行器控制分配求解：可解性与冗余

数量足够还要检查矩阵是否满秩

转速通道数	秩与解	设计含义
少于4	$\mathrm{rank}(M) \le n_r < 4$	仅靠这些通道不能独立满足全部四维量
等于4，满秩	方阵可逆，解唯一	构型和反扭矩效能必须有效
多于4，满行秩	一般有多个满足等式的解	可按范数、约束或其他代价分配

控制效能指单位执行器量产生的力或力矩；倾转、舵机、尾桨也提供效能。
满秩时，请求仍可能超出执行器允许范围。

5.3.4 执行器控制分配求解：广义逆

最小范数解的含义和适用条件

$$\mathbf{P} = \mathbf{M}^{\dagger}\mathbf{u} = \mathbf{M}^{\mathsf{T}}(\mathbf{M}\mathbf{M}^{\mathsf{T}})^{-1}\mathbf{u}$$

式5.22

闭式要求 $\mathrm{rank}(M) = 4$，保证 MM^{T} 可逆。
无执行器约束时，选取 $\|P\|_2$ 最小的等式解。
能耗优化另需电机、螺旋桨和电调的功率模型，该范数只衡量转速平方大小。

$$\mathbf{P} = \mathbf{M}^{\dagger}\mathbf{u} + (\mathbf{I} - \mathbf{M}^{\dagger}\mathbf{M})\boldsymbol{\eta}$$

$\eta \in \mathbb{R}^{n_r}$为自由选择向量；$I$为$n_r \times n_r$单位阵。
因为$M(I - M^{\dagger}M)\eta = 0$，零空间项不改变请求的总拉力与三轴力矩。

5.3.4 执行器控制分配求解：有单位的分配

总拉力10 N和滚转0.2 N·m怎样实现

教学系数：$c_T = 10^{-5}$ N/(rad/s)²，$c_M = 2\times10^{-7}$ N·m/(rad/s)²，横向与纵向力臂均0.1 m。

$$\mathbf{M} = 10^{-5}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -0.1 & -0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & -0.1 & -0.1 & 0.1 \\ 0.02 & -0.02 & 0.02 & -0.02 \end{bmatrix},\quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0.2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 200000 \\ 200000 \\ 300000 \\ 300000 \end{bmatrix}\ (\text{rad/s})^2,\quad \mathbf{MP} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0.2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

总转速平方和为10^6，滚转差乘0.1×10^{-5}得到0.2 N·m。

5.3.4 执行器控制分配求解：转速到油门

开平方后还要反解电机稳态模型

$$\varpi_i = C_R \sigma_i + \varpi_{\text{ss}} \qquad \text{式5.24}$$

$$\sigma_{i,\text{raw}} = \frac{\sqrt{P_i^*} - \varpi_{\text{ss}}}{C_R} \qquad \text{式5.25}$$

$P_i^\star$为请求的转速平方，单位$(\text{rad/s})^2$；饱和后实际实现的值另记$P_{i,\text{act}}$。
本例 $C_R = 800$ rad/s，$\varpi_{\text{ss}} = 100$ rad/s；请求非负才能开平方。

$$\varpi_{1,2} = 447.214\ \text{rad/s}, \quad \sigma_{1,2} = 0.4340; \quad \varpi_{3,4} = 547.723\ \text{rad/s}, \quad \sigma_{3,4} = 0.5597$$

5.3.4 执行器控制分配求解：两层约束

转速平方与油门都要符合物理范围

$$\mathrm{sat}_{[l,u]}(x) = \min(u, \max(l, x)) \qquad \text{式5.23}$$

$$\sigma_i = \mathrm{sat}_{[0,1]}\left(\frac{\sqrt{\mathrm{sat}_{[0,P_{\max}]}((\mathbf{M}^{\dagger}\mathbf{u})_i)} - \varpi_{\mathrm{ss}}}{C_R}\right) \qquad \text{式5.26}$$

