



## 5.2 传感器标定与滤波估计



### 本章目录

## 传感器标定与滤波估计

### 第五章 滤波估计与底层控制

5.1 滤波估计与底层控制基础

**5.2 传感器标定与滤波估计**

5.3 控制器设计与控制分配

5.4 控制性能评估与调优

5.5 PX4架构与控制开发接口

5.6 底层控制开发与实验验证

5.7 其他机型与进阶控制案例

5.8 习题与课堂讨论

### 本节 5 个教学单元

#### 5.2.1 传感器标定与测量模型

教材对应：第5.1.3.2节第1部分、第5.3.1节

#### 5.2.2 互补滤波器

教材对应：第5.1.3.2节第2部分、第5.3.1节

#### 5.2.3 卡尔曼滤波器

教材对应：第5.1.3.2节第3部分

#### 5.2.4 扩展卡尔曼滤波器

教材对应：第5.1.3.2节第4部分、第5.3.1节

#### 5.2.5 滤波方法比较与验证

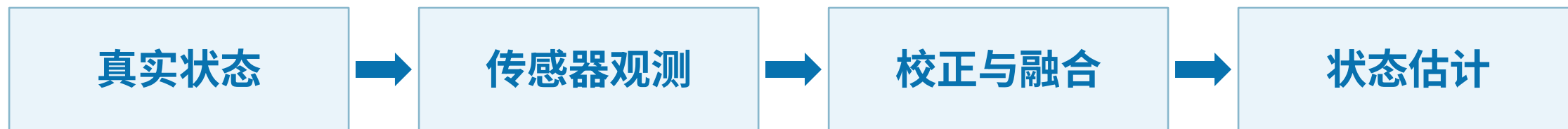
教材对应：第5.1.3.2节第5部分



### 5.2.1 传感器标定与测量模型：姿态测量

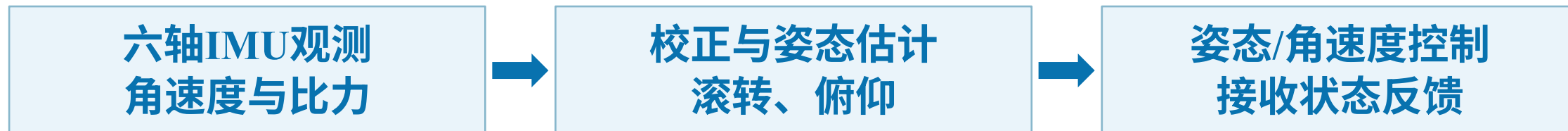
## 状态、观测与测量误差各是什么

惯性测量单元（IMU）提供角速度与比力，控制器需要姿态等状态。



| 名称 | 回答的问题     | 姿态任务中的例子        |
|----|-----------|-----------------|
| 状态 | 载具现在怎样运动  | 俯仰角、陀螺偏置        |
| 观测 | 传感器实际输出什么 | 三轴角速度与三轴比力      |
| 误差 | 观测与模型为何不同 | 偏置、尺度、随机噪声、安装误差 |

### 5.2.1 传感器标定与测量模型：估计支路输入输出 从六轴观测到控制器需要的反馈



图：教材图5.2中的估计支路（传感器观测与状态反馈是两类信号）

| 量     | 输入/输出语义                     | 对控制器的影响         |
|-------|-----------------------------|-----------------|
| 角速度观测 | rad/s；去偏并保持机体轴约定            | 角速度反馈不等于姿态角     |
| 加速度观测 | m/s <sup>2</sup> ；比力而非运动加速度 | 准静态时提供重力方向参照    |
| 估计与时效 | 姿态rad；协方差与采样时间              | 检查可信度及延迟，再进入控制环 |

### 5.2.1 传感器标定与测量模型：误差模型

## 一维测量模型中的偏置与尺度

测量值由比例、偏移和噪声共同组成

$$y = sx + b + n$$

已知标定参数时，先减偏置再除尺度

$$\hat{x} = \frac{y - b}{s} = \frac{10.2 - 0.1}{1.01} = 10.0 \text{ m/s}^2$$

- $x$ ：真值； $y$ ：读数； $b$ ：偏置； $n$ ：噪声，单位均为 $\text{m/s}^2$ 。
- $s$ ：无量纲尺度因子，决定测量响应的斜率。
- 偏置使响应整体平移；确定性校正后仍有随机噪声。

### 5.2.1 传感器标定与测量模型：三轴测量模型

### 轴间耦合与安装方向也影响观测

$$y = Sx + b + n$$

| 误差      | 物理含义        | 怎样获得识别信息     |
|---------|-------------|--------------|
| 三轴偏置    | 各轴都有固定偏移    | 已知姿态/参考下识别偏置 |
| 尺度与轴间耦合 | 斜率不同，其他轴混入  | 覆盖多个姿态与方向    |
| 安装误差    | 传感器轴与机体轴不重合 | 方向参考或外部姿态基准  |

$S$  为  $3 \times 3$  矩阵， $b$  为  $3 \times 1$  向量。仅一段静止数据难以辨认所有参数。

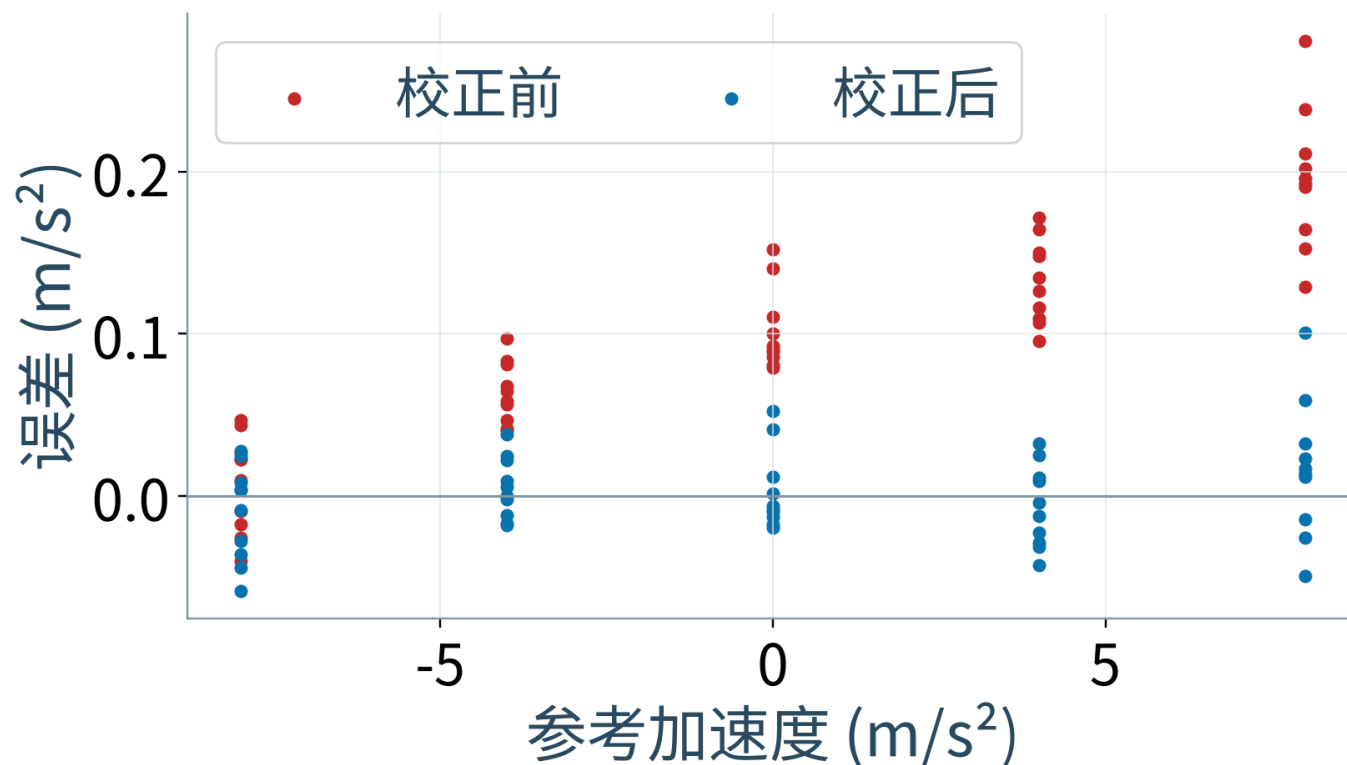
### 5.2.1 传感器标定与测量模型：静态与动态标定

### 采集范围决定能识别哪些误差

| 任务           | 数据与参考        | 验证内容         |
|--------------|--------------|--------------|
| 加速度计<br>静态标定 | 静止，多姿态覆盖重力方向 | 偏置、尺度与轴间误差   |
| 动态标定         | 已知轨迹或外部运动参考  | 滞后、频率响应与运动误差 |
| 磁力计标定        | 多方向磁场观测      | 硬铁偏置、软铁尺度与耦合 |

