



4.5 多旋翼模型逐步编程与仿真



本章目录

多旋翼运动模型的逐步实现与核验

第四章 载具运动建模与仿真

- 4.1 运动建模基础与运动学
- 4.2 刚体动力学与运动求解
- 4.3 动力单元、受力与观测建模
- 4.4 配平、线性化与动态系统基础
- 4.5 多旋翼模型逐步编程与仿真**
- 4.6 参数测量与静态模型辨识
- 4.7 动态系统辨识、验证与模型修正
- 4.8 典型无人载具建模与扩展
- 4.9 建模工具、代码生成与模型部署
- 4.10 API与SDK建模接口
- 4.11 例程体系与综合实践
- 4.12 习题案例分析与课程设计

本节 6 个教学单元

4.5.1 程序的对象、状态与层次

教材：4.1.3.1–4.1.3.2、4.2.3节

4.5.2 升降运动的最小程序

教材对应：第4.1.4.1节 平移动力学

4.5.3 单轴转动的递进实现

教材对应：第4.1.4.1节、第4.1.4.4节

4.5.4 三维刚体与数值积分

教材对应：第4.1.4.1节、第4.1.4.4节

4.5.5 动力、环境与观测扩展

教材对应：第4.1.4.2节、第4.1.4.3节、第4.1.4.6节

4.5.6 真实模板对照与验收

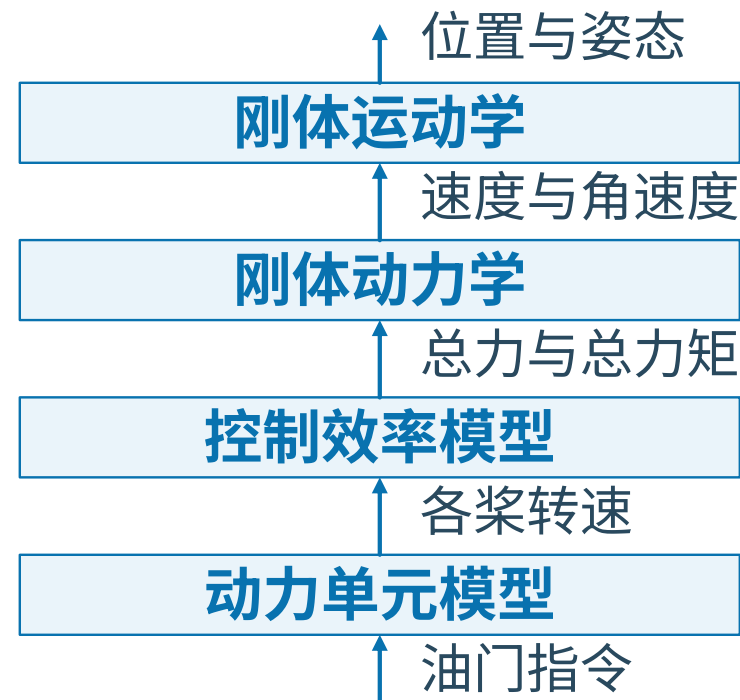
教材对应：第4.2.3节、第4.2.4节



本节导入

把四层关系写成可以逐项检查的程序

- **先隔离问题：**先给定推力，完成升降；再增加俯仰；最后连接三维姿态、动力与环境。
- **同一条计算链：**输入函数给各桨指令，受力函数求合力合矩，导数函数求变化率，积分器更新状态。
- **同一套证据：**每一步保存状态、受力和模型时间，手算值、曲线和代码必须能够相互对应。



图：四层运动模型

程序中的每一层，都返回下一层需要且能够核验的物理量。

4.5.1 程序的对象、状态与层次：教学入口

先找到可以独立运行的教学入口

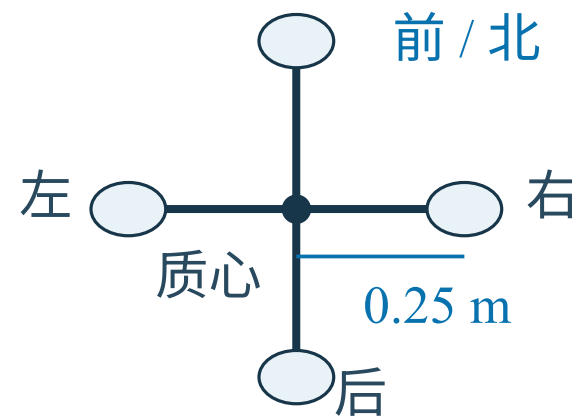
- **目录：** [安装目录]/RflySimAPIs/4.RflySimModel/1.BasicExps/e6_ModelingLearningLab/, 先读该目录的Readme.pdf。
- **本节程序：** 01_VerticalRigidBody (先读其Readme.pdf) ; MATLAB当前目录切到此处, 运行modeling_stages('vertical')等四个阶段, vertical_beginner与simulation.py是独立入门路线。
- **M0检查：** 05_M0Checks中的m0_offline_checks.m复制e0_MinModelTemp的模型做离线工况, 需要Simulink; 分阶段程序只需基础MATLAB, Python路线需NumPy。
- **输出与排查：** 正常结束时命令窗口显示metrics且checks_pass为true; outputs阶段子目录存CSV、JSON与PNG; 目录不可写时把可写目录作为输出参数传入。

例程目录中的程序、数据和说明共同构成可重复的建模实验。

4.5.1 程序的对象、状态与层次：程序参数回顾

程序沿用贯穿案例的参数、初态与坐标约定

- **初态：**机体水平、机头朝北，速度与角速度为零；对象与简化条件见课件4.1「参数与初始条件」页。
- **教学参数：** $m = 2 \text{ kg}$, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ ；旋翼力臂均为 0.25 m ，俯仰惯量 $J_y = 0.05 \text{ kg m}^2$ 。
- **输入与输出：**按前、右、后、左给定四桨推力，计算位置、速度、姿态和角速度。命令到推力的过程见课件4.3。
- **程序中的简化：**阻力、旋转阻尼、旋翼响应与触地先取零，升降和单轴转动可用解析值核对；4.5.5再加入电机滞后与相对来流。
- **原点与高度：**地面原点在起点正下方，地向为正； $z_D = -1 \text{ m}$, $H = -z_D = 1 \text{ m}$ 。



图：俯视构型与旋翼力臂

先确定对象和工况，再用模型预测指定输入下的响应。

4.5.1 程序的对象、状态与层次：函数与状态接口

函数接口固定，阶段增加的是内部物理过程

- **调用约定：** modeling_stages(stage,outDir,dt)选择阶段、输出目录和步长；默认步长为 0.002 s。
- **返回状态：** result.state前13列始终按位置、速度、四元数和机体角速度排列；扩展阶段在末尾加4列转速。
- **返回载荷：** force_body_N不含重力；moment_body_Nm关于质心；acceleration_NED_mps2与地面NED坐标一致。

$$\mathbf{x} = [\mathbf{p}_e^T, \mathbf{v}_e^T, \mathbf{q}_{eb}^T, \boldsymbol{\omega}_b^T]^T$$

- **下标：** e指地面北东地（NED）系，b指机体前右下（FRD）系。

固定返回量，使简单阶段和复杂阶段能够用同一套方法比较。



4.5 多旋翼模型逐步编程与仿真



本章目录

多旋翼运动模型的逐步实现与核验

第四章 载具运动建模与仿真

- 4.1 运动建模基础与运动学
- 4.2 刚体动力学与运动求解
- 4.3 动力单元、受力与观测建模
- 4.4 配平、线性化与动态系统基础
- 4.5 多旋翼模型逐步编程与仿真**
- 4.6 参数测量与静态模型辨识
- 4.7 动态系统辨识、验证与模型修正
- 4.8 典型无人载具建模与扩展
- 4.9 建模工具、代码生成与模型部署
- 4.10 API与SDK建模接口
- 4.11 例程体系与综合实践
- 4.12 习题案例分析与课程设计