求转速平方 → **非负与上限** → **开平方反解油门** → **油门范围限幅**

本页采用 $\sigma_i \in [0,1]$ 与稳态模型 $\varpi_i = C_R\sigma_i + \varpi_{\mathrm{ss}}$，具体电调按其标定映射。
ϖ_{ss}在根号外相减；限幅后重算总拉力与三轴力矩及其残差。

5.3.4 执行器控制分配求解：物理控制量归一化

参考最大值定义了通道量的尺度

$$\boldsymbol{\delta} = \begin{bmatrix} \mathrm{sat}_{[0,1]}(f/f_{\max}) \\ \mathrm{sat}_{[-1,1]}(\tau_x/\tau_{x,\max}) \\ \mathrm{sat}_{[-1,1]}(\tau_y/\tau_{y,\max}) \\ \mathrm{sat}_{[-1,1]}(\tau_z/\tau_{z,\max}) \end{bmatrix}$$

式5.27

$$f = 10\ \mathrm{N},\ f_{\max} = 20\ \mathrm{N} \Rightarrow \delta_T = 0.5; \quad \tau_x = 0.2\ \mathrm{N\,m},\ \tau_{x,\max} = 2\ \mathrm{N\,m} \Rightarrow \delta_\phi = 0.1$$

参考值必须与接口定义一致，可能是标定的能力，也可能只是调参尺度。
归一化拉力取0到1，力矩通道取−1到1。
各通道都在范围内时，合成的四个电机量仍可能超限。

5.3.4 执行器控制分配求解：一般通道混控

几何效能与通道贡献度共同形成系数

$$\sigma_{i,\mathrm{raw}} = K_T\delta_T + K_\phi(-d_i \sin\varphi_i)\delta_\phi$$

$$+K_\theta(d_i \cos\varphi_i)\delta_\theta + K_\psi((-1)^{i+1}k_m)\delta_\psi \qquad \text{式5.28}$$

量	含义	进入哪一类贡献
d_i, φ_i	电机安装距离与方位	滚转、俯仰的力臂符号
$k_m = c_M/c_T$	反扭矩与拉力系数比	偏航贡献
$K_T, K_\phi, K_\theta, K_\psi$	各通道贡献度参数	把几何与接口尺度组合起来

5.3.4 执行器控制分配求解：归一化四旋翼分配

一次滚转请求得到四个电机量

δ 为归一化的总拉力与三轴力矩请求（式5.27），k 为合并后的调参系数。

$$\begin{bmatrix}\sigma_{1,\mathrm{raw}}\\ \sigma_{2,\mathrm{raw}}\\ \sigma_{3,\mathrm{raw}}\\ \sigma_{4,\mathrm{raw}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_T\delta_T\\ k_\phi\delta_\phi\\ k_\theta\delta_\theta\\ k_\psi\delta_\psi\end{bmatrix} \quad \text{式5.29}$$

$$k_T=k_\phi=k_\theta=k_\psi=1,\quad \boldsymbol{\delta}=\begin{bmatrix}0.5\\ 0.1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\Rightarrow \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{raw}}=\begin{bmatrix}0.4\\ 0.4\\ 0.6\\ 0.6\end{bmatrix}$$

归一化教学混控：右侧1/2减少、左侧3/4增加，对应正滚转请求。这里的0.1没有N·m单位。

5.3.4 执行器控制分配求解：限幅残差

截断以后，滚转请求少实现了0.2

$$\boldsymbol{\delta} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.7 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}_{\text{raw}} = \begin{bmatrix} -0.2 \\ -0.2 \\ 1.2 \\ 1.2 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