- 陀螺静止数据主要估零偏；尺度与轴间误差需已知角运动参考。
- 参数拟合使用训练数据，误差判断使用独立留出数据。
- 姿态覆盖不足、时间戳错位或单位错误会使小残差失去解释意义。

### 5.2.1 传感器标定与测量模型：留出验证 校正结果用独立数据检查



拟合160点，留出50点。

尺度1.01000

偏置0.0987 m/s<sup>2</sup>

均方根误差 (RMSE) :

校正前0.122 m/s<sup>2</sup>

校正后0.029 m/s<sup>2</sup>

**结论：**校正前误差整体偏正且随参考值增大，偏置与尺度并存；校正后留出误差集中在0附近。

图：留出姿态的校正前后误差（教学数据）

### 5.2.1 传感器标定与测量模型：测量模型验证

## 补偿参数的符号取决于实际实现

例程目录：[安装目录]/RflySimAPIs/5.RflySimFlyCtrl/1.BasicExps/e3-SensorCalib/

入口文件：Readme.pdf（第2、7-9页）；离线计算见e3.1/calLM.m

$$\mathbf{a}_{\text{cal}} = \mathbf{K}_a(\mathbf{a}_{\text{raw}} + \mathbf{b}_a)$$

$$k = 1/s, \quad b_a = -b, \quad k(y + b_a) = (y - b)/s$$

- **运行：** MATLAB切到e3.1，确认e\_acc\_A.bin同目录，运行calLM.m。
- **现象：** 弹出采集点、LM迭代与标定前后对比图，命令行打印尺度与补偿量。
- **判据：** 按calFunc.m校正后模长贴近重力参考；留出数据再查轴方向。
- **排查：** 文件名与CAL\_ACC\_SCALE/OFF须与采集时一致；再查单位与姿态覆盖。

**正确的单位、坐标和补偿符号，是滤波器的输入条件。**



## 5.2 传感器标定与滤波估计



### 本章目录

## 传感器标定与滤波估计

### 第五章 滤波估计与底层控制

5.1 滤波估计与底层控制基础

**5.2 传感器标定与滤波估计**

5.3 控制器设计与控制分配

5.4 控制性能评估与调优

5.5 PX4架构与控制开发接口

5.6 底层控制开发与实验验证

5.7 其他机型与进阶控制案例

5.8 习题与课堂讨论

### 本节 5 个教学单元

#### 5.2.1 传感器标定与测量模型

教材对应：第5.1.3.2节第1部分、第5.3.1节

#### 5.2.2 互补滤波器

教材对应：第5.1.3.2节第2部分、第5.3.1节

#### 5.2.3 卡尔曼滤波器

教材对应：第5.1.3.2节第3部分

#### 5.2.4 扩展卡尔曼滤波器

教材对应：第5.1.3.2节第4部分、第5.3.1节

#### 5.2.5 滤波方法比较与验证

教材对应：第5.1.3.2节第5部分





## 5.2 传感器标定与滤波估计



### 5.2.2 互补滤波器：姿态信息来源

## 陀螺与重力参照为何能够互补

$\theta_{\text{prev}}$ : 上次姿态;  $\omega$ : 角速度;  $b_g$ : 零偏;  $\Delta t$ : 采样间隔。

$$\theta_{\text{gyro}} = \theta_{\text{prev}} + (\omega - b_g)\Delta t \quad \text{式5.2}$$

| 通道   | 直接测得什么               | 可提供的姿态信息              |
|------|----------------------|-----------------------|
| 陀螺仪  | 角速度, rad/s           | 积分反映短时角度变化;<br>偏置造成漂移 |
| 加速度计 | 比力, m/s <sup>2</sup> | 准静态时给出重力方向的滚转、俯仰参考    |

$\Delta t$  为采样间隔, 单位s。一般三维姿态须使用姿态运动学, 体轴角速度与欧拉角导数并不相同。



### 5.2.2 互补滤波器：比力与坐标

### 加速度计静止时为何仍有输出

$${}^b\mathbf{a}_{\text{acc}} \approx {}^b\mathbf{a}_{\text{motion}} - \mathbf{R}_e^b {}^e\mathbf{g}$$

式5.3

| 状态   | 运动加速度                   | 理想比力输出                            |
|------|-------------------------|-----------------------------------|
| 水平静止 | 0                       | $[0, 0, -9.8]^\top \text{ m/s}^2$ |
| 自由落体 | $\mathbf{g}$            | 约为零                               |
| 水平加速 | $a_x = 2 \text{ m/s}^2$ | $[2, 0, -9.8]^\top \text{ m/s}^2$ |

地面系采用北东地（NED），机体系为前、右、下。 $\mathbf{R}_e^b$  把地面系向量转到机体系。

### 5.2.2 互补滤波器：加速度姿态

### 重力投影给出俯仰角参照

$$\theta_{\text{acc}} = \arctan \left( \frac{a_x}{\sqrt{a_y^2 + a_z^2}} \right) = \text{atan2} \left( a_x, \sqrt{a_y^2 + a_z^2} \right)$$

式5.4

$$\mathbf{a} = [4.9, 0, -8.487]^\top \text{ m/s}^2, \quad \theta_{\text{acc}} = \text{atan2}(4.9, 8.487) = 30^\circ$$

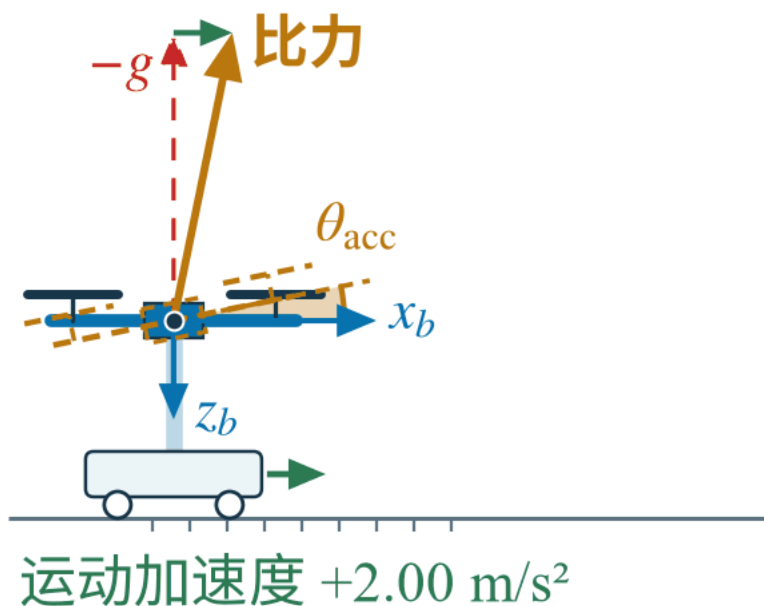
- 准静态、已校正，并采用常规 $\pm 90^\circ$ 俯仰范围。
- atan2改善除零计算，但不能单凭该式识别倒置姿态。
- 水平加速 $2 \text{ m/s}^2$ 也会算出约 $11.5^\circ$ ，机动时应融合其他信息。