本节 6 个教学单元

4.5.1 程序的对象、状态与层次

教材：4.1.3.1–4.1.3.2、4.2.3节

4.5.2 升降运动的最小程序

教材对应：第4.1.4.1节 平移动力学

4.5.3 单轴转动的递进实现

教材对应：第4.1.4.1节、第4.1.4.4节

4.5.4 三维刚体与数值积分

教材对应：第4.1.4.1节、第4.1.4.4节

4.5.5 动力、环境与观测扩展

教材对应：第4.1.4.2节、第4.1.4.3节、第4.1.4.6节

4.5.6 真实模板对照与验收

教材对应：第4.2.3节、第4.2.4节



4.5.2 升降运动的最小程序：状态与方程

从两条升降方程确定程序要保存什么

- **条件：** 机体水平、推力竖直向上，采用近无风悬停的小扰动基线，本阶段取零阻力。
- **变量：** 地向坐标 z_D 向下为正；初态 $z_D = -1\text{ m}$ 、 $v_D = 0$ ；高度记为 $H = -z_D$ 。
- **推力作用：** 总推力 $T = mg$ 时加速度为零； $T > mg$ 时 $a_D < 0$ ，向上加速。

$$\dot{z}_D = v_D, \quad \dot{v}_D = g - \frac{T}{m}$$

速度是位置的变化率，合力除以质量才是速度的变化率。

4.5.2 升降运动的最小程序：分段输入

分段输入先加速，再减速，最后保持

- **时间安排：**前0.5 s悬停；0.5–1.5 s加速上升；1.5–2.5 s减速；之后保持。
- **四桨相同：**每桨5.4 N时总推力21.6 N；每桨4.4 N时总推力17.6 N；平衡值每桨4.9 N。

```
forces = 4.9*ones(4,1);  
if t>=.5 && t<1.5  
    forces(:)=5.4;  
elseif t>=1.5 && t<2.5  
    forces(:)=4.4;  
end
```

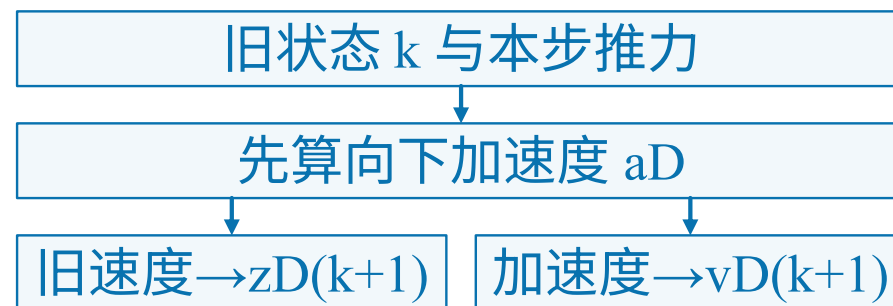
只把推力恢复为重力，不能消除已经积累的上升速度。

4.5.2 升降运动的最小程序：可运行程序核心

升降的前向欧拉核心只需一个循环

- **变量：** t 为时间， T 为总推力， zD 为地面向位置， vD 为地面向速度。初始化 $zD(1)=-1$ 、 $vD(1)=0$ ； dt 为步长。

```
for k = 1:numel(t)-1
    aD = g - T(k)/m;
    zD(k+1) = zD(k) + dt*vD(k);
    vD(k+1) = vD(k) + dt*aD;
end
```



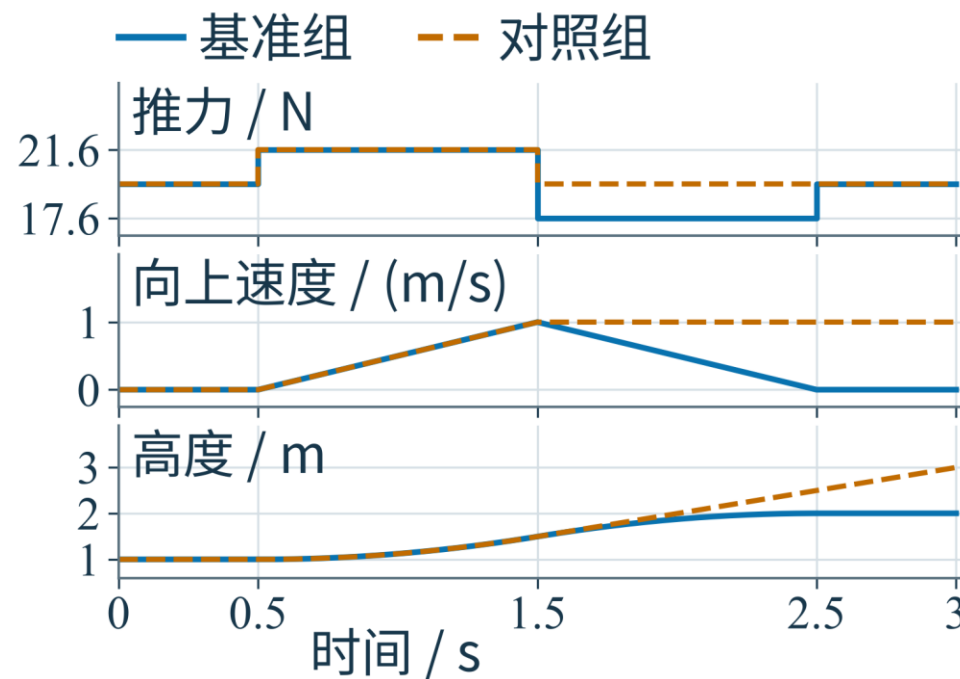
图：右侧同读 k ，分别写入 $k+1$

- **读代码：** 每次循环先求合力对应的加速度，再用旧位置和旧速度更新；两行右侧都读取索引 k 。位置和速度数组保留每一步结果。
- **显示曲线：** $\text{plot}(t, -zD)$ 显示高度， $\text{plot}(t, -vD)$ 显示向上速度。

4.5.2 升降运动的最小程序：运行结果判读

读升降案例的推力、速度与高度曲线

- **入口回顾：** 课件4.1课堂练习已运行 vertical_beginner；本页读曲线与程序。
- **基准输入：** 21.6 N加速1 s、17.6 N减速1 s，其余时段19.6 N；对照组取消减速段。
- **先读结果：** 基准组3 s时高2 m、速度为0；对照组保持约1 m/s上升，3 s时约3 m。
- **读图：** 推力分段决定加速度，速度是加速度的累积，高度又是速度的累积；1.5 s时向上速度最大。



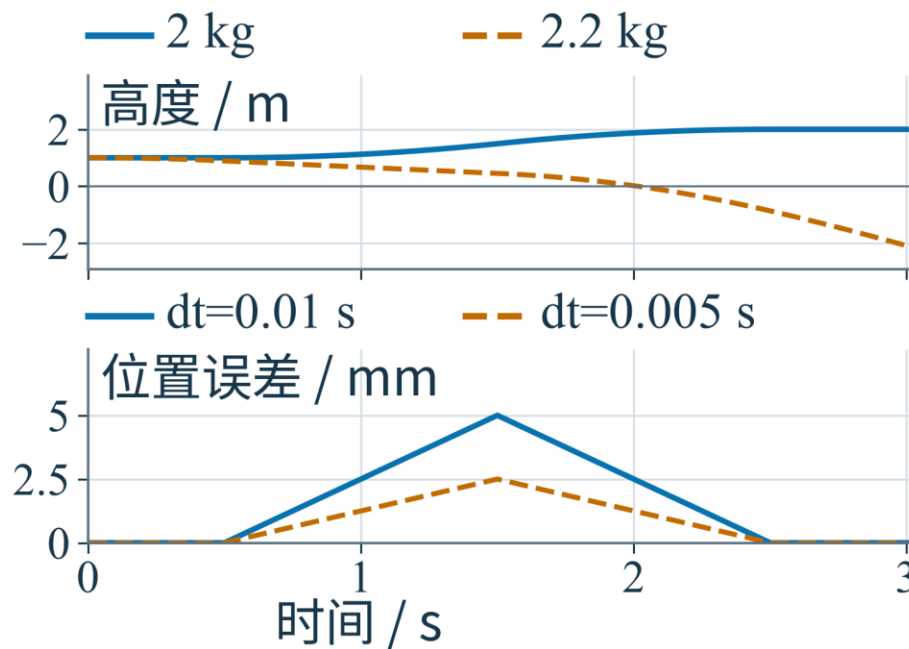
图：基准组与对照组（教学算例，非平台实测）

先用能手算的工况检查程序，再逐步增加模型复杂度。

4.5.2 升降运动的最小程序：改变一个参数

每次只改一个参数，先预测再运行

- **改质量：** m 改为2.2 kg，重力21.56 N超过19.6 N推力，悬停段向下加速约 0.89 m/s^2 ，3 s时高约-2.1 m（无触地模型）。
- **改步长：**保持2 kg， dt 由0.01 s减为0.005 s，最大位置误差从5 mm减半到2.5 mm。
- **另存结果：**一次只改一个量，并为每次运行另设输出目录。