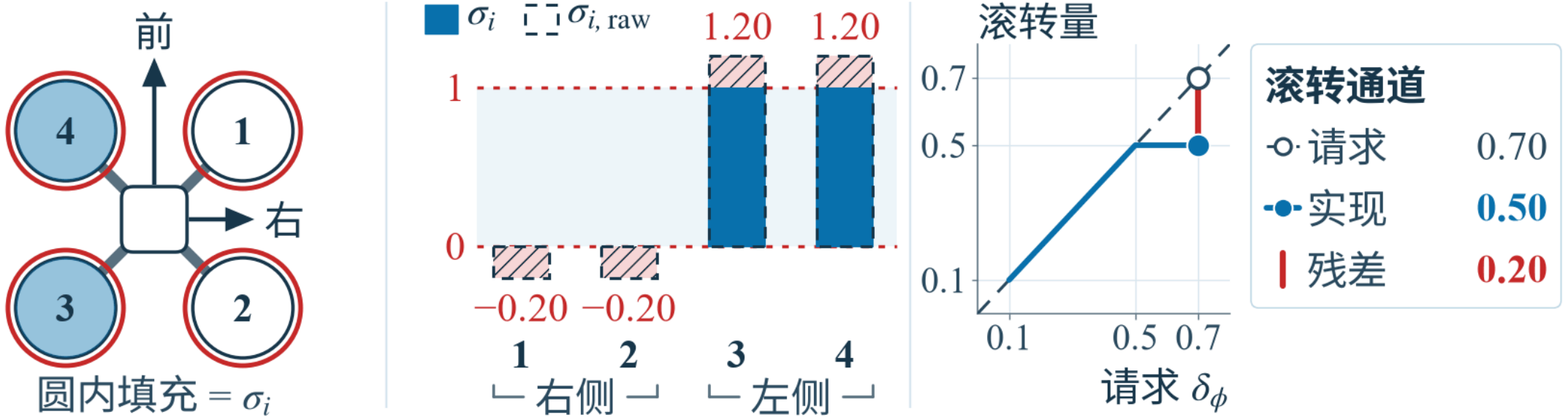
$$\boldsymbol{\delta}_{\text{achieved}} = \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r} = \boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{\delta}_{\text{achieved}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A 为式5.29的简化混控矩阵，此处通道系数均为1。
总量请求与实现均为0.5；滚转请求0.7，限幅后实现0.5（归一化教学量）。

5.3.4 执行器控制分配求解：限幅残差过程

请求继续增大，实现滚转停在0.5

滚转请求 0.70 → 限幅后 $\sigma = [0, 0, 1, 1]$ → 只实现 0.50，残差 0.20



图：式5.29归一化混控的限幅与乘回残差（教学算例）

越界截断： 滚转请求超过0.5后，$\sigma_{i,\mathrm{raw}}$ 越出0–1，截断为 $\boldsymbol{\sigma} = [0,0,1,1]^{\mathsf{T}}$。

乘回核算： $\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\sigma}$ 只实现滚转0.5，请求0.7留下残差0.2（归一化量）。

5.3.4 执行器控制分配求解：PWM信号

脉宽映射也需要设备范围约定

$$\sigma_{i,\mathrm{pwm}} = \begin{cases} 1000 + 1000\sigma_i, & \text{电机 } \sigma_i \in [0,1] \\ 1500 + 500\sigma_i, & \text{舵机 } \sigma_i \in [-1,1] \end{cases}$$

式5.30

$$\sigma_{\mathrm{motor}} = 0.6 \Rightarrow 1600\ \mu s, \qquad \sigma_{\mathrm{servo}} = -0.2 \Rightarrow 1400\ \mu s$$

脉宽调制（PWM）用高电平持续时间表示命令。本式的1000–2000 μs是教学量程约定。
舵机中位1500 μs，电机与舵机的归一化范围不同。
实际设备的量程、方向、更新频率和解锁要求以配置为准。