### 5.2.2 互补滤波器：机动中的假俯仰

### 只看比力分不清机体倾转与水平加速

加速度姿态：真实倾转时正确，水平加速时出现假俯仰

— 真实姿态    --- 加速度姿态



比力  $a_x = +2.00 \text{ m/s}^2$

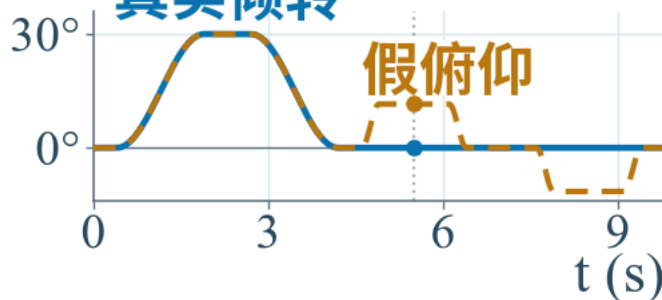
$a_z = -9.80 \text{ m/s}^2$

陀螺  $\omega = 0.0 \text{ }^\circ/\text{s}$

加速度姿态  $\theta_{acc} = +11.5^\circ$

真实姿态  $\theta = 0.0^\circ$

真实倾转



**真实抬头30°：**比力竖直，机体轴随之转动， $\theta_{acc}$ 与 $\theta$ 同为30°；陀螺只在转动中有读数。

**水平加速2 m/s²：** $\theta = 0^\circ$ 、陀螺读数为0，比力前倾却使 $\theta_{acc} \approx 11.5^\circ$ ；加速度为 $-2 \text{ m/s}^2$ 时为 $-11.5^\circ$ 。

**结论：**只看比力分不清倾转与水平加速，需要陀螺的短时信息参与融合。

图：倾转与水平加速时的加速度姿态（仿真，非平台实测）



## 5.2 传感器标定与滤波估计



### 5.2.2 互补滤波器：互补融合

### 用一帧数据算出融合后的角度

给定：前一估计 $10^\circ$ ，角速度 $2^\circ/\text{s}$ ，偏置0，间隔 $0.1\text{ s}$ ，加速度姿态 $9^\circ$ ，权重0.9。

$$\theta_{\text{gyro}} = 10^\circ + 2^\circ/\text{s} \times 0.1\text{ s} = 10.2^\circ$$

$$\theta = \alpha \theta_{\text{gyro}} + (1 - \alpha) \theta_{\text{acc}} = 0.9 \times 10.2^\circ + 0.1 \times 9^\circ = 10.08^\circ$$

式5.5

- 下一次积分从融合结果 $10.08^\circ$ 继续，每次融合都修正后续预测。
- 本例全部采用度。程序内部采用弧度时，角度与角速度同时换算。



### 5.2.2 互补滤波器：时间常数

### 采样间隔变化时权重也随之变化

$$\alpha = \frac{\tau}{\tau + \Delta t}, \quad 1 - \alpha = \frac{\Delta t}{\tau + \Delta t}$$

| 时间常数  | 采样间隔   | 陀螺预测权重                    |
|-------|--------|---------------------------|
| 0.3 s | 0.02 s | $0.3/0.32 = 0.9375$       |
| 0.3 s | 0.10 s | $0.3/0.40 = 0.75$         |
| 1.5 s | 0.02 s | $1.5/1.52 \approx 0.9868$ |

高频变化取自陀螺、低频趋势取自加速度计，分界由 $\tau$  决定，单位为s。

### 5.2.2 互补滤波器：滤波效果

### 同一段输入比较噪声、漂移与响应

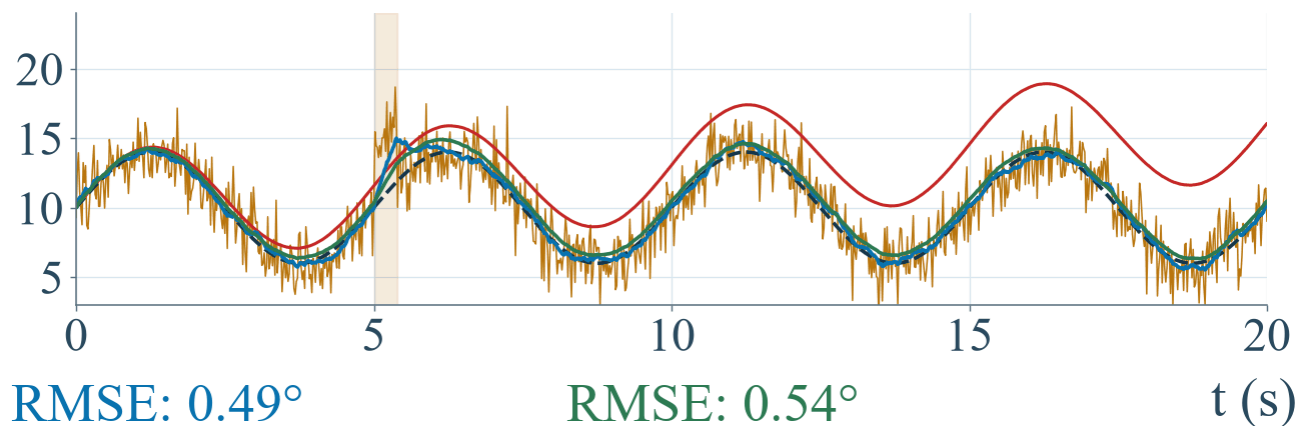
融合减轻漂移，时间常数改变修正强度

--- 真姿态      — 陀螺积分      — 加计参照

—  $\tau = 0.3\text{ s}$       —  $\tau = 1.5\text{ s}$

俯仰角 ( $^{\circ}$ )

参照扰动  $+4^{\circ}$ : 5–5.4 s



10–20 s 平均误差:  $+0.143^{\circ}$  /  $+0.504^{\circ}$

图：互补姿态逐次预测与修正

独立教学计算，20 s。

间隔0.02 s，初值 $10^{\circ}$ 。

陀螺剩余偏置 $0.3^{\circ}/\text{s}$ 。

5–5.4 s参照增加 $4^{\circ}$ 。

RMSE：陀螺  $3.48^{\circ}$ ；

互补0.3 s  $0.49^{\circ}$ ；

互补1.5 s  $0.54^{\circ}$ 。

**结论：**红线20 s漂移约 $6^{\circ}$ ；

两条互补都压到约 $0.5^{\circ}$ ；

1.5 s受5 s扰动小，但偏置残留多。

### 5.2.2 互补滤波器：真实函数

### 简化姿态函数的输入与计算边界

e4.1/Attitude\_cf.m: function [phi\_cf, theta\_cf] = Attitude\_cf(dt, z, phi\_cf\_k, theta\_cf\_k, tao)  
z = [gx, gy, gz, ax, ay, az]', 单位rad/s与m/s<sup>2</sup>; 角度单位rad

$$\theta_{am} = \arcsin(a_x / \|\mathbf{a}\|), \quad \theta_k = \frac{\tau}{\tau + \Delta t} (\theta_{k-1} + g_y \Delta t) + \frac{\Delta t}{\tau + \Delta t} \theta_{am}$$

- $g_y$  (代码gy) 为机体y轴陀螺角速度 (rad/s) ;  $\theta_{am}$  即  $\theta_{acc}$  (rad) 。
- Attitude\_cf.m输入: 间隔、六轴观测、前一滚转/俯仰角及tao; 比力m/s<sup>2</sup>。
- 小姿态单轴近似; 常规俯仰范围内, 两种俯仰式一致。
- 比力模长过小或接近奇异姿态时, 先检查输入有效性。
- **调用关系:** e4.3的Attitude\_estimator.m调用它; e4.1驱动在循环内写同一公式。