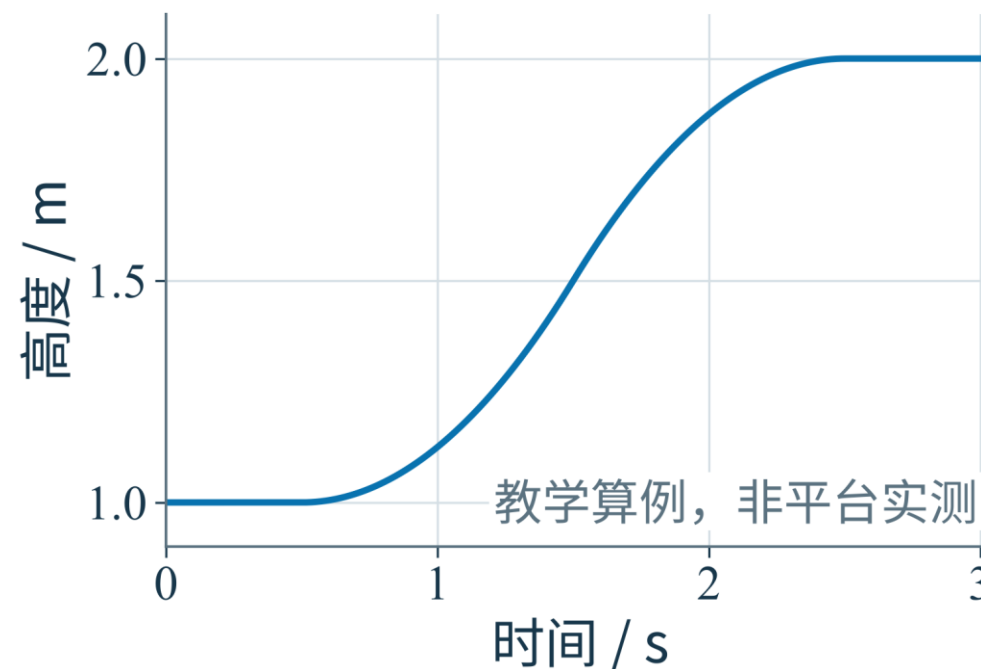
图：改质量与改步长（教学算例，非平台实测）

一次只改一个参数，结果的变化才能归因于这个参数。

4.5.2 升降运动的最小程序：终点与曲线核验

运行后先核对终点，再解释整条曲线

- **程序切换：**运行`modeling_stages('vertical')`，结果在`outputs/vertical`；积分改用四阶龙格—库塔法（RK4，4.5.4展开），方程与输入不变。
- **实算结果：**3 s时高度2.000 m，地向速度0；曲线先变陡、再变平。
- **回看输入：**0.5 s前与2.5 s后高度不变；加速、减速两段曲率相反。



图：升降阶段实际计算的高度

正确的终点同时满足目标高度和零竖直速度。



4.5 多旋翼模型逐步编程与仿真



本章目录

多旋翼运动模型的逐步实现与核验

第四章 载具运动建模与仿真

- 4.1 运动建模基础与运动学
- 4.2 刚体动力学与运动求解
- 4.3 动力单元、受力与观测建模
- 4.4 配平、线性化与动态系统基础
- 4.5 多旋翼模型逐步编程与仿真**
- 4.6 参数测量与静态模型辨识
- 4.7 动态系统辨识、验证与模型修正
- 4.8 典型无人载具建模与扩展
- 4.9 建模工具、代码生成与模型部署
- 4.10 API与SDK建模接口
- 4.11 例程体系与综合实践
- 4.12 习题案例分析与课程设计

本节 6 个教学单元

4.5.1 程序的对象、状态与层次

教材：4.1.3.1–4.1.3.2、4.2.3节

4.5.2 升降运动的最小程序

教材对应：第4.1.4.1节 平移动力学

4.5.3 单轴转动的递进实现

教材对应：第4.1.4.1节、第4.1.4.4节

4.5.4 三维刚体与数值积分

教材对应：第4.1.4.1节、第4.1.4.4节

4.5.5 动力、环境与观测扩展

教材对应：第4.1.4.2节、第4.1.4.3节、第4.1.4.6节

4.5.6 真实模板对照与验收

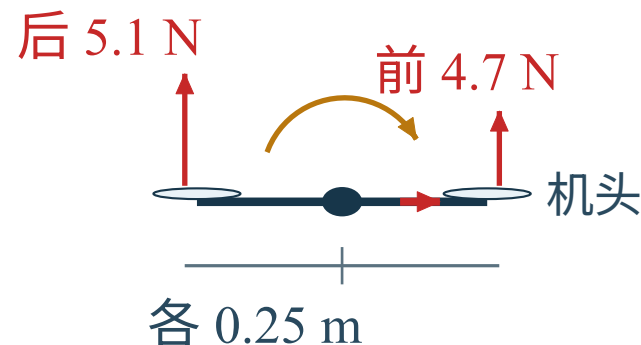
教材对应：第4.2.3节、第4.2.4节



4.5.3 单轴转动的递进实现：单轴边界

单轴阶段先固定平移，只研究俯仰

- **物理对象：**把机体放在可绕质心俯仰的理想支架上，外部支撑保持位置不变；它不是自由飞行。
- **输入差动：**前桨4.7 N、后桨5.1 N，总推力仍为19.6 N；左右桨维持4.9 N。
- **保留状态：**角速度与四元数照常积分；代码仅把位置、线速度的导数置零，便于单独核对俯仰。
- **转动与制动：**负力矩0.3 s后接等大正力矩0.3 s，角速度归零，俯仰停在 -0.18 rad （约 -10.31° ）；推导见课件4.2「单轴转动计算」页。



图：前弱后强，机头下俯

减少自由度是隔离转动关系的教学试验，约束必须明确写入模型。

4.5.3 单轴转动的递进实现：力臂与力矩

从安装位置直接算出俯仰力矩

- **教学构型：**前、右、后、左桨位于 $+x_b, +y_b, -x_b, -y_b$ ；臂长为 $L = 0.25 \text{ m}$ 。
- **负俯仰段：**前桨4.7 N、后桨5.1 N，故 $M_y = L(T_f - T_r) = -0.10 \text{ N m}$ 。
- **数值预测：** $J_y = 0.05 \text{ kg m}^2$ ，单轴时陀螺耦合项为零，角加速度为 -2 rad/s^2 。

$$\mathbf{M}_b = \sum_i \boldsymbol{\rho}_i \times [0, 0, -T_i]^T$$

- **符号：** $\boldsymbol{\rho}_i$ 为第 i 桨相对质心的位置， $[0, 0, -T_i]^T$ 为其在FRD中的向上推力。

力矩的正负来自位置与力向量的叉乘，不能只凭电机编号记忆。

4.5.3 单轴转动的递进实现：三段力矩

三段力矩把角速度带回零

- **输入时序：** 0–0.3 s施加–0.10 N·m； 0.3–0.6 s施加+0.10 N·m； 之后力矩为零。

```
if t<.3
    forces([1 3])=[4.7;5.1];
elseif t<.6
    forces([1 3])=[5.1;4.7];
end
```

$$M_y(t) = \begin{cases} -0.10 \text{ N m}, & 0 \leq t < 0.3 \text{ s} \\ +0.10 \text{ N m}, & 0.3 \leq t < 0.6 \text{ s} \\ 0, & t \geq 0.6 \text{ s} \end{cases}$$

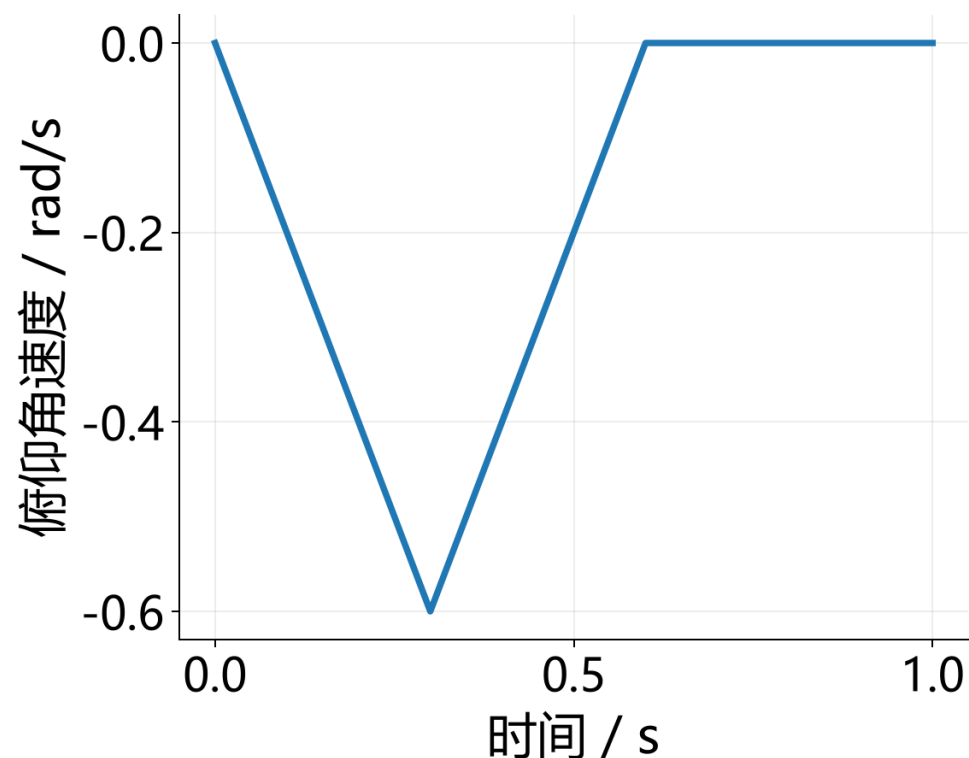
- **读码：** forces([1 3])依次是前桨与后桨；左右两桨保持4.9 N。程序以每步区间中点的时刻调用此分支。

