本章目录

传感器标定与滤波估计

第五章 滤波估计与底层控制

5.1 滤波估计与底层控制基础

5.2 传感器标定与滤波估计

5.3 控制器设计与控制分配

5.4 控制性能评估与调优

5.5 PX4架构与控制开发接口

5.6 底层控制开发与实验验证

5.7 其他机型与进阶控制案例

5.8 习题与课堂讨论

本节 5 个教学单元

5.2.1 传感器标定与测量模型
教材对应：第5.1.3.2节第1部分、第5.3.1节

5.2.2 互补滤波器
教材对应：第5.1.3.2节第2部分、第5.3.1节

5.2.3 卡尔曼滤波器
教材对应：第5.1.3.2节第3部分

5.2.4 扩展卡尔曼滤波器
教材对应：第5.1.3.2节第4部分、第5.3.1节

5.2.5 滤波方法比较与验证
教材对应：第5.1.3.2节第5部分

5.2.1 传感器标定与测量模型：姿态测量

状态、观测与测量误差各是什么

惯性测量单元（IMU）提供角速度与比力，控制器需要姿态等状态。

真实状态 → 传感器观测 → 校正与融合 → 状态估计

名称	回答的问题	姿态任务中的例子
状态	载具现在怎样运动	俯仰角、陀螺偏置
观测	传感器实际输出什么	三轴角速度与三轴比力
误差	观测与模型为何不同	偏置、尺度、随机噪声、安装误差

5.2.1 传感器标定与测量模型：估计支路输入输出

从六轴观测到控制器需要的反馈

六轴IMU观测
角速度与比力
→
校正与姿态估计
滚转、俯仰
→
姿态/角速度控制
接收状态反馈

图：教材图5.2中的估计支路（传感器观测与状态反馈是两类信号）

量	输入/输出语义	对控制器的影响
角速度观测	rad/s；去偏并保持机体轴约定	角速度反馈不等于姿态角
加速度观测	m/s^2；比力而非运动加速度	准静态时提供重力方向参照
估计与时效	姿态rad；协方差与采样时间	检查可信度及延迟，再进入控制环

5.2.1 传感器标定与测量模型：误差模型

一维测量模型中的偏置与尺度

测量值由比例、偏移和噪声共同组成

$$y = sx + b + n$$

已知标定参数时，先减偏置再除尺度

$$\hat{x} = \frac{y - b}{s} = \frac{10.2 - 0.1}{1.01} = 10.0\ \mathrm{m/s^2}$$

- x：真值；y：读数；b：偏置；n：噪声，单位均为$\mathrm{m/s^2}$。
- s：无量纲尺度因子，决定测量响应的斜率。
- 偏置使响应整体平移；确定性校正后仍有随机噪声。

5.2.1 传感器标定与测量模型：三轴测量模型

轴间耦合与安装方向也影响观测

$$\mathbf{y} = \mathbf{S}\mathbf{x} + \mathbf{b} + \mathbf{n}$$

误差	物理含义	怎样获得识别信息
三轴偏置	各轴都有固定偏移	已知姿态/参考下识别偏置
尺度与轴间耦合	斜率不同，其他轴混入	覆盖多个姿态与方向
安装误差	传感器轴与机体轴不重合	方向参考或外部姿态基准

$\mathbf{S}$ 为 3×3 矩阵，$\mathbf{b}$ 为 3×1 向量。仅一段静止数据难以辨认所有参数。

5.2.1 传感器标定与测量模型：静态与动态标定

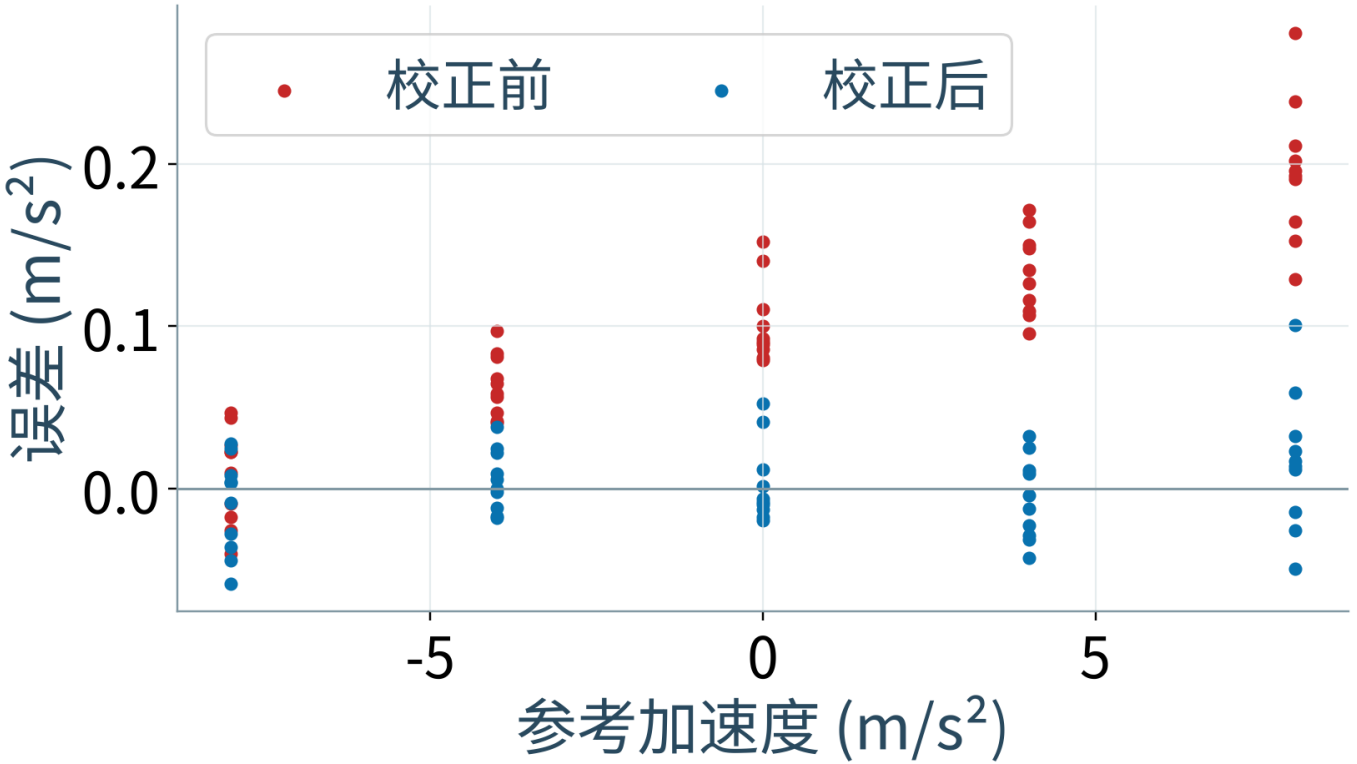
采集范围决定能识别哪些误差

任务	数据与参考	验证内容
加速度计静态标定	静止，多姿态覆盖重力方向	偏置、尺度与轴间误差
动态标定	已知轨迹或外部运动参考	滞后、频率响应与运动误差
磁力计标定	多方向磁场观测	硬铁偏置、软铁尺度与耦合

- 陀螺静止数据主要估零偏；尺度与轴间误差需已知角运动参考。
- 参数拟合使用训练数据，误差判断使用独立留出数据。
- 姿态覆盖不足、时间戳错位或单位错误会使小残差失去解释意义。