5.3.4 执行器控制分配求解：数字接口

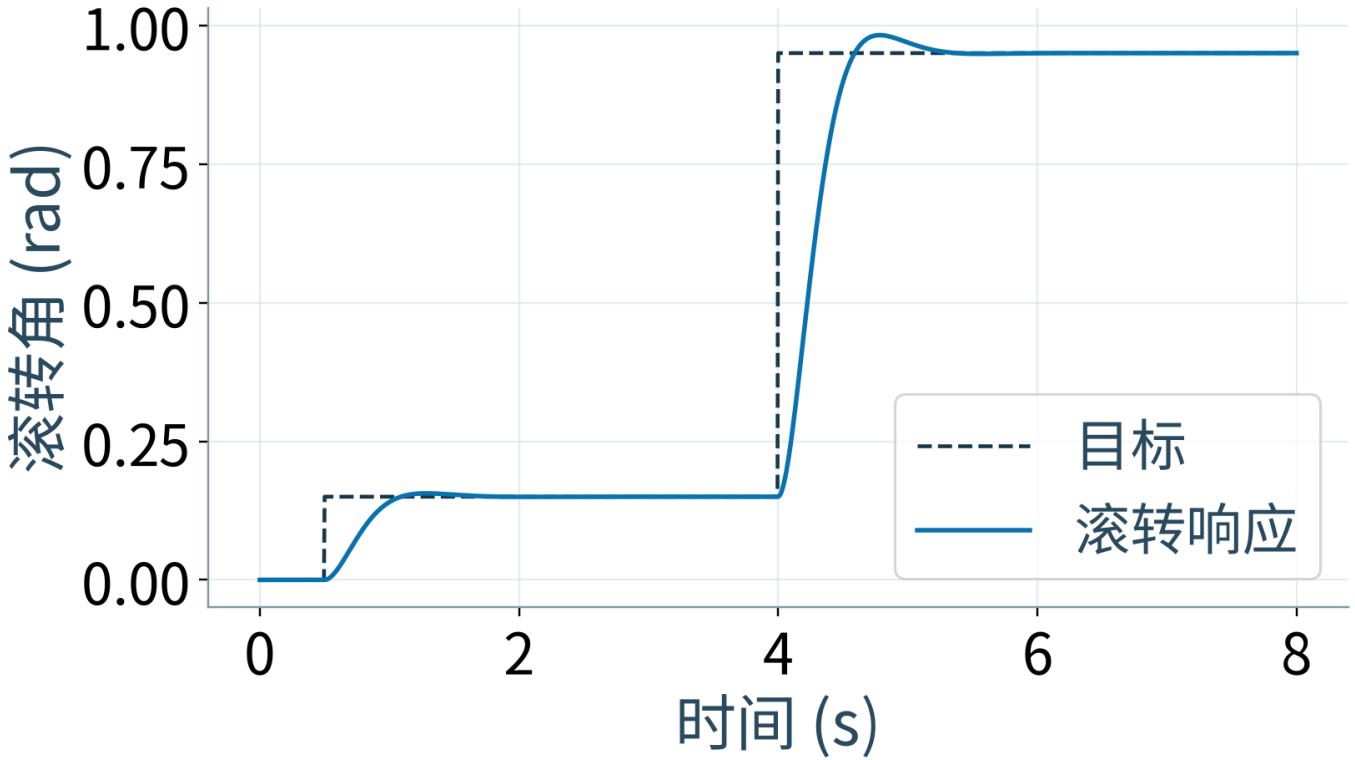
协议名字不能代替控制量语义

接口	传递的量	使用条件
PWM	按设备定义的脉宽	匹配范围、方向与中位
DShot	数字电调命令，含油门与特殊指令	可选转速遥测是反馈信息； 是否闭环仍取决于电调实现
DroneCAN	RawCommand：归一化原始命令 RPMCommand：转速目标（rpm）	先核消息类型和电调实现