反向力矩先消除角速度，姿态才停在新的角度。

4.5.3 单轴转动的递进实现：角速度核验

先用角速度曲线核对力矩积分

- **运行：** `r = modeling_stages('single_axis')`，结果位于 `outputs/single_axis`。
- **斜率对应角加速度。**
0.3 s角速度为 -0.6 rad/s ，随后线性回零；
0.6 s后不转。
- **面积对应俯仰角变化。**
两段三角形面积各 -0.09 rad ，合计 -0.18 rad （约 -10.31° ）。

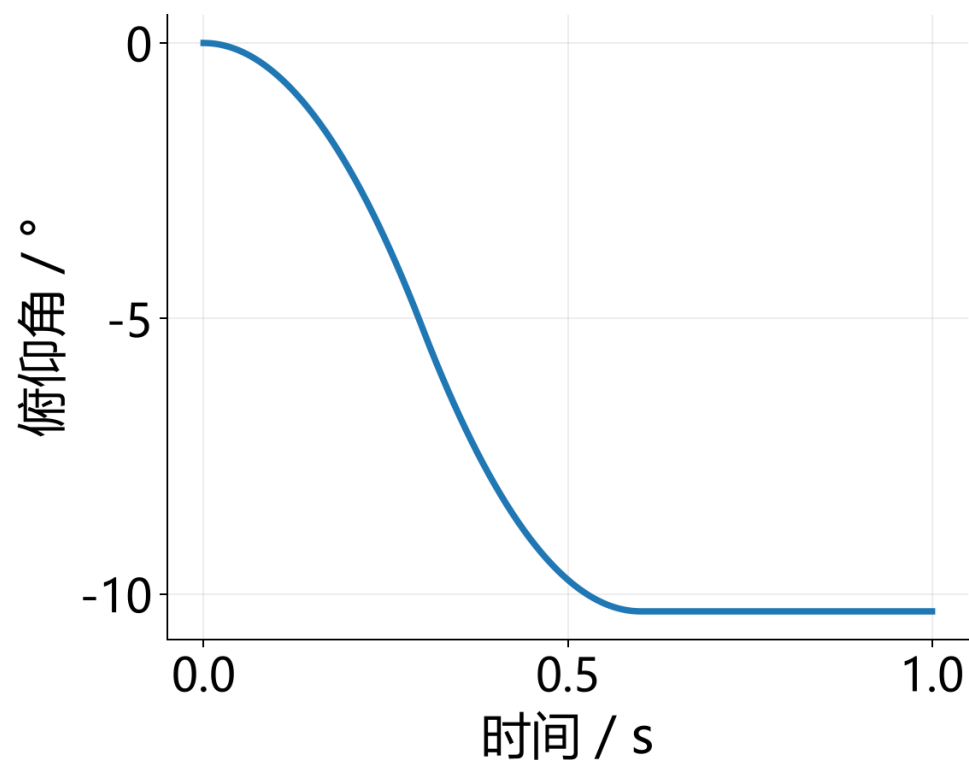


图：单轴阶段的机体俯仰角速度

4.5.3 单轴转动的递进实现：终态俯仰角

角速度回零后，俯仰角停在新位置

- **角度结果：**最终俯仰角约 -10.31° ，与解析值 -0.18 rad 之差小于 10^{-6} rad 。
- **曲线形状：**0.3 s以后仍在低头，但变化速度逐渐减小；到0.6 s角速度为零才停住。停转不等于回平，回到水平需再安排反向动作。
- **改变参数：**俯仰惯量加倍而力矩不变，转角减半；副本中P.J(2,2)改为0.1，解析值与误差式中的0.18都改为0.09。



图：同一单轴实验的俯仰角



4.5 多旋翼模型逐步编程与仿真



本章目录

多旋翼运动模型的逐步实现与核验

第四章 载具运动建模与仿真

- 4.1 运动建模基础与运动学
- 4.2 刚体动力学与运动求解
- 4.3 动力单元、受力与观测建模
- 4.4 配平、线性化与动态系统基础
- 4.5 多旋翼模型逐步编程与仿真**
- 4.6 参数测量与静态模型辨识
- 4.7 动态系统辨识、验证与模型修正
- 4.8 典型无人载具建模与扩展
- 4.9 建模工具、代码生成与模型部署
- 4.10 API与SDK建模接口
- 4.11 例程体系与综合实践
- 4.12 习题案例分析与课程设计

本节 6 个教学单元

4.5.1 程序的对象、状态与层次

教材：4.1.3.1–4.1.3.2、4.2.3节

4.5.2 升降运动的最小程序

教材对应：第4.1.4.1节 平移动力学

4.5.3 单轴转动的递进实现

教材对应：第4.1.4.1节、第4.1.4.4节

4.5.4 三维刚体与数值积分

教材对应：第4.1.4.1节、第4.1.4.4节

4.5.5 动力、环境与观测扩展

教材对应：第4.1.4.2节、第4.1.4.3节、第4.1.4.6节

4.5.6 真实模板对照与验收

教材对应：第4.2.3节、第4.2.4节



4.5.4 三维刚体与数值积分：十三状态

十三个状态按四组保存

- **位置与速度：**1–3列为NED位置，4–6列为NED线速度，单位分别为m和m/s。
- **姿态：**7–10列为Hamilton四元数wxyz，表示机体FRD到地面NED；单位范数约束减少一个独立自由度。
- **角速度：**11–13列为机体系角速度，单位rad/s；它们不是三个欧拉角的导数。
- **初始状态：**所有状态先置零，再设 $x_3 = -1$ 、 $x_7 = 1$ ，即高度1 m、水平朝北、静止。

状态排序是程序接口的一部分，任何子函数都必须遵守同一顺序。

4.5.4 三维刚体与数值积分：受力函数

受力函数只做求和，不推进运动

- **函数输入：** forces是四桨向上推力， P.rotor_position是相对质心的位置，每行对应同一台电机。
- **函数输出：** Fb是机体系合力， Mb是质心合矩；本教学对称指令使反向旋转对的偏航反扭矩抵消。

```
fi = [zeros(4,2), -forces(:)];  
Fb = sum(fi,1)';  
Mb = sum(cross(P.rotor_position,fi,2),1)';
```

受力映射与状态积分分开，才能单独核对每个旋翼的贡献。

4.5.4 三维刚体与数值积分：平移方程

平移动力学先换坐标，再加一次重力

- **姿态矩阵：** rotation_matrix读取wxyz四元数，输出机体到地面旋转矩阵R。
- **力的约定：** Fb不含重力，因而地向重力加速度在导数函数中加一次；不能在受力函数重复加入。

```
R = rotation_matrix(x(7:10));  
dx(1:3) = x(4:6);  
dx(4:6) = [0;0;P.g] + R*Fb/P.mass;
```

$$\dot{\mathbf{p}}_e = \mathbf{v}_e, \quad \dot{\mathbf{v}}_e = g \mathbf{e}_3 + \mathbf{R}\mathbf{F}_b/m$$

- **读码：** [0;0;P.g]即 $g \mathbf{e}_3$ ， $\mathbf{e}_3$ 为地向单位向量； $\mathbf{R}*\mathbf{F}_b/\mathbf{P.mass}$ 即 $\mathbf{R}\mathbf{F}_b/m$ 。

机体推力先转到NED，才能与地面重力放在同一个加速度方程里。

4.5.4 三维刚体与数值积分：转动与姿态方程

转动力学与姿态运动学共用机体角速度

- **动力学：**角动量耦合 $\omega \times (J\omega)$ 在三维运动中保留；单轴核验时才为零。
- **运动学：**四元数导数采用 q 与纯角速度四元数的Hamilton乘积；乘法左右次序由坐标约定决定。

```
omega = x(11:13);  
dx(7:10) = .5*quat_product(x(7:10),[0;omega]);  
dx(11:13) = P.J\ (Mb-cross(omega,P.J*omega));
```

$$J\dot{\omega}_b = M_b - \omega_b \times (J\omega_b)$$

$$\dot{q} = \frac{1}{2} q \otimes [0, \omega_b^T]^T$$

- **读码：** $P.J \backslash (\cdots)$ 解线性方程而不求逆；
 quat_product 即 $\otimes$ 。

合矩先改变机体角速度，角速度再改变姿态。

4.5.4 三维刚体与数值积分：Hamilton乘法

Hamilton乘法把标量与向量部分分别计算

- **分组：** $a(1)$ 、 $b(1)$ 为标量部， $a(2:4)$ 、 $b(2:4)$ 为向量部；dot是点乘，cross是叉乘。
- **调用：** 姿态微分中 $b=[0;\omega]$ ；角速度必须使用rad/s，再由前面的0.5系数进入四元数导数。

```
q = [a(1)*b(1)-dot(a(2:4),b(2:4)); ...  
      a(1)*b(2:4)+b(1)*a(2:4) ...  
      + cross(a(2:4),b(2:4))];
```