5.2.1 传感器标定与测量模型：留出验证

校正结果用独立数据检查



图：留出姿态的校正前后误差（教学数据）

拟合160点，留出50点。
尺度1.01000
偏置0.0987 m/s²
均方根误差（RMSE）：
校正前0.122 m/s²
校正后0.029 m/s²
结论：校正前误差整体偏正且随参考值增大，偏置与尺度并存；校正后留出误差集中在0附近。

5.2.1 传感器标定与测量模型：测量模型验证

补偿参数的符号取决于实际实现

例程目录：[安装目录]/RflySimAPIs/5.RflySimFlyCtrl/1.BasicExps/e3-SensorCalib/
入口文件：Readme.pdf（第2、7–9页）；离线计算见e3.1/calLM.m

$$\mathbf{a}_{\text{cal}} = \mathbf{K}_a(\mathbf{a}_{\text{raw}} + \mathbf{b}_a)$$

$$k = 1/s, \quad b_a = -b, \quad k(y + b_a) = (y - b)/s$$

- **运行：** MATLAB切到e3.1，确认e_acc_A.bin同目录，运行calLM.m。
- **现象：** 弹出采集点、LM迭代与标定前后对比图，命令行打印尺度与补偿量。
- **判据：** 按calFunc.m校正后模长贴近重力参考；留出数据再查轴方向。
- **排查：** 文件名与CAL_ACC_SCALE/OFF须与采集时一致；再查单位与姿态覆盖。

正确的单位、坐标和补偿符号，是滤波器的输入条件。

本章目录

传感器标定与滤波估计

第五章 滤波估计与底层控制

5.1 滤波估计与底层控制基础

5.2 传感器标定与滤波估计

5.3 控制器设计与控制分配

5.4 控制性能评估与调优

5.5 PX4架构与控制开发接口

5.6 底层控制开发与实验验证

5.7 其他机型与进阶控制案例

5.8 习题与课堂讨论

本节 5 个教学单元

5.2.1 传感器标定与测量模型
教材对应：第5.1.3.2节第1部分、第5.3.1节

5.2.2 互补滤波器
教材对应：第5.1.3.2节第2部分、第5.3.1节

5.2.3 卡尔曼滤波器
教材对应：第5.1.3.2节第3部分

5.2.4 扩展卡尔曼滤波器
教材对应：第5.1.3.2节第4部分、第5.3.1节

5.2.5 滤波方法比较与验证
教材对应：第5.1.3.2节第5部分

5.2.2 互补滤波器：姿态信息来源

陀螺与重力参照为何能够互补

θ_{prev}：上次姿态；ω：角速度；b_g：零偏；Δt：采样间隔。

$$\theta_{\text{gyro}} = \theta_{\text{prev}} + (\omega - b_g)\Delta t \qquad \text{式5.2}$$

通道	直接测得什么	可提供的姿态信息
陀螺仪	角速度，rad/s	积分反映短时角度变化； 偏置造成漂移
加速度计	比力，m/s^2	准静态时给出重力方向的滚转、俯仰参考

Δt 为采样间隔，单位s。一般三维姿态须使用姿态运动学，体轴角速度与欧拉角导数并不相同。

5.2.2 互补滤波器：比力与坐标

加速度计静止时为何仍有输出

$$ {}^{b}\mathbf{a}_{\text{acc}} \approx {}^{b}\mathbf{a}_{\text{motion}} - \mathbf{R}_{e}^{b}\ {}^{e}\mathbf{g} $$

式5.3

状态	运动加速度	理想比力输出
水平静止	$\mathbf{0}$	$[0,0,-9.8]^{\mathsf{T}}\ \text{m/s}^2$
自由落体	$\mathbf{g}$	约为零
水平加速	$a_x = 2\ \text{m/s}^2$	$[2,0,-9.8]^{\mathsf{T}}\ \text{m/s}^2$

地面系采用北东地（NED），机体系为前、右、下。$\mathbf{R}_{e}^{b}$ 把地面系向量转到机体系。

5.2.2 互补滤波器：加速度姿态

重力投影给出俯仰角参照

$$\theta_{\text{acc}} = \arctan\left(\frac{a_x}{\sqrt{a_y^2 + a_z^2}}\right) = atan2\left(a_x, \sqrt{a_y^2 + a_z^2}\right) \quad \text{式5.4}$$

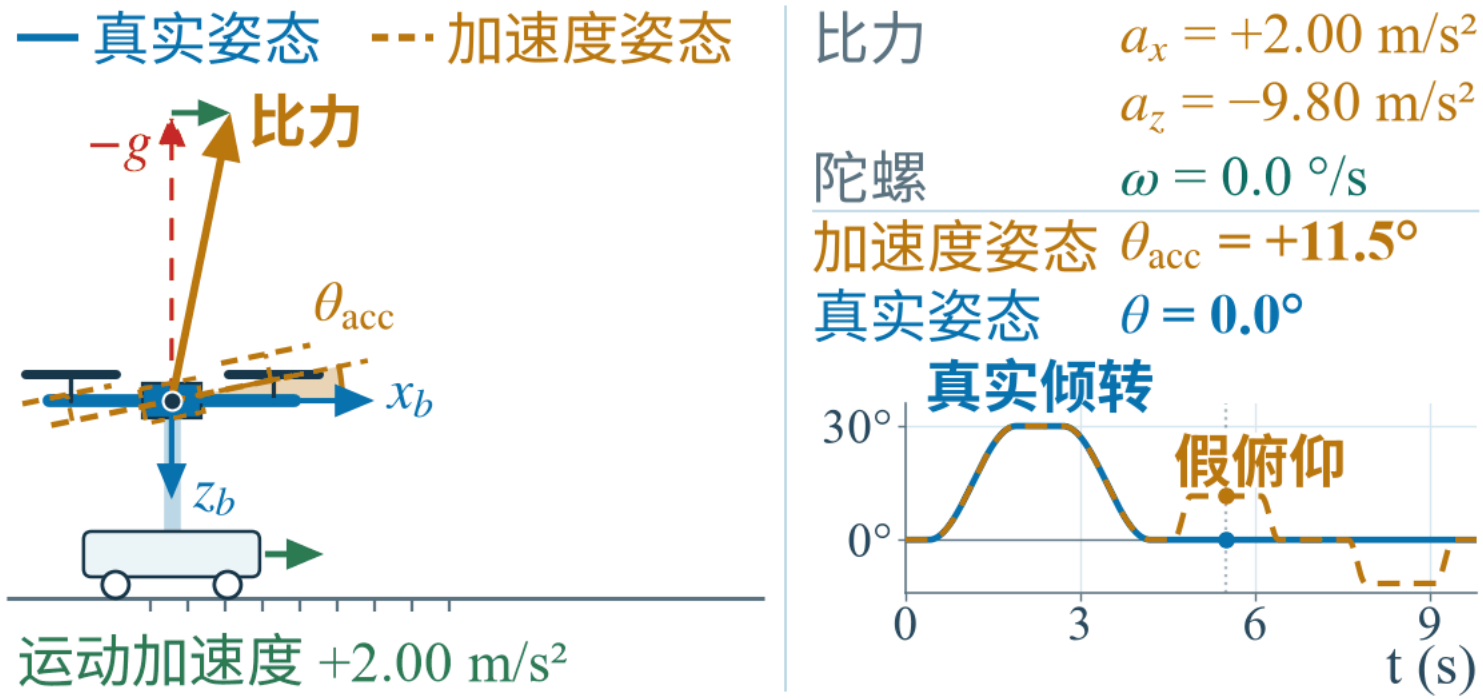
$$\mathbf{a} = [4.9, 0, -8.487]^{\mathsf{T}}\ \text{m/s}^2, \quad \theta_{\text{acc}} = atan2(4.9, 8.487) = 30°$$