### 5.2.2 互补滤波器：e4.1与e4.2例程

## 用实飞日志运行互补滤波并比较 $\tau$

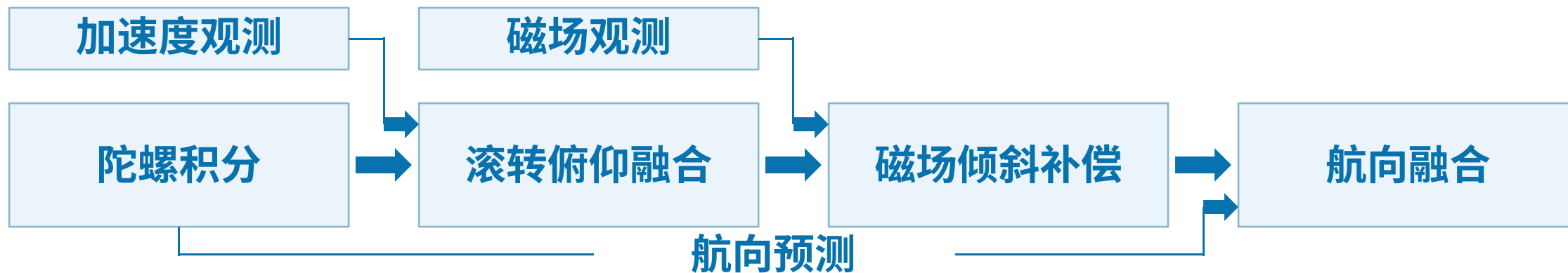
例程目录：[安装目录]/RflySimAPIs/5.RflySimFlyCtrl/1.BasicExps/e4-FilterDesign/

入口文件：Readme.pdf（第2-6页）；e4.1/Attitude\_estimator0\_fly.m；e4.2/Attitude\_cf\_tao.m

- **运行：** MATLAB切到e4.1，确认logdata.mat同目录，运行Attitude\_estimator0\_fly.m；再到e4.2运行Attitude\_cf\_tao.m。
- **现象：** e4.1弹出pitch、roll两图，上半gyro/acc/cf、下半cf/px4；e4.2弹出一幅俯仰图， $\tau$ 取0.01、0.1、1三条线。
- **读图：** cf比acc平滑，又不随gyro漂移； $\tau$ 越大越接近陀螺积分（由 $\alpha=\tau/(\tau+\Delta t)$ 推断）。
- 已有e4\_A.bin：在e4.1运行Attitude\_estimator0.m离线计算；硬件采集见课件5.6.5「日志复核」页。
- **排查：** 文件名与数据一致；Ts由timestamp（ $\mu\text{s}$ ）换算为s；默认tao=0.1，与“同一段输入比较”算例不同。

### 5.2.2 互补滤波器：航向与适用范围

### 重力不能独立确定偏航角



- 重力方向约束滚转和俯仰，绕重力轴转动不改变重力观测。
- 磁场先经过倾斜补偿，再为航向融合提供参照。
- **硬铁**：机上磁体与电流产生的固定附加磁场；**软铁**：铁磁材料使磁场畸变。
- 硬铁、软铁与电机电流改变磁场观测，需要校正及异常判定。
- **优点**：结构简单、计算量小、延迟小；**局限**：不递推估计误差的协方差。

### 本章目录

## 传感器标定与滤波估计

### 第五章 滤波估计与底层控制

5.1 滤波估计与底层控制基础

**5.2 传感器标定与滤波估计**

5.3 控制器设计与控制分配

5.4 控制性能评估与调优

5.5 PX4架构与控制开发接口

5.6 底层控制开发与实验验证

5.7 其他机型与进阶控制案例

5.8 习题与课堂讨论

### 本节 5 个教学单元

#### 5.2.1 传感器标定与测量模型

教材对应：第5.1.3.2节第1部分、第5.3.1节

#### 5.2.2 互补滤波器

教材对应：第5.1.3.2节第2部分、第5.3.1节

#### 5.2.3 卡尔曼滤波器

教材对应：第5.1.3.2节第3部分

#### 5.2.4 扩展卡尔曼滤波器

教材对应：第5.1.3.2节第4部分、第5.3.1节

#### 5.2.5 滤波方法比较与验证

教材对应：第5.1.3.2节第5部分

### 5.2.3 卡尔曼滤波器：状态与不确定性

### 预测与测量不一致时怎样分配权重

| 信息    | 高度均值  | 标准差与方差（-为预测）                                             |
|-------|-------|----------------------------------------------------------|
| 模型预测  | 1.8 m | $\sigma^- = 0.2 \text{ m}, \quad P^- = 0.04 \text{ m}^2$ |
| 传感器观测 | 2.0 m | $\sigma_z = 0.1 \text{ m}, \quad R = 0.01 \text{ m}^2$   |

- 卡尔曼滤波器（KF）按不确定性融合模型与观测。
- 方差描述误差分布的宽度，不是本次误差的数值。
- 本例预测误差与观测噪声不相关；方差较小的观测获得较大权重。

### 5.2.3 卡尔曼滤波器：状态与观测方程

## 模型描述演化，观测描述传感器输出

状态方程：控制输入推动状态，过程噪声补充未解释变化

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}_d \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}_d \mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1}$$

式5.6

观测方程：传感器看到状态的某些组合

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_d \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k$$

式5.7

- $\mathbf{A}_d$ ：状态转移； $\mathbf{B}_d$ ：输入； $\mathbf{H}_d$ ：观测矩阵。
- $\mathbf{w}$ ：过程噪声； $\mathbf{v}$ ：观测噪声，通常为零均值且互不相关。
- $\mathbf{Q}_d$ 、 $\mathbf{R}_d$  为两类噪声协方差。
- $\mathbf{x}$ 、 $\mathbf{u}$ 、 $\mathbf{z}$  分别为状态、输入、观测。

### 5.2.3 卡尔曼滤波器：高度与速度状态

### 矩阵每一行对应一个有单位的物理量

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} h \\ v \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} \Delta t^2/2 \\ \Delta t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

| 量     | 尺寸           | 单位与含义                                                        |
|-------|--------------|--------------------------------------------------------------|
| 状态    | $2 \times 1$ | 高度m、速度m/s                                                    |
| 输入与观测 | $1 \times 1$ | 加速度输入m/s <sup>2</sup> 、高度观测m                                 |
| 协方差   | $2 \times 2$ | 对角：m <sup>2</sup> 与(m/s) <sup>2</sup> ，非对角：m <sup>2</sup> /s |

此处高度向上为正。教材NED的下向位置满足  $h = -z_D$ ，输入加速度也要同步变号。

### 5.2.3 卡尔曼滤波器：二状态一步预测

### 一步预测同时推进高度与速度

给定：高度1.79 m，速度0.10 m/s，加速度输入0.2 m/s<sup>2</sup>，间隔0.1 s；  
协方差对角元0.03 m<sup>2</sup>与0.01 (m/s)<sup>2</sup>，此步暂不加过程噪声。

$$h^- = h + v\Delta t + \frac{1}{2}a\Delta t^2 = 1.79 + 0.10 \times 0.1 + \frac{1}{2} \times 0.2 \times 0.1^2 = 1.801 \text{ m}$$

$$v^- = v + a\Delta t = 0.10 + 0.2 \times 0.1 = 0.12 \text{ m/s}$$

$$\mathbf{P}^- = \mathbf{A}_d \mathbf{P} \mathbf{A}_d^\top = \begin{bmatrix} 0.0301 & 0.001 \\ 0.001 & 0.01 \end{bmatrix}$$

**读法：**取a=0时高度行给出1.80 m，即一维算例；  
非对角元0.001 m<sup>2</sup>/s使高度观测也能修正速度。

### 5.2.3 卡尔曼滤波器：预测阶段

## 状态与协方差同时向前传播

状态预测：用上一更新结果和已知输入预测

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \mathbf{A}_d \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + \mathbf{B}_d \mathbf{u}_{k-1} \quad \text{式5.8}$$

协方差预测：传播原有误差，再增加过程噪声

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{A}_d \mathbf{P}_{k-1|k-1} \mathbf{A}_d^T + \mathbf{Q}_d \quad \text{式5.9}$$

- $k|k-1$ ：时刻 $k$ ，只用到 $k-1$ 的观测；简写为上标“-”，更新值记上标“+”。
- 数值例只保留高度状态，以已知速度为输入（即二状态 $a=0$ 时的高度行）。
- 上一高度1.79 m，速度0.10 m/s，间隔0.1 s，预测高度1.80 m。