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_0 b_0 - \mathbf{a}_v \cdot \mathbf{b}_v \\ a_0 \mathbf{b}_v + b_0 \mathbf{a}_v + \mathbf{a}_v \times \mathbf{b}_v \end{bmatrix}$$

- **对应：** a_0 即 $a(1)$ ， $\mathbf{a}_v$ 即 $a(2:4)$ ；第一行是标量部，第二行是3维向量部。

四元数乘法的叉乘项保留旋转次序，不能换成逐元素乘法。

4.5.4 三维刚体与数值积分：四次求值

四次求值完成一个时间步

- **四阶龙格—库塔（RK4）**：f(x)简写本步输入、参数固定的导数函数，h为本步时长；试算四次后按权重合成。

```
k1 = f(x);  
k2 = f(x+h*k1/2);  
k3 = f(x+h*k2/2);  
k4 = f(x+h*k3);  
next = x+h*(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;  
next(7:10) = next(7:10)/norm(next(7:10));
```

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \frac{h}{6} (\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4)$$

- **斜率**：k1取起点，k2、k3取两次中点试算，k4取终点试算，按1:2:2:1加权。

四阶RK方法用中间试算改善积分精度，真正状态每步只提交一次。

4.5.4 三维刚体与数值积分：输入跳变

输入跳变时刻也属于数值试验设置

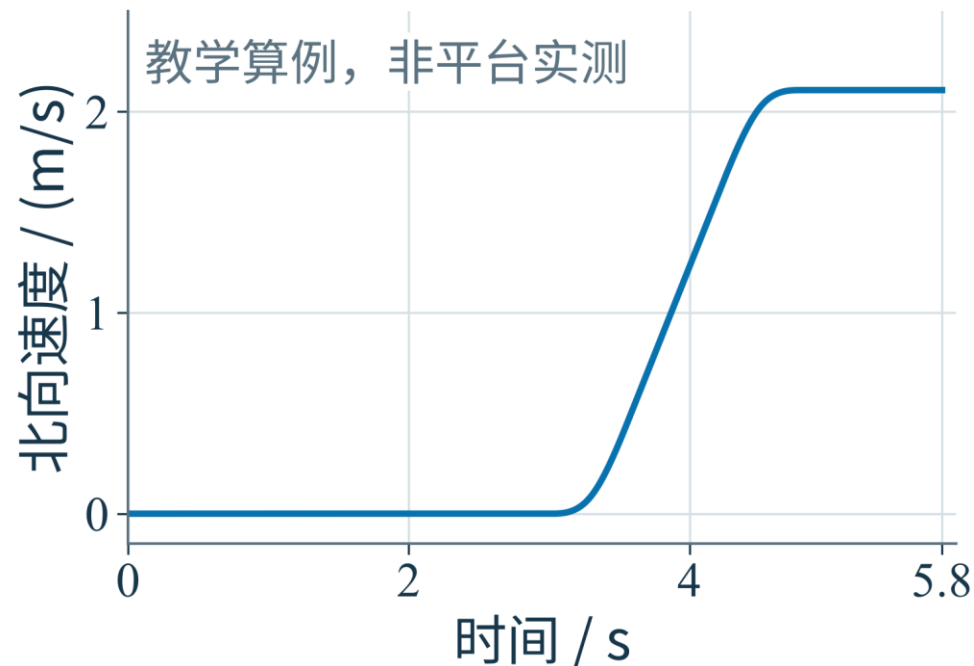
- **问题：**若一次RK试算跨过推力切换时刻，中间求值可能混用切换前后输入，造成终点偏差。
- **程序做法：**时间网格显式包含0.5、1.5、2.5 s等事件；本步使用区间中点对应的分段常量命令。
- **状态与记录：**输入跳变时状态仍连续；记录在切换时刻计算新输入下的导数，所以载荷曲线可以跳变。
- **步长对照：**把dt减半时保留相同事件、初态和输入，比较同一模型时刻，才能判断积分误差。

在输入事件处分步，才能让同一段积分使用同一段控制输入。

4.5.4 三维刚体与数值积分：北向速度核验

运行完整刚体阶段，先追踪北向速度

- **运行：** `r = modeling_stages('rigid_body');`
输出共13个状态，积分到5.8 s。
- **时序：** 3.0 s开始低头，3.6–4.2 s保持倾斜；
随后反向动作恢复水平。
- **实算结果：** 4.8 s回平后，北向速度仍约
2.10738 m/s；本基线无阻力，因此之后继续向北移动。



图：完整刚体阶段的北向速度

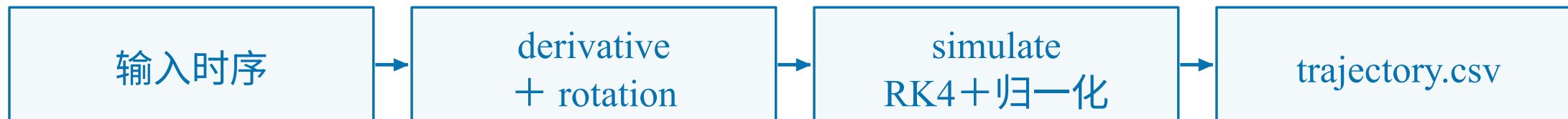
恢复三维平移后，倾斜推力会产生水平加速度并积累速度。

4.5 多旋翼模型逐步编程与仿真

4.5.4 三维刚体与数值积分：三维程序与结果

运行完整刚体程序，从同一份CSV读三个量

- **程序入口：**simulation.py（需Python与NumPy）与rigid_body阶段参数、初态和输入相同：2 kg、初高1 m，阻力与旋转阻尼取零。



- **Python运行：**输出trajectory.csv

```
python simulation.py --out-dir outputs
```

- **MATLAB读表：**读同一份CSV画高度

```
D = readtable('outputs/trajectory.csv');  
plot(D.t_s,D.height_m);
```

height_m（高度）

2.5 s：2 m，速度为零

pitch_deg（俯仰角）

3.6 s：约-10.31°，停止转动

v_N_mps（北向速度）

4.8 s：约2.11 m/s，仍向北

图：函数职责与同一份CSV中的三个观察量



4.5 多旋翼模型逐步编程与仿真



本章目录

多旋翼运动模型的逐步实现与核验

第四章 载具运动建模与仿真

- 4.1 运动建模基础与运动学
- 4.2 刚体动力学与运动求解
- 4.3 动力单元、受力与观测建模
- 4.4 配平、线性化与动态系统基础
- 4.5 多旋翼模型逐步编程与仿真**
- 4.6 参数测量与静态模型辨识
- 4.7 动态系统辨识、验证与模型修正
- 4.8 典型无人载具建模与扩展
- 4.9 建模工具、代码生成与模型部署
- 4.10 API与SDK建模接口
- 4.11 例程体系与综合实践
- 4.12 习题案例分析与课程设计