- 准静态、已校正，并采用常规±90°俯仰范围。
- atan2改善除零计算，但不能单凭该式识别倒置姿态。
- 水平加速2 m/s²也会算出约11.5°，机动时应融合其他信息。

5.2.2 互补滤波器：机动中的假俯仰

只看比力分不清机体倾转与水平加速

加速度姿态：真实倾转时正确，水平加速时出现假俯仰



图：倾转与水平加速时的加速度姿态（教学仿真）

真实抬头30°：比力竖直，机体轴随之转动，θ_{acc}与θ同为30°；陀螺只在转动中有读数。

水平加速2 m/s²：$\theta = 0°$、陀螺读数为0，比力前倾却使$\theta_{acc} \approx 11.5°$；加速度为−2 m/s²时为−11.5°。

结论：只看比力分不清倾转与水平加速，需要陀螺的短时信息参与融合。

5.2.2 互补滤波器：互补融合

用一帧数据算出融合后的角度

给定：前一估计10°，角速度2°/s，偏置0，间隔0.1 s，加速度姿态9°，权重0.9。

$$\theta_{\text{gyro}} = 10^\circ + 2^\circ/\text{s} \times 0.1\,\text{s} = 10.2^\circ$$

$$\theta = \alpha\theta_{\text{gyro}} + (1-\alpha)\theta_{\text{acc}} = 0.9 \times 10.2^\circ + 0.1 \times 9^\circ = 10.08^\circ \quad \text{式5.5}$$

- 下一次积分从融合结果10.08°继续，每次融合都修正后续预测。
- 本例全部采用度。程序内部采用弧度时，角度与角速度同时换算。

5.2.2 互补滤波器：时间常数

采样间隔变化时权重也随之变化

$$\alpha = \frac{\tau}{\tau + \Delta t}, \qquad 1 - \alpha = \frac{\Delta t}{\tau + \Delta t}$$

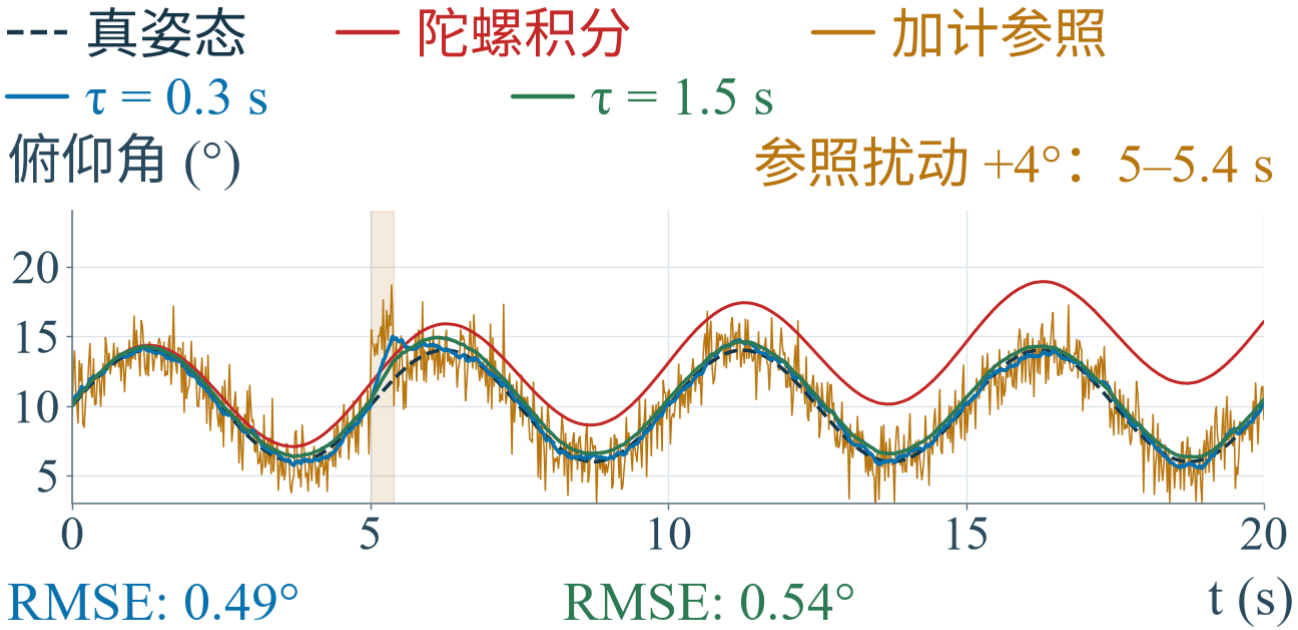
时间常数	采样间隔	陀螺预测权重
0.3 s	0.02 s	$0.3/0.32 = 0.9375$
0.3 s	0.10 s	$0.3/0.40 = 0.75$
1.5 s	0.02 s	$1.5/1.52 \approx 0.9868$

高频变化取自陀螺、低频趋势取自加速度计，分界由τ 决定，单位为s。

5.2.2 互补滤波器：滤波效果

同一段输入比较噪声、漂移与响应

融合减轻漂移，时间常数改变修正强度



10–20 s 平均误差：+0.143° / +0.504°

图：互补姿态逐次预测与修正

独立教学计算，20 s。
间隔0.02 s，初值10°。
陀螺剩余偏置0.3°/s。
5–5.4 s参照增加4°。
RMSE：陀螺 3.48°；
互补0.3 s 0.49°；
互补1.5 s 0.54°。
结论：红线20 s漂移约6°；两条互补都压到约0.5°；1.5 s受5 s扰动小，但偏置残留多。

5.2.2 互补滤波器：真实函数

简化姿态函数的输入与计算边界

e4.1/Attitude_cf.m：function [phi_cf, theta_cf] = Attitude_cf(dt, z, phi_cf_k, theta_cf_k, tao)
z = [gx, gy, gz, ax, ay, az]'，单位rad/s与m/s²；角度单位rad

$$\theta_{\text{am}} = \arcsin(a_x/\|\mathbf{a}\|), \quad \theta_k = \frac{\tau}{\tau+\Delta t}(\theta_{k-1} + g_y\Delta t) + \frac{\Delta t}{\tau+\Delta t}\theta_{\text{am}}$$

- g_y（代码gy）为机体y轴陀螺角速度（rad/s）；θ_{am}即θ_{acc}（rad）。
- Attitude_cf.m输入：间隔、六轴观测、前一滚转/俯仰角及tao；比力m/s²。
- 小姿态单轴近似；常规俯仰范围内，两种俯仰式一致。
- 比力模长过小或接近奇异姿态时，先检查输入有效性。