选择接口时先核对：消息类型、命令代表的量（油门、转速或归一化值），以及电调是否实现该消息。

5.3.4 执行器控制分配求解：分配与完整闭环

从角度目标到力矩和电机量再回到响应



图：单轴滚转闭环教学计算

单轴转动，不评价高度。

$\dot{\phi} = p$，$\dot{p} = \tau_x / J_x$

$J_x = 0.02\ \mathrm{kg \cdot m^2}$

姿态增益4 $\mathrm{s^{-1}}$。

角速度增益

0.16 N · m · s/rad。

转速平方限制：

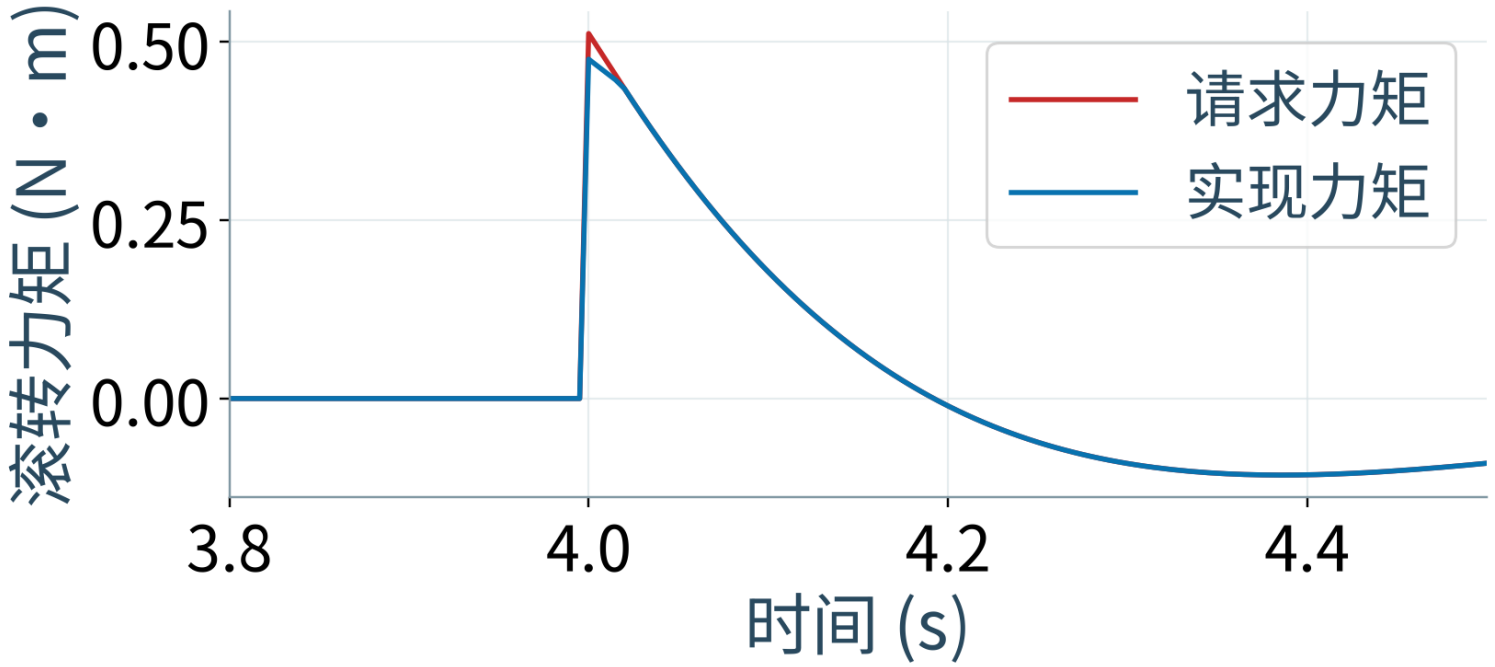
$$P_i \in [10^4, 3.6 \times 10^5]$$

单位$(\mathrm{rad/s})^2$。

8 s角度0.9500 rad。

5.3.4 执行器控制分配求解：饱和时的实现量

目标突变时请求与实现力矩暂时分离



图：分配前后的滚转力矩

同一计算，放大4 s附近。
请求峰值 0.512 N • m
实现峰值 0.476 N • m
最大残差 0.036 N • m
总拉力最低 9.640 N
每步0.005 s，4个采样发生限幅。

分配后的实际总拉力与力矩，决定了控制意图能够实现多少。

5.3.4 执行器控制分配求解：例程入口与条件

执行器控制信号例程：入口、条件与输入约定

目录：[安装目录]/RflySimAPIs/5.RflySimFlyCtrl/
0.ApiExps/16.CtrlsSingalsAPI/（先读其中的Readme.pdf）
Exp1_HIL16CtrlsPWM.slx：16维PWM命令，范围1000-2000。
Exp2_HIL16CtrlsNorm.slx：16维归一化执行器命令。
Exp3_TorqueThrustCtrls4D.slx：归一化三轴力矩与推力。
条件：硬件在环（HITL），需飞控、遥控器与接收机；运行步骤见课件5.5「执行器控制例程」页。
软件：MATLAB 2022b以上；编译目标px4_fmu-v6x_default。
固件：Readme推荐PX4 1.12.3；确认所用版本见课件5.5「控制输出的版本边界」页。
Exp3输入：三轴力矩与推力都是归一化值，Thrust 1D大于0表示向上；以N、N·m表示的请求先按接口定义归一化，输入语义见课件5.5「执行器控制API」页。