## 5.2 传感器标定与滤波估计



### 5.2.3 卡尔曼滤波器：创新与增益

### 观测带来多大的修正由增益决定

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{z}_k - \mathbf{H}_d \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$$

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{H}_d \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_d^\top + \mathbf{R}_d$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_d^\top \mathbf{S}_k^{-1}$$

式5.10

- **创新量**：观测减去模型预测的观测。
- **创新协方差**：预测与测量两类不确定性在观测空间中的总宽度。
- 先映射到观测空间，再比较，维度与单位才一致。





## 5.2 传感器标定与滤波估计



### 5.2.3 卡尔曼滤波器：状态与协方差更新

## 均值被修正，不确定性也要更新

状态更新：预测加上加权创新

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_d \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})$$

式5.11

协方差更新：观测减少被约束方向的不确定性

$$\mathbf{P}_{k|k} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_d) \mathbf{P}_{k|k-1}$$

式5.12

- $\mathbf{I}$  为单位矩阵。更新后的均值和协方差共同进入下一次预测。
- 拒绝异常观测（野值）要另加门限或鲁棒处理。



### 5.2.3 卡尔曼滤波器：标量更新

### 一次增益计算得到1.96 m的估计

给定：预测1.8 m，观测2.0 m，预测方差0.04 m<sup>2</sup>，观测方差0.01 m<sup>2</sup>，直接观测高度。

$$K = \frac{0.04}{0.04 + 0.01} = 0.8, \quad v = 2.0 - 1.8 = 0.2 \text{ m}$$

$$\hat{h}^+ = 1.8 + 0.8 \times 0.2 = 1.96 \text{ m}$$

$$P^+ = (1 - 0.8) \times 0.04 = 0.008 \text{ m}^2, \quad \sigma^+ = \sqrt{0.008} = 0.0894 \text{ m}$$

观测误差方差较小，更新更靠近2.0 m；融合后的标准差比两份输入都小。

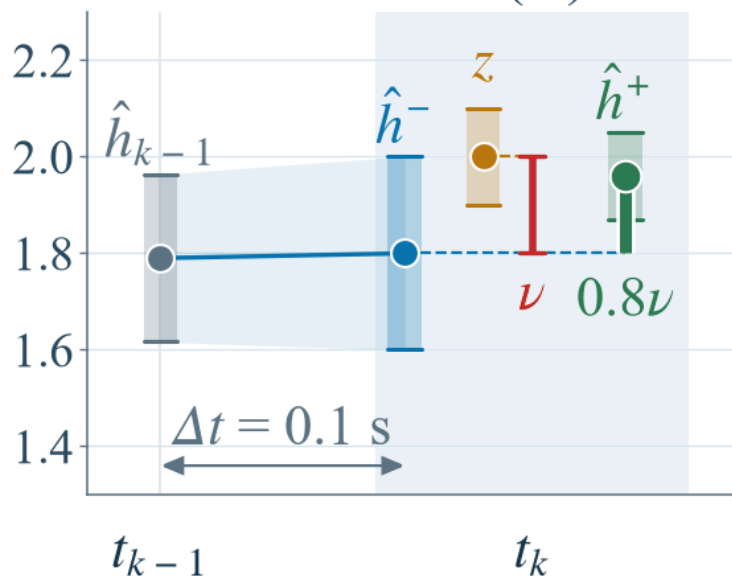
### 5.2.3 卡尔曼滤波器：预测与更新

### 预测与观测融合后，分布怎样变化

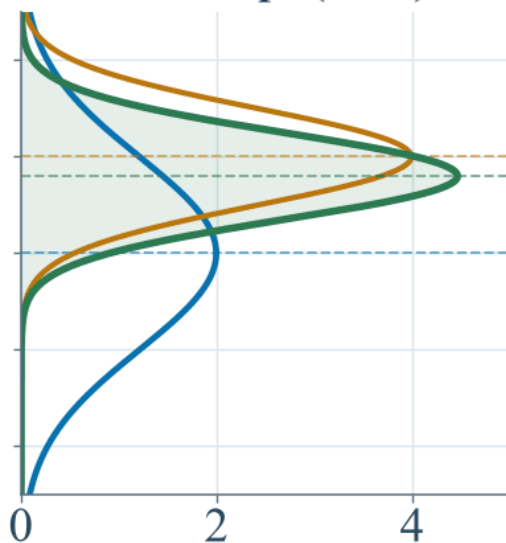
#### 标量KF：预测与更新

结果：估计只沿创新走  $0.8\nu$  到 1.96 m，更新后的分布比预测、观测都窄

高度估计  $\hat{h}$  与观测  $z$  (m)



概率密度  $p$  (1/m)



— 预测 — 观测 — 更新

$$\hat{h}^- = 1.79 + 0.10 \times 0.1 = 1.80 \text{ m}$$

$$P^- = 0.03 + 0.01 = 0.04 \text{ m}^2$$

$$z = 2.00 \text{ m}, R = 0.01 \text{ m}^2$$

$$\nu = z - \hat{h}^- = 0.20 \text{ m}$$

$$K = 0.04 / (0.04 + 0.01) = 0.8$$

0.2 观测权重  $K = 0.8$

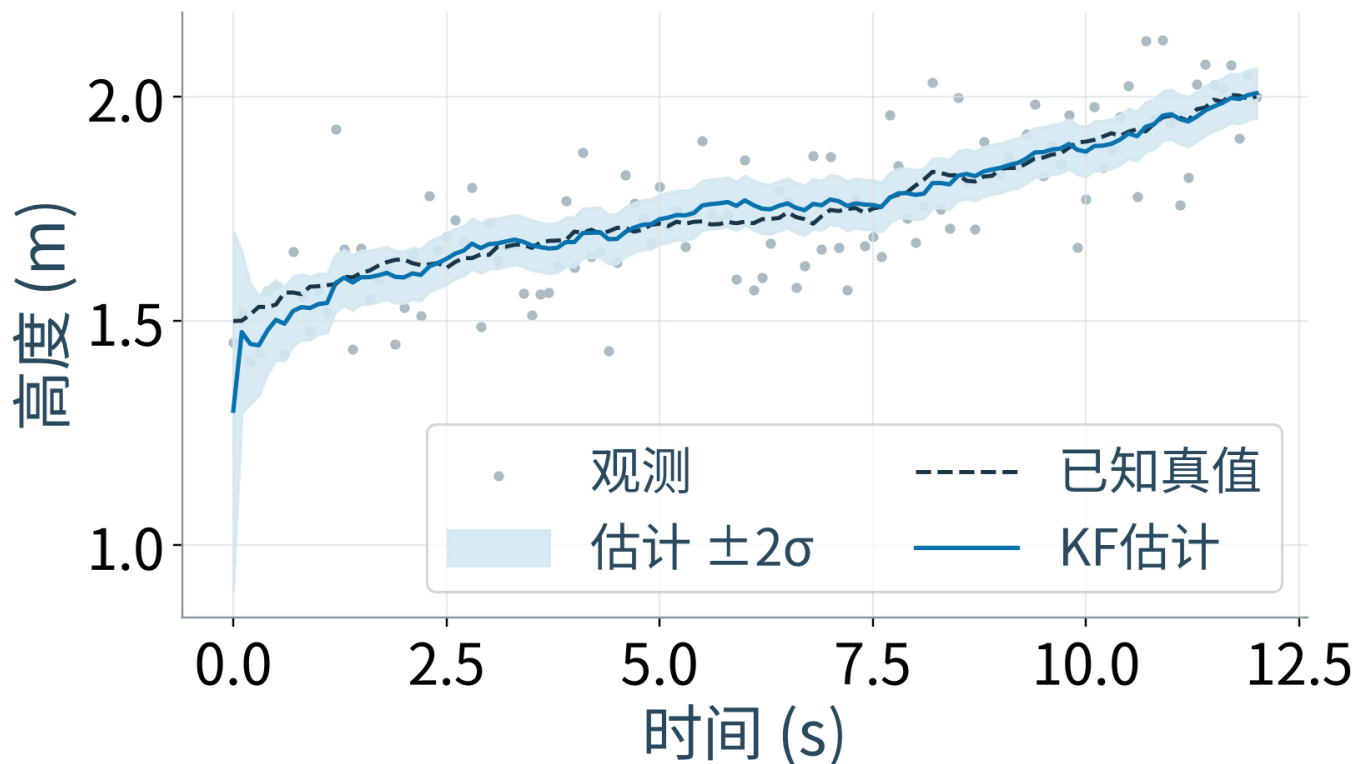
$$\hat{h}^+ = 1.80 + 0.8 \times 0.20 = 1.96 \text{ m}$$