- **调用关系：**e4.3的Attitude_estimator.m调用它；e4.1驱动在循环内写同一公式。

5.2.2 互补滤波器：e4.1与e4.2例程

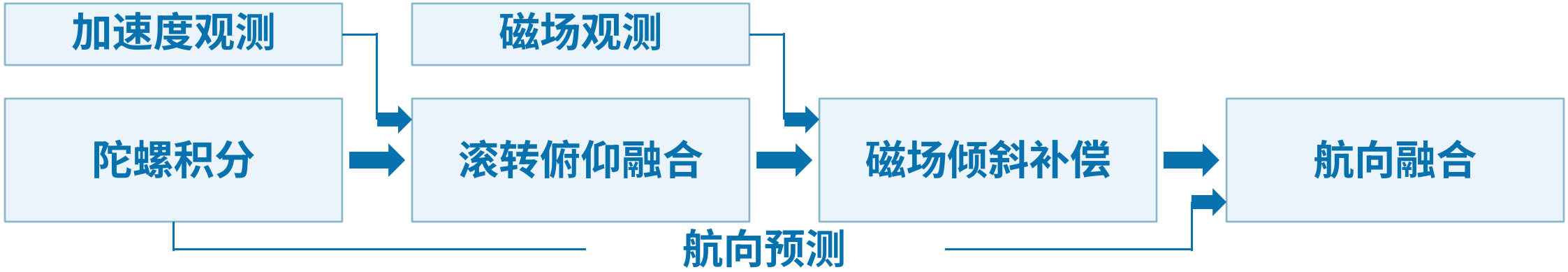
用实飞日志运行互补滤波并比较τ

例程目录：[安装目录]/RflySimAPIs/5.RflySimFlyCtrl/1.BasicExps/e4-FilterDesign/
入口文件：Readme.pdf（第2–6页）；e4.1/Attitude_estimator0_fly.m；e4.2/Attitude_cf_tao.m

- **运行：**MATLAB切到e4.1，确认logdata.mat同目录，运行Attitude_estimator0_fly.m；再到e4.2运行Attitude_cf_tao.m。
- **现象：**e4.1弹出pitch、roll两图，上半gyro/acc/cf、下半cf/px4；e4.2弹出一幅俯仰图，τ取0.01、0.1、1三条线。
- **读图：**cf比acc平滑，又不随gyro漂移；τ越大越接近陀螺积分（由$\alpha=\tau/(\tau+\Delta t)$推断）。
- 已有e4_A.bin：在e4.1运行Attitude_estimator0.m离线计算；硬件采集见课件5.6.5「日志复核」页。
- **排查：**文件名与数据一致；Ts由timestamp（μs）换算为s；默认tao=0.1，与“同一段输入比较”算例不同。

5.2.2 互补滤波器：航向与适用范围

重力不能独立确定偏航角



- 重力方向约束滚转和俯仰，绕重力轴转动不改变重力观测。
- 磁场先经过倾斜补偿，再为航向融合提供参照。
- **硬铁：**机上磁体与电流产生的固定附加磁场；**软铁：**铁磁材料使磁场畸变。
- 硬铁、软铁与电机电流改变磁场观测，需要校正及异常判定。
- **优点：**结构简单、计算量小、延迟小；**局限：**不递推估计误差的协方差。

本章目录

传感器标定与滤波估计

第五章 滤波估计与底层控制

5.1 滤波估计与底层控制基础

5.2 传感器标定与滤波估计

5.3 控制器设计与控制分配

5.4 控制性能评估与调优

5.5 PX4架构与控制开发接口

5.6 底层控制开发与实验验证

5.7 其他机型与进阶控制案例

5.8 习题与课堂讨论

本节 5 个教学单元

5.2.1 传感器标定与测量模型
教材对应：第5.1.3.2节第1部分、第5.3.1节

5.2.2 互补滤波器
教材对应：第5.1.3.2节第2部分、第5.3.1节

5.2.3 卡尔曼滤波器
教材对应：第5.1.3.2节第3部分

5.2.4 扩展卡尔曼滤波器
教材对应：第5.1.3.2节第4部分、第5.3.1节

5.2.5 滤波方法比较与验证
教材对应：第5.1.3.2节第5部分

5.2.3 卡尔曼滤波器：状态与不确定性

预测与测量不一致时怎样分配权重

信息	高度均值	标准差与方差（−为预测）
模型预测	1.8 m	$\sigma^- = 0.2\ \mathrm{m}, \quad P^- = 0.04\ \mathrm{m}^2$
传感器观测	2.0 m	$\sigma_z = 0.1\ \mathrm{m}, \quad R = 0.01\ \mathrm{m}^2$

- 卡尔曼滤波器（KF）按不确定性融合模型与观测。
- 方差描述误差分布的宽度，不是本次误差的数值。
- 本例预测误差与观测噪声不相关；方差较小的观测获得较大权重。

5.2.3 卡尔曼滤波器：状态与观测方程

模型描述演化，观测描述传感器输出

状态方程：控制输入推动状态，过程噪声补充未解释变化

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}_d\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}_d\mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1} \quad \text{式5.6}$$

观测方程：传感器看到状态的某些组合

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_d\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad \text{式5.7}$$

- $\mathbf{A}_d$：状态转移；$\mathbf{B}_d$：输入；$\mathbf{H}_d$：观测矩阵。
- $\mathbf{w}$：过程噪声；$\mathbf{v}$：观测噪声，通常为零均值且互不相关。
- $\mathbf{Q}_d$、$\mathbf{R}_d$ 为两类噪声协方差。
- $\mathbf{x}$、$\mathbf{u}$、$\mathbf{z}$ 分别为状态、输入、观测。

5.2.3 卡尔曼滤波器：高度与速度状态

矩阵每一行对应一个有单位的物理量

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}h\\v\end{bmatrix},\quad \mathbf{A}_d=\begin{bmatrix}1 & \Delta t\\0 & 1\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}_d=\begin{bmatrix}\Delta t^2/2\\ \Delta t\end{bmatrix},\quad \mathbf{H}_d=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$$

量	尺寸	单位与含义
状态	2×1	高度m、速度m/s
输入与观测	1×1	加速度输入m/s^2、高度观测m
协方差	2×2	对角：m^2与$(m/s)^2$，非对角：m^2/s

此处高度向上为正。教材NED的下向位置满足 $h=-z_D$，输入加速度也要同步变号。

5.2.3 卡尔曼滤波器：二状态一步预测

一步预测同时推进高度与速度

给定：高度1.79 m，速度0.10 m/s，加速度输入0.2 m/s²，间隔0.1 s；
协方差对角元0.03 m²与0.01 (m/s)²，此步暂不加过程噪声。

$$h^- = h + v\Delta t + \frac{1}{2}a\Delta t^2 = 1.79 + 0.10 \times 0.1 + \frac{1}{2} \times 0.2 \times 0.1^2 = 1.801\ \text{m}$$

$$v^- = v + a\Delta t = 0.10 + 0.2 \times 0.1 = 0.12\ \text{m/s}$$

$$\mathbf{P}^- = \mathbf{A}_d \mathbf{P} \mathbf{A}_d^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 0.0301 & 0.001 \\ 0.001 & 0.01 \end{bmatrix}$$

读法：取a=0时高度行给出1.80 m，即一维算例；
非对角元0.001 m²/s使高度观测也能修正速度。

5.2.3 卡尔曼滤波器：预测阶段

状态与协方差同时向前传播

状态预测：用上一更新结果和已知输入预测

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \mathbf{A}_d \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + \mathbf{B}_d \mathbf{u}_{k-1}$$ 式5.8

协方差预测：传播原有误差，再增加过程噪声

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{A}_d \mathbf{P}_{k-1|k-1} \mathbf{A}_d^{\top} + \mathbf{Q}_d$$ 式5.9