本节 6 个教学单元

4.5.1 程序的对象、状态与层次

教材：4.1.3.1–4.1.3.2、4.2.3节

4.5.2 升降运动的最小程序

教材对应：第4.1.4.1节 平移动力学

4.5.3 单轴转动的递进实现

教材对应：第4.1.4.1节、第4.1.4.4节

4.5.4 三维刚体与数值积分

教材对应：第4.1.4.1节、第4.1.4.4节

4.5.5 动力、环境与观测扩展

教材对应：第4.1.4.2节、第4.1.4.3节、第4.1.4.6节

4.5.6 真实模板对照与验收

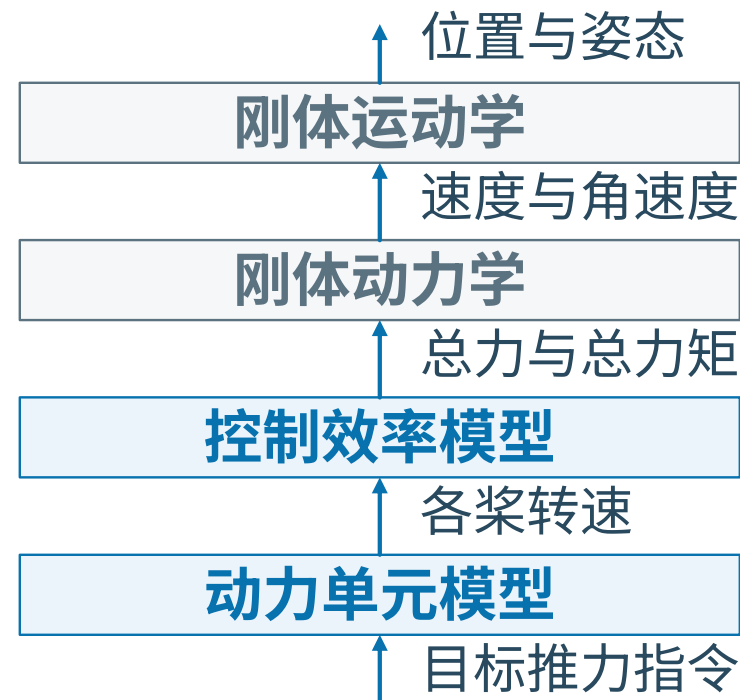
教材对应：第4.2.3节、第4.2.4节



4.5.5 动力、环境与观测扩展：模块接口

保持刚体接口，增加电机和环境

- **新增动力状态：**四个电机转速作为第14–17项状态；推力由实际转速平方得到，不再立即等于命令。
- **新增环境：**向北1 m/s的风改变相对来流；三轴有符号平方阻力接入机体系合力。
- **保持可比：**仍使用同一推力目标时序、2 kg参数和初态，观察动力与环境对原基线的影响。



图：四层运动模型

扩展模型应能指出新增状态、输入和受力从哪里进入计算链。

4.5.5 动力、环境与观测扩展：电机状态

四个转速状态把动力滞后写进模型

- **目标与实际：**拉力系数 $c_T = 10^{-5} \text{ N}/(\text{rad/s})^2$ （课件4.3已定义，代码中记作Ct），电机时间常数 $\tau_m = 0.05 \text{ s}$ ；目标转速由目标推力反求。
- **初态一致：**每桨从4.9 N对应的稳态转速启动，与理想刚体阶段初态相同。

$$\tau_m \dot{\omega}_i + \omega_i = \omega_{t,i}, \quad T_i = c_T \omega_i^2$$

```
motor = x(14:17);  
target = sqrt(max(command,0)/P.Ct);  
dx(14:17) = (target-motor)/P.motor_tau;  
forces = P.Ct*motor.^2;
```

当前转速决定当前推力，目标转速只决定转速变化的方向和快慢。

4.5.5 动力、环境与观测扩展：相对风速

相对风速先在同一坐标系相减

- **先相减：** v_{NED} 和 $wind_NED$ 均用地面NED坐标；相减得到相对空气速度，再转到机体系。
- **再算力：** 逐轴使用有符号平方关系； abs 保留大小，前面的负号保证力反向， $drag_k$ 为教学系数。

```
vAirBody = R'*(vNED-P.wind_NED);  
Fdrag = -P.drag_k*vAirBody.*abs(vAirBody);  
Fb = Fb + Fdrag;
```

阻力反对的是相对空气运动，地面静止并不意味着空气相对速度为零。

4.5.5 动力、环境与观测扩展：静止受风

用静止受风工况检查方向和量级

- **条件：**机体水平朝北、地速为零，风速向北1 m/s；三轴阻力系数取0.10，单位为N/(m/s)²。
- **方向：**载具相对空气速度向南，机体系前向分量为-1 m/s；阻力向北，为+0.10 N。
- **加速度：**质量2 kg，故初始北向加速度+0.05 m/s²。 modeling_stages扩展阶段的初始值与此一致。

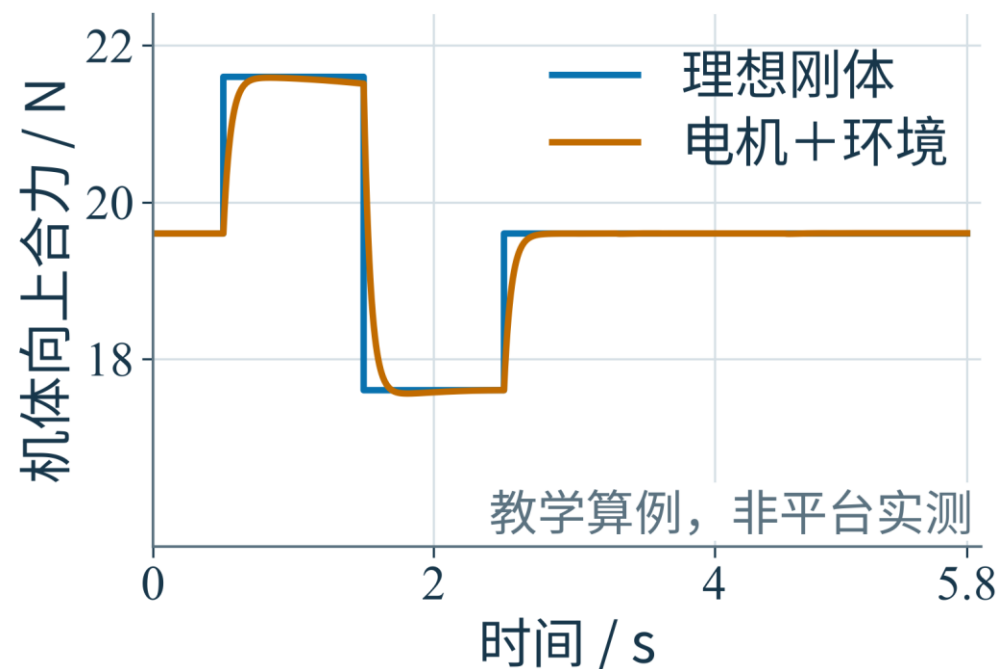
$$F_{D,N} = -0.10(-1)|-1| = 0.10 \text{ N}, \quad a_N = F_{D,N}/2 = 0.05 \text{ m/s}^2$$

一个可以独立手算的风场工况，能同时核对坐标变换与阻力符号。

4.5.5 动力、环境与观测扩展：受力曲线

加入动力滞后以后，受力曲线先改变

- **运行：**输出共17个状态，入口为 `modeling_stages('actuator_environment')`。
- **读图：**推力目标相同，但电机使实际向上力在切换处逐渐变化；图中合力还包含机身阻力。
- **局部核验：**对单次阶跃，可在转速曲线上检查0.05 s后的变化约达总变化的63.2%，再检查平方推力。



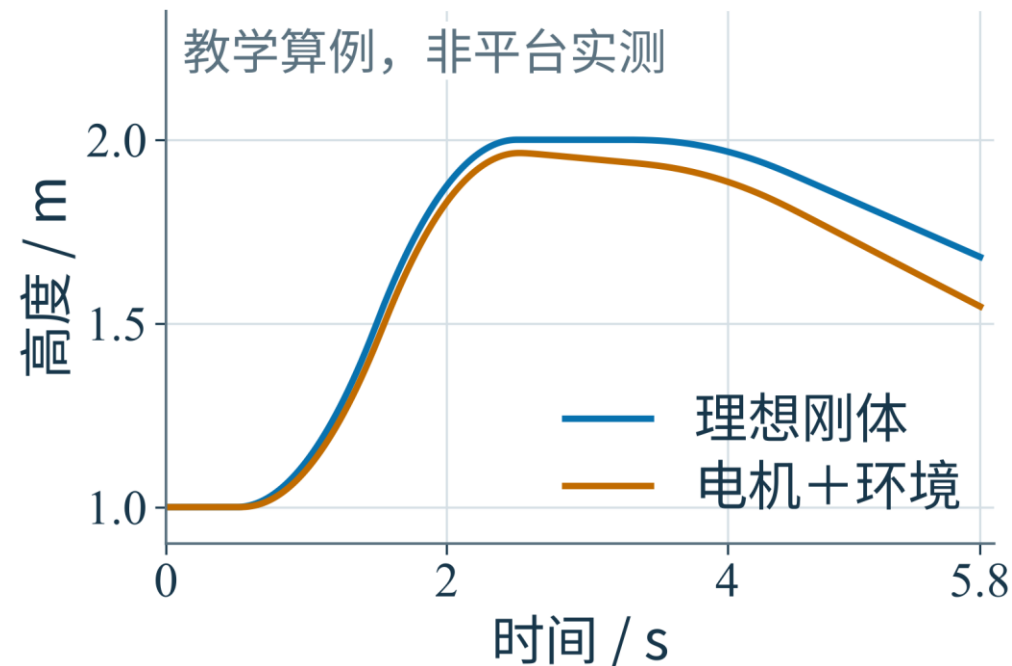
图：相同指令下的向上合力

动力状态的延迟先改变受力，再通过积分改变速度和轨迹。

4.5.5 动力、环境与观测扩展：终点比较

同一指令时序不再保证相同终点

- **5.8 s对照：**理想刚体高度约1.68103 m，电机与环境扩展模型约1.54633 m。
- **解释差异：**倾斜时竖直推力约19.28 N，小于19.6 N重力，回平后保留下沉速度；扩展模型再叠加动力滞后、风和阻力。
- **进一步实验：**分别关闭风、阻力或缩短电机时间常数并另存目录；若关闭的是主要原因，扩展曲线应靠近理想刚体。