$$P^+ = (1 - 0.8) \times 0.04 = 0.008 \text{ m}^2$$

图：高度KF一步算例（非平台实测），左为估计点 $\pm 1\sigma$ ，中为同轴密度，右为代入数值

### 5.2.3 卡尔曼滤波器：递推滤波

### 将预测与更新递推到12 s



图：一维高度递推教学计算

独立高度教学计算。

间隔0.1 s，速度0.05 m/s。

$$Q = (0.008 \text{ m})^2$$

$$R = (0.1 \text{ m})^2$$

初估1.3 m， $P_0 = 0.04 \text{ m}^2$

观测RMSE 0.105 m

估计RMSE 0.030 m

**结论：**估计从1.3 m很快贴近真值， $\pm 2\sigma$ 带随之收窄；RMSE约为观测的0.3倍。

### 本章目录

## 传感器标定与滤波估计

### 第五章 滤波估计与底层控制

5.1 滤波估计与底层控制基础

**5.2 传感器标定与滤波估计**

5.3 控制器设计与控制分配

5.4 控制性能评估与调优

5.5 PX4架构与控制开发接口

5.6 底层控制开发与实验验证

5.7 其他机型与进阶控制案例

5.8 习题与课堂讨论

### 本节 5 个教学单元

#### 5.2.1 传感器标定与测量模型

教材对应：第5.1.3.2节第1部分、第5.3.1节

#### 5.2.2 互补滤波器

教材对应：第5.1.3.2节第2部分、第5.3.1节

#### 5.2.3 卡尔曼滤波器

教材对应：第5.1.3.2节第3部分

#### 5.2.4 扩展卡尔曼滤波器

教材对应：第5.1.3.2节第4部分、第5.3.1节

#### 5.2.5 滤波方法比较与验证

教材对应：第5.1.3.2节第5部分



## 5.2 传感器标定与滤波估计



### 5.2.4 扩展卡尔曼滤波器：非线性扩展

### 非线性状态和观测采用函数计算

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1}$$

式5.13

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k$$

式5.14

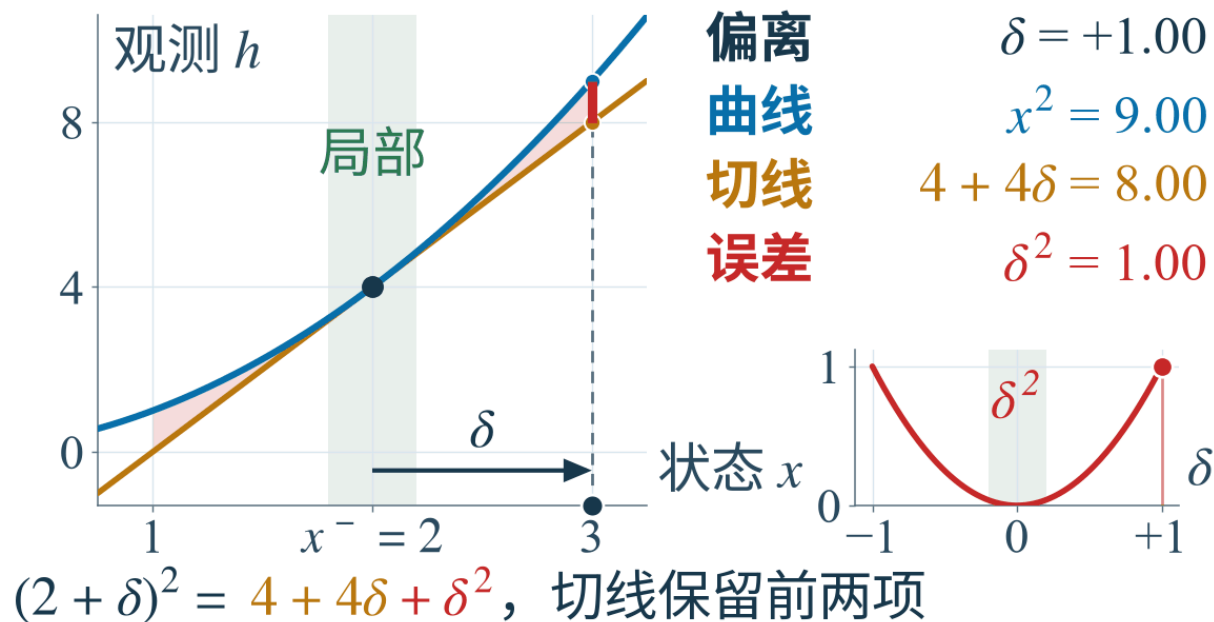
- 扩展卡尔曼滤波器（EKF）保留预测与更新，但均值经过非线性函数。
- 姿态变化、坐标旋转和非线性传感器关系都可能使映射随状态变化。
- 本单元用无量纲观测  $z = x^2 + v$  演算，先确定使用正值分支。



### 5.2.4 扩展卡尔曼滤波器：局部线性化

### 雅可比给出当前估计附近的斜率

偏离  $x^-$  越远，切线误差  $\delta^2$  越大



图：平方观测的局部切线与误差  $\delta^2$ （示意）

雅可比是各输出对各状态的偏导数矩阵。

本例观测  $h(x) = x^2$ ，当前预测  $x^- = 2$ 。

$$H = \left. \frac{dh}{dx} \right|_2 = 2 \times 2 = 4$$

红色竖条是切线误差  $\delta^2$ 。  
 切线只近似当前附近的变化。  
 每次递推重新求雅可比。

### 5.2.4 扩展卡尔曼滤波器：雅可比与预测

### 均值用函数，协方差用局部导数

$$\mathbf{F}_{k-1} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{u}_{k-1}}, \quad \mathbf{H}_k = \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}} \quad \text{式5.15}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) \quad \text{式5.16}$$

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1|k-1} \mathbf{F}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_d \quad \text{式5.17}$$

- $\mathbf{F}$  在前一更新状态求值， $\mathbf{H}$  在当前预测状态求值。
- 第四章固定工作点线性化，在这里变成随递推位置移动的局部线性化。



## 5.2 传感器标定与滤波估计



### 5.2.4 扩展卡尔曼滤波器：EKF更新

### 创新仍然使用非线性预测观测

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^\top (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^\top + \mathbf{R}_d)^{-1} \quad \text{式5.18}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})) \quad \text{式5.19}$$

$$\mathbf{P}_{k|k} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k|k-1} \quad \text{式5.20}$$