- $k|k-1$：时刻k，只用到k−1的观测；简写为上标“−”，更新值记上标“+”。
- 数值例只保留高度状态，以已知速度为输入（即二状态a=0时的高度行）。
- 上一高度1.79 m，速度0.10 m/s，间隔0.1 s，预测高度1.80 m。

5.2.3 卡尔曼滤波器：创新与增益

观测带来多大的修正由增益决定

$$\boldsymbol{\nu}_k = \mathbf{z}_k - \mathbf{H}_d \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$$

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{H}_d \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_d^{\top} + \mathbf{R}_d$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_d^{\top} \mathbf{S}_k^{-1}$$

式5.10

- **创新量：**观测减去模型预测的观测。
- **创新协方差：**预测与测量两类不确定性在观测空间中的总宽度。
- 先映射到观测空间，再比较，维度与单位才一致。

5.2.3 卡尔曼滤波器：状态与协方差更新

均值被修正，不确定性也要更新

状态更新：预测加上加权创新

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_d\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \quad \text{式5.11}$$

协方差更新：观测减少被约束方向的不确定性

$$\mathbf{P}_{k|k} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{H}_d)\mathbf{P}_{k|k-1} \quad \text{式5.12}$$

- $\mathbf{I}$ 为单位矩阵。更新后的均值和协方差共同进入下一次预测。
- 拒绝异常观测（野值）要另加门限或鲁棒处理。

5.2.3 卡尔曼滤波器：标量更新

一次增益计算得到1.96 m的估计

给定：预测1.8 m，观测2.0 m，预测方差0.04 m²，观测方差0.01 m²，直接观测高度。

$$K = \frac{0.04}{0.04 + 0.01} = 0.8, \quad \nu = 2.0 - 1.8 = 0.2\ \text{m}$$

$$\hat{h}^{+} = 1.8 + 0.8 \times 0.2 = 1.96\ \text{m}$$

$$P^{+} = (1 - 0.8) \times 0.04 = 0.008\ \text{m}^2, \quad \sigma^{+} = \sqrt{0.008} = 0.0894\ \text{m}$$

观测误差方差较小，更新更靠近2.0 m；融合后的标准差比两份输入都小。

5.2.3 卡尔曼滤波器：预测与更新

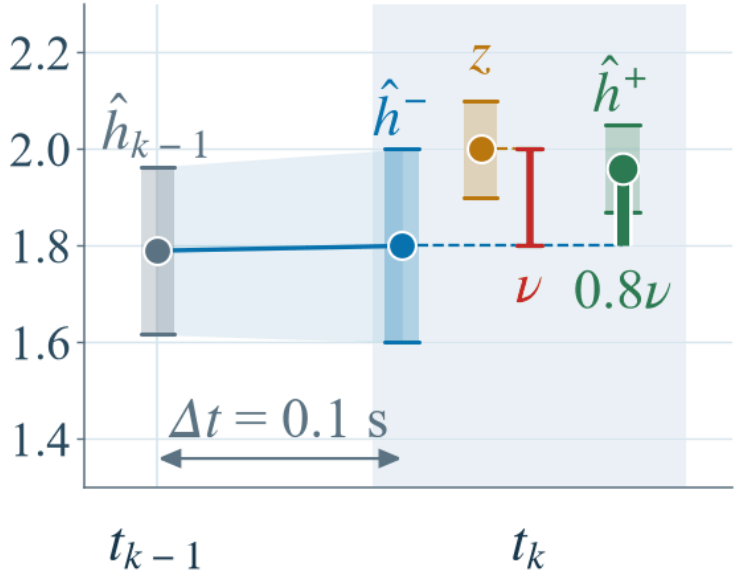
预测与观测融合后，分布怎样变化

标量KF：预测与更新

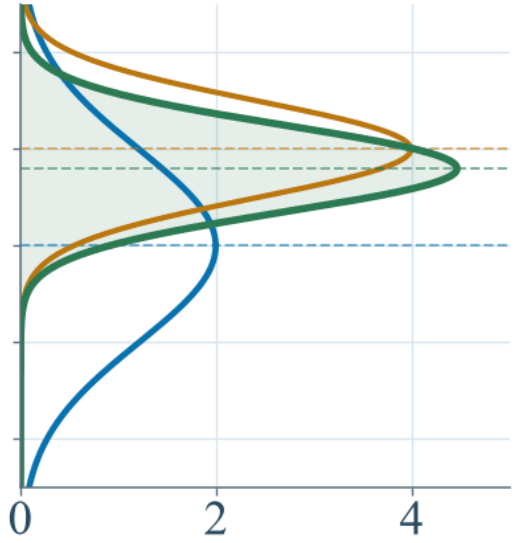
预测　观测　更新

结果：估计只沿创新走 0.8ν 到 1.96 m，更新后的分布比预测、观测都窄

高度估计 $\hat{h}$ 与观测 z (m)



概率密度 p (1/m)



$\hat{h}^- = 1.79 + 0.10 \times 0.1 = 1.80$ m

$P^- = 0.03 + 0.01 = 0.04$ m²

$z = 2.00$ m,　$R = 0.01$ m²

$\nu = z - \hat{h}^- = 0.20$ m

$K = 0.04 / (0.04 + 0.01) = 0.8$

0.2　观测权重 $K = 0.8$

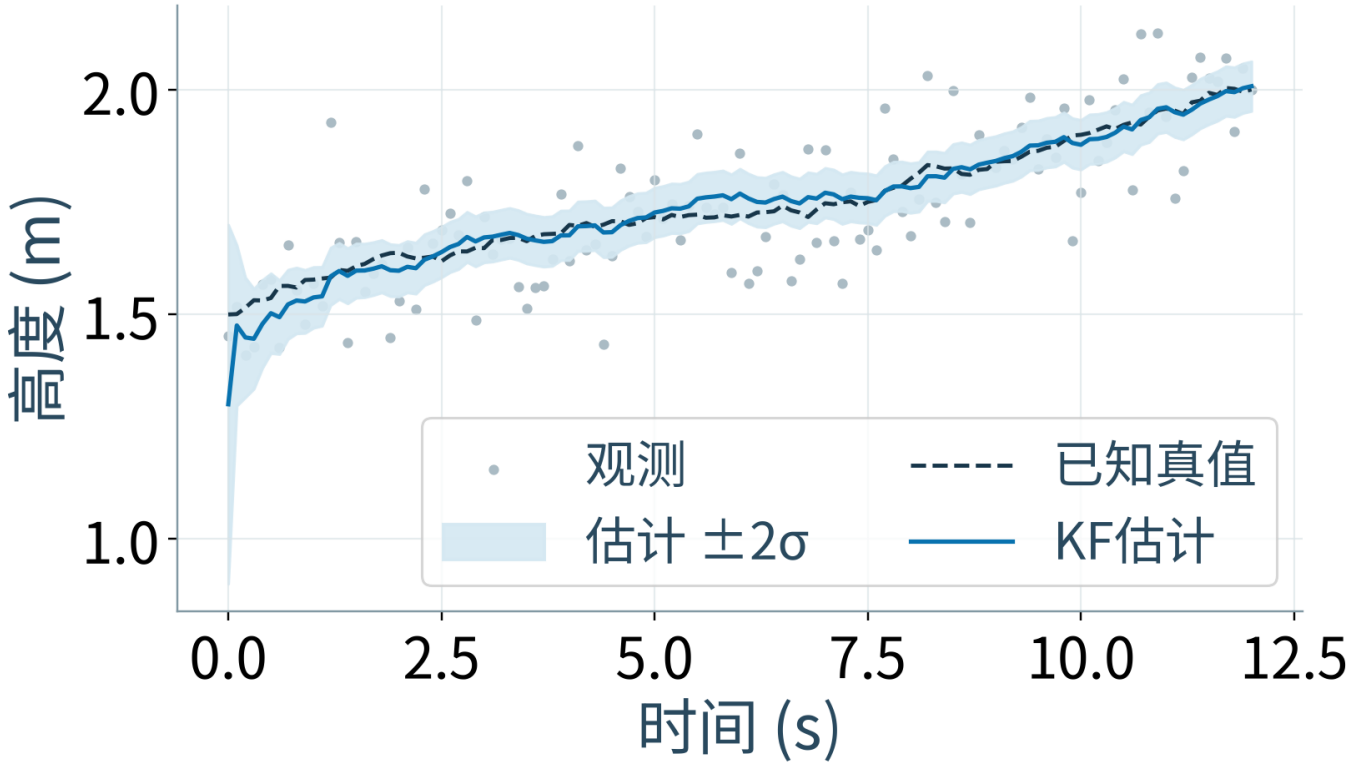
$\hat{h}^+ = 1.80 + 0.8 \times 0.20 = 1.96$ m