图：理想刚体与扩展模型的高度

加入新的物理过程后，应重新检验原来依赖简化条件的终点结论。

4.5.5 动力、环境与观测扩展：理想惯性观测

由运动状态计算理想惯性传感器观测

- **观测位置：**先取质心、安装轴与FRD重合的理想传感器；偏心安装和噪声可在此基础上扩展。
- **比力：**从NED加速度中减去重力，再转回机体系；悬停时得到 $[0, 0, -g]^T$ 。
- **陀螺仪：**理想角速度直接取 $x(11:13)$ ；若观测轴与机体系不同，需按安装矩阵转换。

$$\mathbf{f}_b = R^T(\mathbf{a}_e - [0, 0, g]^T), \quad \boldsymbol{\omega}_{\text{gyro}} = \boldsymbol{\omega}_b$$

传感器读数由运动真值派生，不能把地面加速度直接当成机体比力。



4.5 多旋翼模型逐步编程与仿真



本章目录

多旋翼运动模型的逐步实现与核验

第四章 载具运动建模与仿真

- 4.1 运动建模基础与运动学
- 4.2 刚体动力学与运动求解
- 4.3 动力单元、受力与观测建模
- 4.4 配平、线性化与动态系统基础
- 4.5 多旋翼模型逐步编程与仿真**
- 4.6 参数测量与静态模型辨识
- 4.7 动态系统辨识、验证与模型修正
- 4.8 典型无人载具建模与扩展
- 4.9 建模工具、代码生成与模型部署
- 4.10 API与SDK建模接口
- 4.11 例程体系与综合实践
- 4.12 习题案例分析与课程设计

本节 6 个教学单元

4.5.1 程序的对象、状态与层次

教材：4.1.3.1–4.1.3.2、4.2.3节

4.5.2 升降运动的最小程序

教材对应：第4.1.4.1节 平移动力学

4.5.3 单轴转动的递进实现

教材对应：第4.1.4.1节、第4.1.4.4节

4.5.4 三维刚体与数值积分

教材对应：第4.1.4.1节、第4.1.4.4节

4.5.5 动力、环境与观测扩展

教材对应：第4.1.4.2节、第4.1.4.3节、第4.1.4.6节

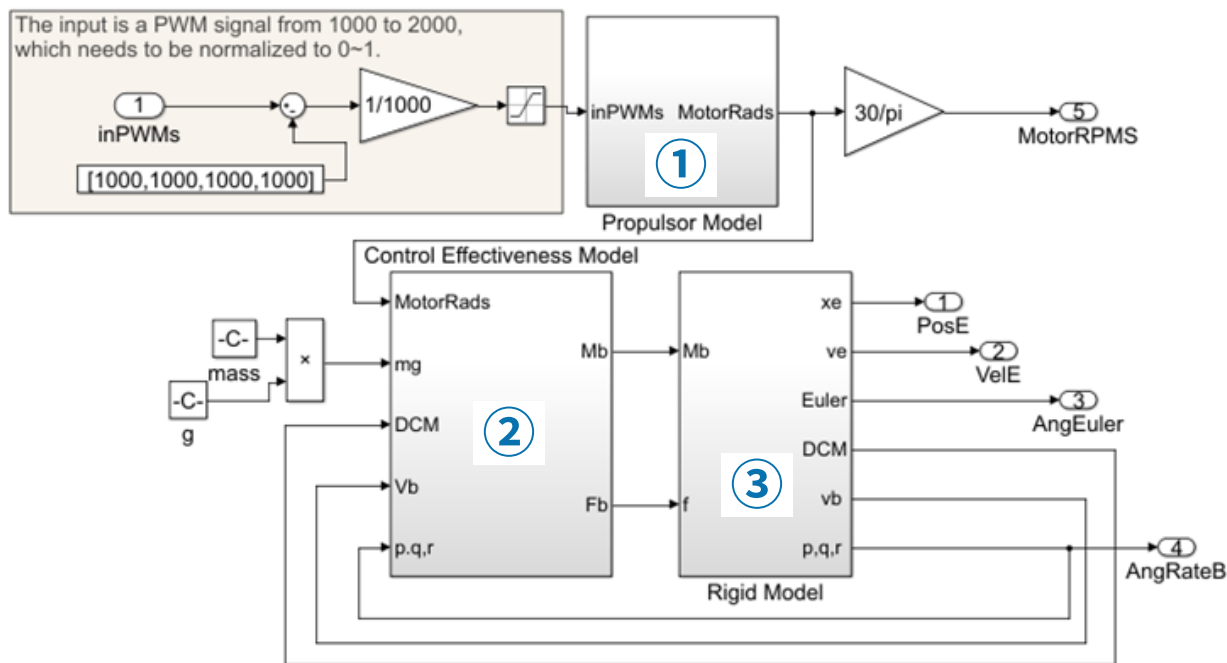
4.5.6 真实模板对照与验收

教材对应：第4.2.3节、第4.2.4节



4.5.6 真实模板对照与验收：真实模型入口

真实例程把这些方程连接成动力学模型



- ① **动力单元**: PWM指令归一化后, 产生各电机转速。
- ② **控制效率**: 由转速、质量与重力算出合力与合矩, 力已含重力。
- ③ **刚体模块**: 积分得位置、速度与姿态; DCM (方向余弦矩阵) 与本节R同表姿态。
- **口径**: 模型1.4 kg、积分机体速度; 与本节2 kg算例参数独立。

图: e12 四旋翼动力学整体模型

执行器产生力和力矩, 刚体模块积分得到位置与姿态。

4.5.6 真实模板对照与验收：文件与模块定位

例程文件与本节公式的对应关系

- **例程目录：** [安装目录]/RflySimAPIs/4.RflySimModel/2.AdvExps/e12_ModelTempId/3.ModelingTemp/code/。



图：文件到方程

- **运行：** MATLAB中先运行Init.m，再打开并运行dynamics.slx；ode4即四阶龙格—库塔，步长0.001 s（本节0.002 s），总力含重力。
- **现象与排查：** pwm输入为0时机体从100 m下落，阻力使向下加速度逐渐减小；编译报错先查mex编译器配置。

从已理解的状态与方程出发，才能读懂实际仿真模型。

4.5.6 真实模板对照与验收：子系统对应

把教学函数对应到真实模板的子系统

- **M0入口：** 1.BasicExps/e0_MinModelTemp中的Exp1_MinModelTemp.slx用于部署起点，内部为六自由度（6DOF）欧拉角模块；质量1.515 kg，按自身初始化脚本求悬停点。
- **D0入口：** 2.AdvExps/e12_ModelTempId/3.ModelingTemp/code/dynamics.slx便于逐式对照方程；需对应版本的进阶资源。
- **逐层查找：** 先找电机状态，再找推力与力矩合成，之后找刚体导数及积分；端口和单位按照实际连线核对。
- **比较条件：** 教学模型、M0和D0先分别自检。若比较曲线，必须统一参数、初态、输入、环境和模型时间。

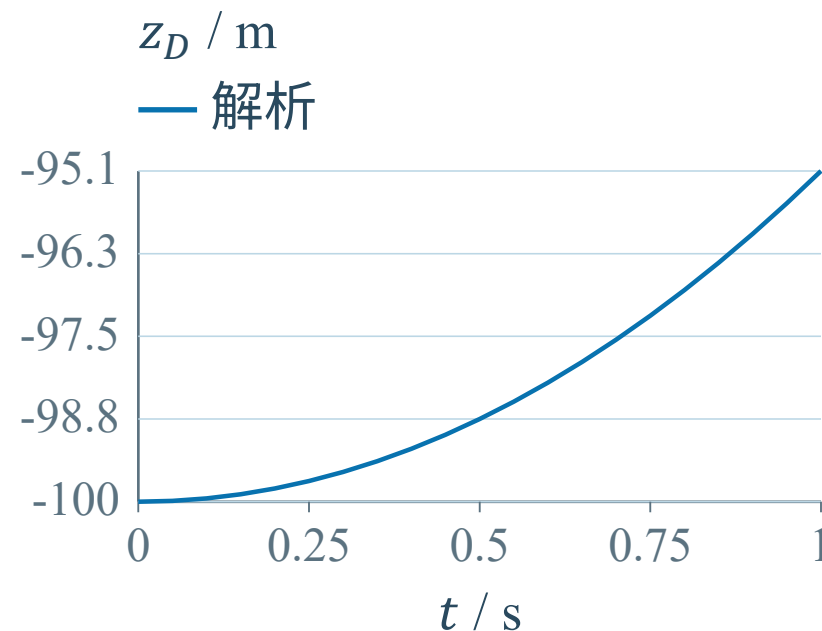
对应的是方程、信号和参数来源，模板与教学模型仍是不同对象。

4.5.6 真实模板对照与验收：自由落体预测

实验一：先预测无推力自由运动

- **理想条件：** $z_0 = -100 \text{ m}$ 、 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ ，初速为零；无推力、无阻力、无接触。
- **手算结果：** 1 s时向下速度9.8 m/s，位移4.9 m， $z_D = -95.1 \text{ m}$ ，NED向下为正，数值变大。
- **程序对照：** zero工况取 $z_D = -10 \text{ m}$ 、 $g=9.81 \text{ m/s}^2$ ，1 s后 $z_D = -5.095 \text{ m}$ 、向下速度9.81 m/s；运行见课件4.11.2「零输入基准」页。