- 创新减去非线性预测观测，不是雅可比乘状态。
- 平方观测有正、负两个分支；EKF只保持当前分支附近的高斯近似。



### 5.2.4 扩展卡尔曼滤波器：非线性一步计算

### 平方观测的一次更新得到2.08

无量纲教学例：  $x^- = 2$ ,  $P^- = 0.04$ ,  $R = 0.16$ , 观测  $z = 4.4$ ,  $h(x) = x^2$ 。

$$H = 4, \quad v = 4.4 - 2^2 = 0.4, \quad S = 4^2 \times 0.04 + 0.16 = 0.8$$

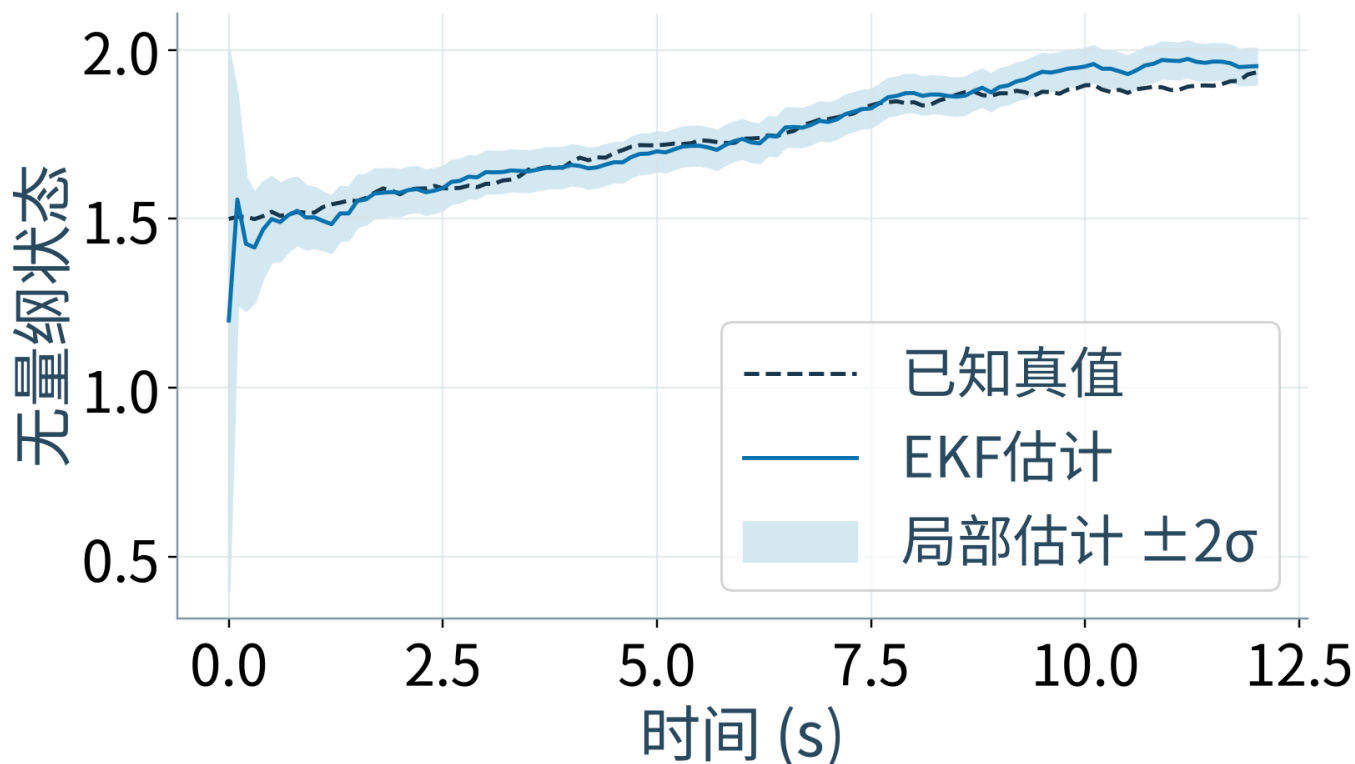
$$K = \frac{0.04 \times 4}{0.8} = 0.2, \quad x^+ = 2 + 0.2 \times 0.4 = 2.08$$

$$P^+ = (1 - 0.2 \times 4) \times 0.04 = 0.008$$

若从-2开始，同一观测得到-2.08。平方观测本身不能辨别正负，初值和其他信息决定分支。

### 5.2.4 扩展卡尔曼滤波器：完整递推

### 在正值分支上检查整段估计



图：正分支非线性状态递推教学计算

独立连续算例，初估1.2。

状态：每步增加0.004。

观测： $z = x^2 + v$ 。

间隔0.1 s，共12 s。

$Q = 0.007^2$ ， $R = 0.16$ ，

$P_0 = 0.16$ 。

整段RMSE：0.045。

终估1.951；真值1.933。

**结论：**估计很快靠近真值，

终值差约0.02；

负初值可能落入负分支。

### 5.2.4 扩展卡尔曼滤波器：姿态EKF状态

## 真实例程估计偏置和方向向量

例程目录：[安装目录]/RflySimAPIs/5.RflySimFlyCtrl/1.BasicExps/e4-FilterDesign/e4.3/  
函数：Attitude\_ekf.m；说明见e4-FilterDesign/Readme.pdf第7-9页

$$\mathbf{x} = [b_x, b_y, b_z, k_x, k_y, k_z]^T, \quad \mathbf{P} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$$

- **前三项：**陀螺零偏，rad/s。
- **后三项：**机体x/y/z轴上的重力方向分量，无量纲。
- 比力观测  $\mathbf{a}_m \approx -g\mathbf{k}$ ,  $g = \|\mathbf{a}_m\|$ 。
- 准静态水平姿态时， $\mathbf{k} \approx [0, 0, 1]^T$ 。
- PHI为代码中的状态转移雅可比近似，尺寸 $6 \times 6$ 。
- 更新后把 $\mathbf{k}$ 归一化：滚转 $\phi = \text{atan2}(k_y, k_z)$ ，俯仰 $\theta = -\arcsin k_x$ 。

### 5.2.4 扩展卡尔曼滤波器：代码与日志对照

### 比对滤波结果先核对数据条件

| 检查项   | 例程中的位置                                              | 对结果的影响          |
|-------|-----------------------------------------------------|-----------------|
| 时间与单位 | timestamp换算为秒；z为六轴观测                                | 时间错位会改变积分和创新    |
| 初值与噪声 | 脚本初值 $\mathbf{k}_0 = [0, 0, -1]^T$<br>另核协方差与噪声参数q、r | 错误初值或过小协方差影响修正  |
| 结果对照  | theta_cf、theta_ekf、theta_px4                        | PX4姿态为对照估计，不是真值 |

- **约定：**前右下、水平静止时 $\mathbf{a}_m \approx [0, 0, -g]^T$ ， $\mathbf{k}_0 \approx [0, 0, 1]^T$ 。
- **初值检查：**流程见“e4.3例程”一页。
- **近似：**机动时用比力模长近似重力，也会影响观测模型。

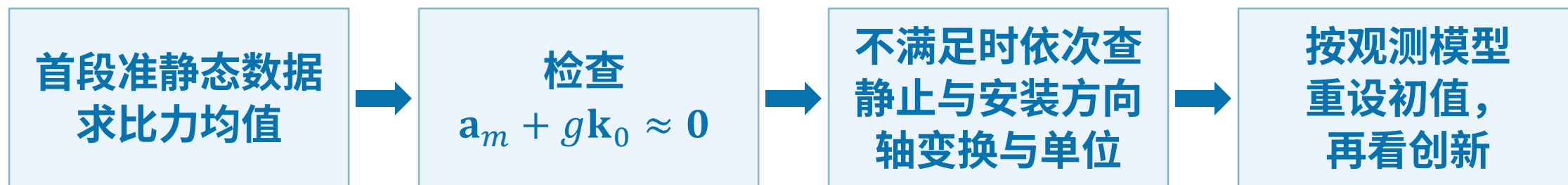
### 5.2.4 扩展卡尔曼滤波器：e4.3例程

## 运行e4.3并检查方向初值

例程目录：[安装目录]/RflySimAPIs/5.RflySimFlyCtrl/1.BasicExps/e4-FilterDesign/e4.3/

入口文件：Readme.pdf（第7-9页）；运行Attitude\_estimator.m

- **运行：** MATLAB切到e4.3，确认logdata.mat、Attitude\_cf.m、Attitude\_ekf.m同目录，运行Attitude\_estimator.m。
- **现象：** 返回提示符并弹出4幅图：俯仰、滚转各一幅cf/ekf/px4对照、一幅am/gm/ekf对照。
- **参数：** tao=0.3；w=[0.08, 0.01]传给q，v=50传给r； $P_0 = 100I$ ， $k_0 = [0, 0, -1]^T$ 。