$P^+ = (1 - 0.8) \times 0.04 = 0.008$ m²

图：高度KF一步教学算例，左为估计点±1σ，中为同轴密度，右为代入数值

5.2.3 卡尔曼滤波器：递推滤波

将预测与更新递推到12 s



图：一维高度递推教学计算

独立高度教学计算。

间隔0.1 s，速度0.05 m/s。

$$Q = (0.008\ \mathrm{m})^2$$

$$R = (0.1\ \mathrm{m})^2$$

初估1.3 m，$P_0 = 0.04\ \mathrm{m}^2$

观测RMSE 0.105 m

估计RMSE 0.030 m

结论：估计从1.3 m很快贴近真值，±2σ带随之收窄；RMSE约为观测的0.3倍。

本章目录

传感器标定与滤波估计

第五章 滤波估计与底层控制

5.1 滤波估计与底层控制基础

5.2 传感器标定与滤波估计

5.3 控制器设计与控制分配

5.4 控制性能评估与调优

5.5 PX4架构与控制开发接口

5.6 底层控制开发与实验验证

5.7 其他机型与进阶控制案例

5.8 习题与课堂讨论

本节 5 个教学单元

5.2.1 传感器标定与测量模型
教材对应：第5.1.3.2节第1部分、第5.3.1节

5.2.2 互补滤波器
教材对应：第5.1.3.2节第2部分、第5.3.1节

5.2.3 卡尔曼滤波器
教材对应：第5.1.3.2节第3部分

5.2.4 扩展卡尔曼滤波器
教材对应：第5.1.3.2节第4部分、第5.3.1节

5.2.5 滤波方法比较与验证
教材对应：第5.1.3.2节第5部分

5.2.4 扩展卡尔曼滤波器：非线性扩展

非线性状态和观测采用函数计算

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1} \quad \text{式5.13}$$

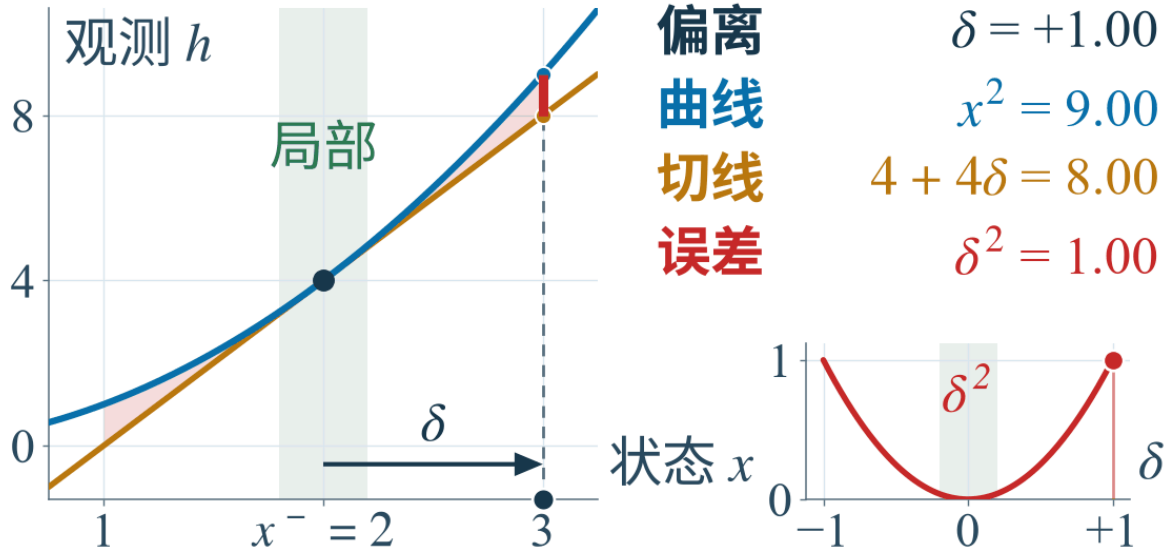
$$\mathbf{z}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k \quad \text{式5.14}$$

- 扩展卡尔曼滤波器（EKF）保留预测与更新，但均值经过非线性函数。
- 姿态变化、坐标旋转和非线性传感器关系都可能使映射随状态变化。
- 本单元用无量纲观测 $z = x^2 + v$ 演算，先确定使用正值分支。

5.2.4 扩展卡尔曼滤波器：局部线性化

雅可比给出当前估计附近的斜率

偏离 x^- 越远，切线误差 δ^2 越大



偏离 $\delta = +1.00$

曲线 $x^2 = 9.00$

切线 $4 + 4\delta = 8.00$

误差 $\delta^2 = 1.00$

$(2+\delta)^2 = 4 + 4\delta + \delta^2$，切线保留前两项

图：平方观测的局部切线与误差δ^2（示意）

雅可比是各输出对各状态的偏导数矩阵。

本例观测 $h(x) = x^2$，当前预测 $x^- = 2$。

$$H = \left.\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}\right|_2 = 2 \times 2 = 4$$

红色竖条是切线误差δ^2。

切线只近似当前附近的变化。

每次递推重新求雅可比。

5.2.4 扩展卡尔曼滤波器：雅可比与预测

均值用函数，协方差用局部导数

$$\mathbf{F}_{k-1} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1},\mathbf{u}_{k-1}}, \quad \mathbf{H}_k = \left.\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}} \tag{式5.15}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) \tag{式5.16}$$

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{F}_{k-1}\mathbf{P}_{k-1|k-1}\mathbf{F}_{k-1}^{\top} + \mathbf{Q}_d \tag{式5.17}$$

- **F** 在前一更新状态求值，**H** 在当前预测状态求值。
- 第四章固定工作点线性化，在这里变成随递推位置移动的局部线性化。

5.2.4 扩展卡尔曼滤波器：EKF更新

创新仍然使用非线性预测观测

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{H}_k^{\top}(\mathbf{H}_k\mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{H}_k^{\top} + \mathbf{R}_d)^{-1} \quad \text{式5.18}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k(\mathbf{z}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})) \quad \text{式5.19}$$

$$\mathbf{P}_{k|k} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{H}_k)\mathbf{P}_{k|k-1} \quad \text{式5.20}$$