5.3.4 执行器控制分配求解：例程中的分配位置

三个模型把分配放在Simulink或PX4中

Exp1、Exp2：模型直接给出16维执行器量（PWM 1000–2000或归一化值），经actuator_outputs_rfly送入CopterSim的inPWMs，不经PX4混控器。

Exp3：模型只给归一化三轴力矩与推力；v1.12.3中写入actuator_controls_0，由PX4自带混控器算出各电机量。

对应本单元：在Simulink中实现分配矩阵与限幅时，输出接Exp1或Exp2这一层；只给力矩与推力时选Exp3，分配交给PX4混控器。

现象：三个模型按同一流程操作，Readme指出Exp2、Exp3现象应与Exp1一致：CH5拨到最高档后由Simulink控制，拨回最低档后PX4收回控制权。

完整步骤、判据与常见失败：见课件5.5「执行器控制例程」页；CH5拨到最高档会自动解锁，只在硬件在环环境中操作。

课堂练习

截断后的原力矩还成立吗

课堂练习：使用式5.29的简化矩阵，通道系数为1，给定总量0.8、滚转0.4、俯仰/偏航0。将电机量限到0–1后，求实现量和残差。

作答要求：写出 σ_{raw}、截断后的 σ、乘回得到的 δ_{achieved} 和残差。
再判断：截断是否只影响滚转？与“限幅残差”算例比较。

参考要点

截断同时改变了总量和滚转

题目回顾：式5.29简化矩阵，系数为1；总量0.8、滚转0.4，电机量限到0–1。

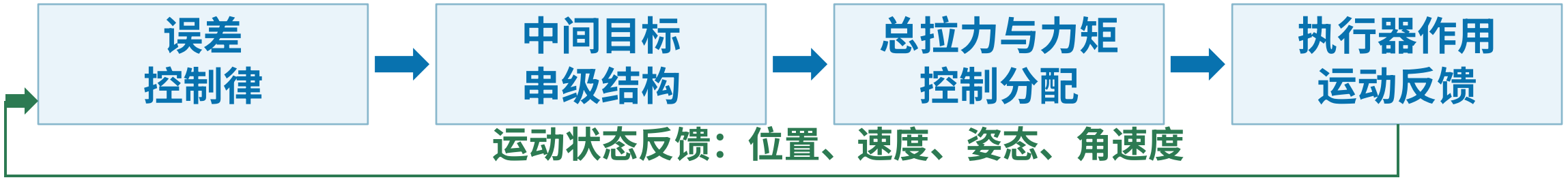
$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{raw}} = [0.4,0.4,1.2,1.2]^{\mathsf{T}} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma} = [0.4,0.4,1.0,1.0]^{\mathsf{T}}$$

$$\boldsymbol{\delta}_{\text{achieved}} = [0.7,0.3,0,0]^{\mathsf{T}}, \quad \boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{\delta}_{\text{achieved}} = [0.1,0.1,0,0]^{\mathsf{T}}$$

参考判断：这次截断同时改变总量和滚转。步骤为请求、分配、限制、乘回、比较。

本节小结

控制律、串级结构与分配器各完成一层计算



环节	关键检查	易错点
控制律	误差、时间与输出单位； 饱和时的积分处理	微分放大噪声；积分未乘Δt； 饱和时积分持续累积
串级结构	每层目标和反馈的物理量； 换方法时说明替换哪一层	位置误差直接当油门
分配器	列顺序、动力模型与约束	归一化混用，忽略限幅残差