### 本章目录

## 传感器标定与滤波估计

### 第五章 滤波估计与底层控制

5.1 滤波估计与底层控制基础

**5.2 传感器标定与滤波估计**

5.3 控制器设计与控制分配

5.4 控制性能评估与调优

5.5 PX4架构与控制开发接口

5.6 底层控制开发与实验验证

5.7 其他机型与进阶控制案例

5.8 习题与课堂讨论

### 本节 5 个教学单元

#### 5.2.1 传感器标定与测量模型

教材对应：第5.1.3.2节第1部分、第5.3.1节

#### 5.2.2 互补滤波器

教材对应：第5.1.3.2节第2部分、第5.3.1节

#### 5.2.3 卡尔曼滤波器

教材对应：第5.1.3.2节第3部分

#### 5.2.4 扩展卡尔曼滤波器

教材对应：第5.1.3.2节第4部分、第5.3.1节

#### **5.2.5 滤波方法比较与验证**

教材对应：第5.1.3.2节第5部分

### 5.2.5 滤波方法比较与验证：信号滤波方法

### 按噪声与统计条件选择信号滤波

| 方法    | 基本机制        | 适用条件与代价                         |
|-------|-------------|---------------------------------|
| 中值滤波  | 窗口内排序取中位数   | 抑制尖峰，窗口会损失短时细节                  |
| 维纳滤波  | 统计模型下最小均方误差 | 依赖信号和噪声统计，常用线性平稳假设              |
| 自适应滤波 | 根据数据更新滤波系数  | 最小均方（LMS）可能收敛慢，递归最小二乘（RLS）计算开销高 |

- **选择依据：**噪声形态（尖峰或宽带）、统计特性是否已知、允许的延迟。
- 中值滤波不依赖运动模型，也不输出状态协方差。

### 5.2.5 滤波方法比较与验证：非线性状态滤波分布怎样传播决定适用问题

| 方法             | 状态分布的传播                           | 局限                 |
|----------------|-----------------------------------|--------------------|
| EKF            | 均值经过非线性函数，导数传播协方差                 | 局部线性化，对初值敏感        |
| 无迹卡尔曼滤波器 (UKF) | 按规则选取一组采样点（sigma点）经非线性映射，重建均值与协方差 | 避免显式求导，精度仍取决于模型与参数 |
| 粒子滤波（PF）       | 很多带权样本逼近后验                        | 可表示多峰，粒子退化与计算量需处理  |

算法更复杂并不保证更准确。维度、可用观测、初始分布和实时计算预算共同决定选择。

### 5.2.5 滤波方法比较与验证：结果评价

## 估计更平滑是否改善了控制反馈

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (\hat{x}_k - x_k)^2}$$

### 有已知真值

**证据：** RMSE、偏置、相位或时间滞后

**解释：** 误差和延迟都影响控制

### 没有真值

**证据：** 创新、独立观测、时间对齐

**解释：** 一致性检查不能单独证明精度

### 实时实现

**证据：** 单步耗时、更新率、数据新鲜度

**解释：** 计算赶不上采样会改变闭环条件

$N$ 为样本数； $\hat{x}_k$ 为估计； $x_k$ 为真值；RMSE单位与状态相同。

### 5.2.5 滤波方法比较与验证：评价算例

## 更平滑的估计不一定误差更小

数据：“同一段输入比较”算例（教学算例，非平台实测），  
时长20 s，间隔0.02 s，陀螺剩余偏置 $0.3^\circ/\text{s}$ 。

**互补  $\tau=0.3 \text{ s}$**

**相邻帧变化均方根：**  $0.122^\circ$

**整段RMSE：**  $0.49^\circ$

**10–20 s平均误差：**  $0.14^\circ$

**互补  $\tau=1.5 \text{ s}$**

**相邻帧变化均方根：**  $0.075^\circ$

**整段RMSE：**  $0.54^\circ$

**10–20 s平均误差：**  $0.50^\circ$

$$e_{ss} = b_g \tau: \quad 0.3 \times 0.3 = 0.09^\circ, \quad 0.3 \times 1.5 = 0.45^\circ$$

**结论：**  $\tau$ 越大曲线越平滑，陀螺偏置留下的稳态误差也越大；评价要同时看误差、偏置和延迟。

### 5.2.5 滤波方法比较与验证：可靠性边界

## 异常出现时先识别信息在哪一环失效

| 现象    | 相关证据          | 处理方向            |
|-------|---------------|-----------------|
| 剧烈机动  | 比力模长、创新持续增大   | 降低重力观测可信程度或改善模型 |
| 时间戳错位 | 相同事件出现在不同时间   | 先对齐数据再融合        |
| 观测中断  | 仅预测；不确定性依模型而变 | 按可用状态调整反馈与降级方式  |
| 初值错误  | 分支错误或长期大创新    | 核对初值、坐标与初始化条件   |

可信程度与有效标志用于选择反馈；观测长期缺失时，估计精度通常会下降。

### 课堂练习

## 观测方差增大后，结果向哪边移动

课堂练习：保持预测1.8 m和方差0.04 m<sup>2</sup>，观测2.0 m，把观测方差改为0.16 m<sup>2</sup>。求增益、估计和更新方差。

$$K = \frac{0.04}{0.04 + 0.16} = 0.2, \quad \hat{h}^+ = 1.8 + 0.2(2.0 - 1.8) = 1.84 \text{ m}$$

$$P^+ = (1 - 0.2) \times 0.04 = 0.032 \text{ m}^2$$

- **参考要点：**观测权重由0.8减到0.2，估计更靠近预测。
- 标准差0.4 m对应方差0.16 m<sup>2</sup>；误把0.4代入会得到K≈0.09。

### 课堂练习

## 标定补偿与平方观测更新各算一步

**题1 标定补偿：**例程按 $a_{\text{cal}} = K_a(a_{\text{raw}} + b_a)$ 校正。已知 $K_a = 1.02$ ， $b_a = 0.20 \text{ m/s}^2$ ，某轴原始读数 $9.40 \text{ m/s}^2$ 。

①求校正值；②写出测量模型 $y = sx + b$ 中的 $s$ 与 $b$ ，说明 $b_a$ 与 $b$ 的符号关系。

**题2 EKF一步更新：**观测 $h(x) = x^2$ （无量纲），

预测 $x^- = 3$ ， $P^- = 0.05$ ， $R = 0.25$ ，观测 $z = 9.6$ 。

求 $H$ 、创新 $v$ 、 $S$ 、 $K$ 、 $x^+$ 与 $P^+$ ，并说明创新为什么不能用 $Hx^-$ 计算。



## 5.2 传感器标定与滤波估计



参考要点

### 先定符号与观测函数，再代入数值

**题1：**校正值  $1.02 \times (9.40 + 0.20) \approx 9.79 \text{ m/s}^2$ ，误用  $-0.20$  会得  $9.38 \text{ m/s}^2$ ；  
 $s = 1/K_a \approx 0.980$ ， $b = -b_a = -0.20 \text{ m/s}^2$ ，两者符号相反。

$$H = 2x^- = 6, \quad v = 9.6 - 3^2 = 0.6, \quad S = 6^2 \times 0.05 + 0.25 = 2.05$$

$$K = \frac{0.05 \times 6}{2.05} \approx 0.146, \quad x^+ = 3 + 0.146 \times 0.6 \approx 3.088$$

$$P^+ = (1 - KH)P^- = \frac{0.25}{2.05} \times 0.05 \approx 0.0061$$

- **题2易错：**创新若用  $Hx^- = 18$ ，会得  $v = -8.4$ 、 $x^+ \approx 1.77$ ，修正方向完全错误。
- 互补权重与方法选择的练习见课件5.8习题2、习题7。



### 本节小结

## 状态反馈可用，需要模型与观测同时成立

| 方法       | 解决的问题          | 易错点            |
|----------|----------------|----------------|
| 标定       | 测量与物理量的对应      | 补偿符号、尺度和轴方向    |
| 互补滤波     | 短时变化与长期参照融合    | 机动比力、采样间隔和权重   |
| KF / EKF | 递推估计及不确定性传播    | 噪声方差、创新空间和局部初值 |
| 方法选择     | 按误差、延迟、算力选择并验证 | 只看平滑；把PX4姿态当真值 |

- 交付给控制器：状态值、单位和坐标、时间戳、可信程度。
- 课件5.3使用目标与这些状态形成误差，再计算可实现的控制动作。