- 创新减去非线性预测观测，不是雅可比乘状态。
- 平方观测有正、负两个分支；EKF只保持当前分支附近的高斯近似。

5.2.4 扩展卡尔曼滤波器：非线性一步计算

平方观测的一次更新得到2.08

无量纲教学例：$x^- = 2$，$P^- = 0.04$，$R = 0.16$，观测 $z = 4.4$，$h(x) = x^2$。

$$H = 4, \quad \nu = 4.4 - 2^2 = 0.4, \quad S = 4^2 \times 0.04 + 0.16 = 0.8$$

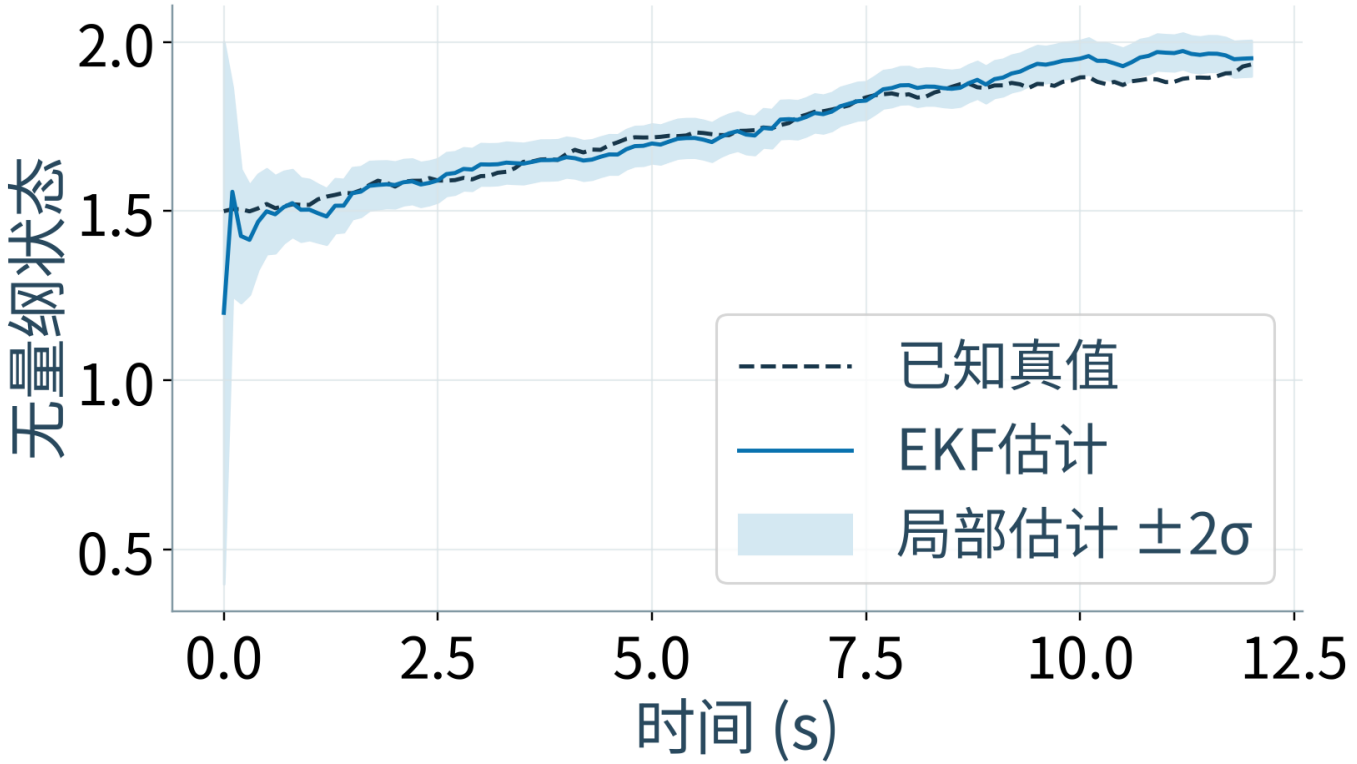
$$K = \frac{0.04 \times 4}{0.8} = 0.2, \quad x^+ = 2 + 0.2 \times 0.4 = 2.08$$

$$P^+ = (1 - 0.2 \times 4) \times 0.04 = 0.008$$

若从–2开始，同一观测得到–2.08。平方观测本身不能辨别正负，初值和其他信息决定分支。

5.2.4 扩展卡尔曼滤波器：完整递推

在正值分支上检查整段估计



图：正分支非线性状态递推教学计算

独立连续算例，初估1.2。
状态：每步增加0.004。
观测：$z = x^2 + v$。
间隔0.1 s，共12 s。
$Q = 0.007^2$，$R = 0.16$，
$P_0 = 0.16$。
整段RMSE：0.045。
终估1.951；真值1.933。

结论：估计很快靠近真值，
终值差约0.02；
负初值可能落入负分支。

5.2.4 扩展卡尔曼滤波器：姿态EKF状态

真实例程估计偏置和方向向量

例程目录：[安装目录]/RflySimAPIs/5.RflySimFlyCtrl/1.BasicExps/e4-FilterDesign/e4.3/
函数：Attitude_ekf.m；说明见e4-FilterDesign/Readme.pdf第7-9页

$$\mathbf{x} = [b_x, b_y, b_z, k_x, k_y, k_z]^\top, \quad \mathbf{P} \in \mathbb{R}^{6\times 6}$$

- **前三项：**陀螺零偏，rad/s。
- **后三项：**机体x/y/z轴上的重力方向分量，无量纲。
- 比力观测 $\mathbf{a}_m \approx -g\mathbf{k}$，$g = \|\mathbf{a}_m\|$。
- 准静态水平姿态时，$\mathbf{k} \approx [0,0,1]^\top$。
- PHI为代码中的状态转移雅可比近似，尺寸6×6。
- 更新后把$\mathbf{k}$归一化：滚转$\phi = atan2(k_y, k_z)$，俯仰$\theta = -\arcsin k_x$。

5.2.4 扩展卡尔曼滤波器：代码与日志对照

比对滤波结果先核对数据条件

检查项	例程中的位置	对结果的影响
时间与单位	timestamp换算为秒；z为六轴观测	时间错位会改变积分和创新
初值与噪声	脚本初值$\mathbf{k}_0 = [0,0,-1]^{\mathrm{T}}$ 另核协方差与噪声参数q、r	错误初值或过小协方差影响修正
结果对照	theta_cf、theta_ekf、theta_px4	PX4姿态为对照估计，不是真值

- **约定：**前右下、水平静止时$\mathbf{a}_m \approx [0,0,-g]^{\mathrm{T}}$，$\mathbf{k}_0 \approx [0,0,1]^{\mathrm{T}}$。
- **初值检查：**流程见“e4.3例程”一页。
- **近似：**机动时用比力模长近似重力，也会影响观测模型。

5.2.4 扩展卡尔曼滤波器：e4.3例程

运行e4.3并检查方向初值

例程目录：[安装目录]/RflySimAPIs/5.RflySimFlyCtrl/1.BasicExps/e4-FilterDesign/e4.3/
入口文件：Readme.pdf（第7–9页）；运行Attitude_estimator.m

- **运行：** MATLAB切到e4.3，确认logdata.mat、Attitude_cf.m、Attitude_ekf.m同目录，运行Attitude_estimator.m。
- **现象：** 返回提示符并弹出4幅图：俯仰、滚转各一幅cf/ekf/px4对照、一幅am/gm/ekf对照。
- **参数：** tao=0.3；w=[0.08, 0.01]传给q，v=50传给r；$\mathbf{P}_0 = 100\mathbf{I}$，$\mathbf{k}_0 = [0,0,-1]^\top$。

首段准静态数据求比力均值 → 检查 $\mathbf{a}_m + g\mathbf{k}_0 \approx \mathbf{0}$ → 不满足时依次查静止与安装方向轴变换与单位 → 按观测模型重设初值，再看创新

本章目录

传感器标定与滤波估计

第五章 滤波估计与底层控制

5.1 滤波估计与底层控制基础

5.2 传感器标定与滤波估计

5.3 控制器设计与控制分配

5.4 控制性能评估与调优

5.5 PX4架构与控制开发接口

5.6 底层控制开发与实验验证

5.7 其他机型与进阶控制案例

5.8 习题与课堂讨论

本节 5 个教学单元

5.2.1 传感器标定与测量模型
教材对应：第5.1.3.2节第1部分、第5.3.1节

5.2.2 互补滤波器
教材对应：第5.1.3.2节第2部分、第5.3.1节

5.2.3 卡尔曼滤波器
教材对应：第5.1.3.2节第3部分

5.2.4 扩展卡尔曼滤波器
教材对应：第5.1.3.2节第4部分、第5.3.1节

5.2.5 滤波方法比较与验证
教材对应：第5.1.3.2节第5部分

5.2.5 滤波方法比较与验证：信号滤波方法

按噪声与统计条件选择信号滤波

方法	基本机制	适用条件与代价
中值滤波	窗口内排序取中位数	抑制尖峰，窗口会损失短时细节
维纳滤波	统计模型下最小均方误差	依赖信号和噪声统计，常用线性平稳假设
自适应滤波	根据数据更新滤波系数	最小均方（LMS）可能收敛慢，递归最小二乘（RLS）计算开销高

- **选择依据：**噪声形态（尖峰或宽带）、统计特性是否已知、允许的延迟。
- 中值滤波不依赖运动模型，也不输出状态协方差。

5.2.5 滤波方法比较与验证：非线性状态滤波

分布怎样传播决定适用问题

方法	状态分布的传播	局限
EKF	均值经过非线性函数，导数传播协方差	局部线性化，对初值敏感
无迹卡尔曼滤波器（UKF）	按规则选取一组采样点（sigma点）经非线性映射，重建均值与协方差	避免显式求导，精度仍取决于模型与参数
粒子滤波（PF）	很多带权样本逼近后验	可表示多峰，粒子退化与计算量需处理

算法更复杂并不保证更准确。维度、可用观测、初始分布和实时计算预算共同决定选择。

5.2.5 滤波方法比较与验证：结果评价

估计更平滑是否改善了控制反馈

$$\mathrm{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(\hat{x}_k - x_k)^2}$$

有已知真值	没有真值	实时实现
证据： RMSE、偏置、相位或时间滞后 **解释：** 误差和延迟都影响控制	**证据：** 创新、独立观测、时间对齐 **解释：** 一致性检查不能单独证明精度	**证据：** 单步耗时、更新率、数据新鲜度 **解释：** 计算赶不上采样会改变闭环条件

N为样本数；$\hat{x}_k$为估计；x_k为真值；RMSE单位与状态相同。

5.2.5 滤波方法比较与验证：评价算例

更平滑的估计不一定误差更小

数据：“同一段输入比较”算例（教学算例），
时长20 s，间隔0.02 s，陀螺剩余偏置0.3°/s。

互补 τ=0.3 s	互补 τ=1.5 s
相邻帧变化均方根：0.122°	**相邻帧变化均方根：**0.075°
整段RMSE：0.49°	**整段RMSE：**0.54°
10–20 s平均误差：0.14°	**10–20 s平均误差：**0.50°

$$e_{ss} = b_g\tau: \quad 0.3 \times 0.3 = 0.09°, \quad 0.3 \times 1.5 = 0.45°$$

结论：τ越大曲线越平滑，陀螺偏置留下的稳态误差也越大；评价要同时看误差、偏置和延迟。

5.2.5 滤波方法比较与验证：可靠性边界

异常出现时先识别信息在哪一环失效

现象	相关证据	处理方向
剧烈机动	比力模长、创新持续增大	降低重力观测可信程度或改善模型
时间戳错位	相同事件出现在不同时间	先对齐数据再融合
观测中断	仅预测；不确定性依模型而变	按可用状态调整反馈与降级方式
初值错误	分支错误或长期大创新	核对初值、坐标与初始化条件

可信程度与有效标志用于选择反馈；观测长期缺失时，估计精度通常会下降。

课堂练习

观测方差增大后，结果向哪边移动

课堂练习：保持预测1.8 m和方差0.04 m²，观测2.0 m，把观测方差改为0.16 m²。求增益、估计和更新方差。

$$K = \frac{0.04}{0.04 + 0.16} = 0.2, \quad \hat{h}^{+} = 1.8 + 0.2(2.0 - 1.8) = 1.84\ \mathrm{m}$$

$$P^{+} = (1 - 0.2) \times 0.04 = 0.032\ \mathrm{m}^2$$

- **参考要点：**观测权重由0.8减到0.2，估计更靠近预测。
- 标准差0.4 m对应方差0.16 m²；误把0.4代入会得到K≈0.09。

课堂练习

标定补偿与平方观测更新各算一步

题1　标定补偿：例程按$a_{\text{cal}} = K_a(a_{\text{raw}} + b_a)$校正。已知$K_a = 1.02$，$b_a = 0.20\ \text{m/s}^2$，某轴原始读数9.40 m/s²。
①求校正值；②写出测量模型$y = sx + b$中的s与b，说明b_a与b的符号关系。

题2　EKF一步更新：观测$h(x) = x^2$（无量纲），
预测$x^- = 3$，$P^- = 0.05$，$R = 0.25$，观测$z = 9.6$。
求H、创新ν、S、K、x^+与P^+，并说明创新为什么不能用Hx^-计算。

参考要点

先定符号与观测函数，再代入数值

题1：校正值$1.02\times(9.40+0.20)\approx9.79\ \mathrm{m/s^2}$，误用$-0.20$会得$9.38\ \mathrm{m/s^2}$；$s=1/K_a\approx0.980$，$b=-b_a=-0.20\ \mathrm{m/s^2}$，两者符号相反。

$$H=2x^-=6,\quad \nu=9.6-3^2=0.6,\quad S=6^2\times0.05+0.25=2.05$$

$$K=\frac{0.05\times6}{2.05}\approx0.146,\quad x^+=3+0.146\times0.6\approx3.088$$

$$P^+=(1-KH)P^-=\frac{0.25}{2.05}\times0.05\approx0.0061$$

- **题2易错：**创新若用$Hx^-=18$，会得$\nu=-8.4$、$x^+\approx1.77$，修正方向完全错误。
- 互补权重与方法选择的练习见课件5.8习题2、习题7。

本节小结

状态反馈可用，需要模型与观测同时成立

方法	解决的问题	易错点
标定	测量与物理量的对应	补偿符号、尺度和轴方向
互补滤波	短时变化与长期参照融合	机动比力、采样间隔和权重
KF / EKF	递推估计及不确定性传播	噪声方差、创新空间和局部初值
方法选择	按误差、延迟、算力选择并验证	只看平滑；把PX4姿态当真值

- 交付给控制器：状态值、单位和坐标、时间戳、可信程度。
- 课件5.3使用目标与这些状态形成误差，再计算可实现的控制动作。