$$v_D = gt, \quad z_D = z_0 + 1/2 gt^2$$



图：自由落体解析基准（教学计算）

在无接触、无阻力的理想条件下，向下速度随时间线性增加。

4.5.6 真实模板对照与验收：自由落体排查

自由落体偏离时先看受力

- **不下落：**先看是否已经触地、接触力是否抵消重力，以及位置或速度是否被测试连线固定。
- **速度趋稳：**查看阻力是否随速度增长；保留阻力的物理模型本来就不会永久保持重力加速度。
- **方向相反：**检查NED符号、坐标变换和重力是否重复加入；这类结构错误靠调整步长无法修正。
- **完整排查：**M0逐层定位见课件4.11.2「异常定位」页。

自由落体偏差先查接触、阻力与重力口径，再评估积分误差。

4.5.6 真实模板对照与验收：悬停手算

实验二：先手算M0的近似悬停点

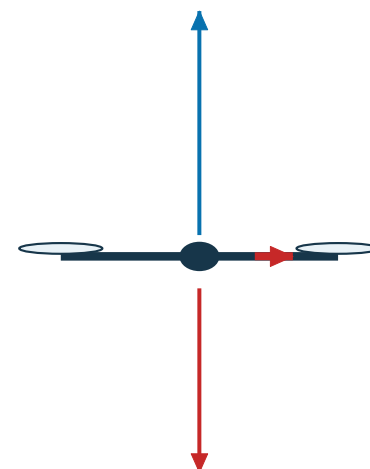
- **手算近似：** 1.515 kg，本页取 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ ；总推力 14.847 N，每桨3.71175 N。
- **反求：** 由 $c_T = 1.681 \times 10^{-5}$ 求转速，再由课件4.3的M0映射 $\omega = 842.1u + 22.83$ 求输入；程序取 $g=9.81$ ，得 470.14 rad/s、 $u \approx 0.53118$ 。

$$\omega_h = \sqrt{3.71175 / (1.681 \times 10^{-5})} = 469.90 \text{ rad/s}$$

$$u_h = (469.90 - 22.83) / 842.1 = 0.53090$$

- **起步：** 零转速启动有电机暂态，不会立即悬停；两种初态的对照见课件4.11.2「平衡与启动」页。

$$\sum T_i = 14.847 \text{ N}$$



$$mg = 14.847 \text{ N}$$

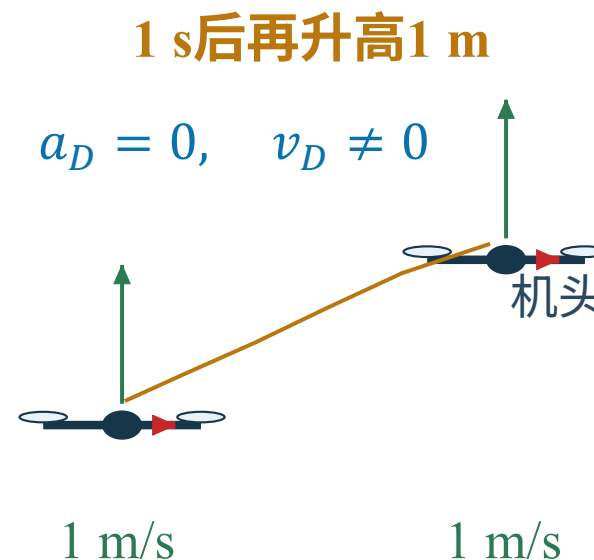
水平、四桨对称

静态悬停同时要求合力为零、力矩为零和初始速度为零。

4.5.6 真实模板对照与验收：对称输入

对称增加输入为何主要改变升降

- **对称增推：**水平对称四桨的力矩相互抵消；总推力大于重力时，向下加速度为负，飞机开始向上加速。
- **反例：**已向上1 m/s后将推力恢复为重力，合力为零，1 s后仍向上1 m/s，高度再增加1 m。
- **判别：**恢复平衡推力不会刹停；若速度立刻归零，检查控制器、状态复位或把目标值误当状态。



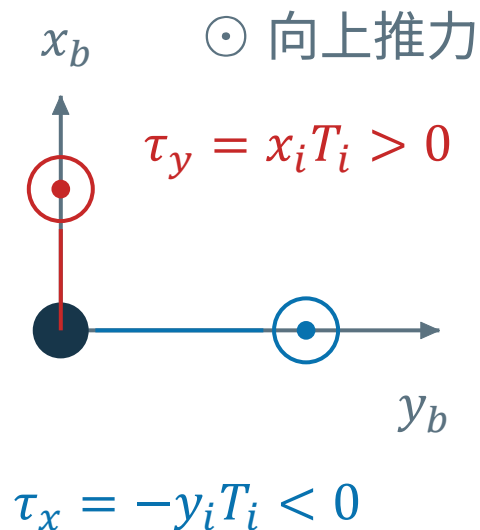
$$a_D = g - \frac{\sum_i T_i}{m}$$

水平对称条件下，合推力改变而各轴力矩相互抵消。

4.5.6 真实模板对照与验收：单电机方向

实验三：单电机增量先算方向

- 在FRD机体系中，旋翼位置为 $(x_i, y_i, 0)$ ，向上推力为 $(0, 0, -T_i)$ ，力臂叉乘得到滚转与俯仰力矩。
- **符号判断：**右侧旋翼增推产生负滚转力矩，前侧旋翼增推产生正俯仰力矩；反扭矩还取决于旋向约定。
- **M0编号：**X型布局的位置与旋向见课件4.3的M0编号核对，与本节“+”构型编号不同。
- **程序对照：**motor1工况在平衡转速上给第一路输入加0.03，结果见课件4.11.2「单电机增量」页。

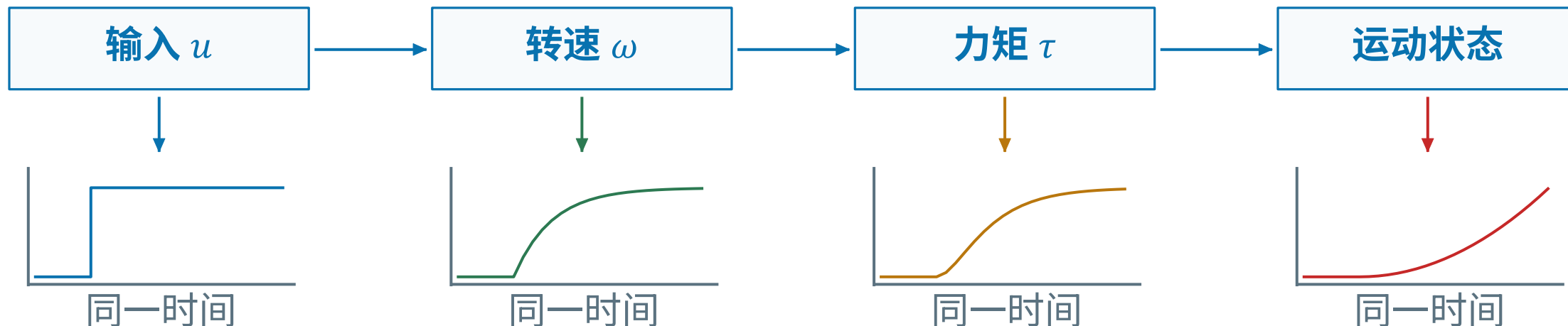


图：旋翼位置与力臂矩方向

力矩符号由电机位置与推力方向决定，不能只凭编号猜测。

4.5.6 真实模板对照与验收：输入与状态时间轴

把输入、部件和状态放在同一时间轴



图：沿信号逐层记录；波形仅为因果形状示意

- **排查顺序：**输入变而转速不变，查门限和接线；转速对而力矩错，查布局。
- **再往后：**力矩对而角速度错，查惯量与坐标；各层日志共用仿真时间。

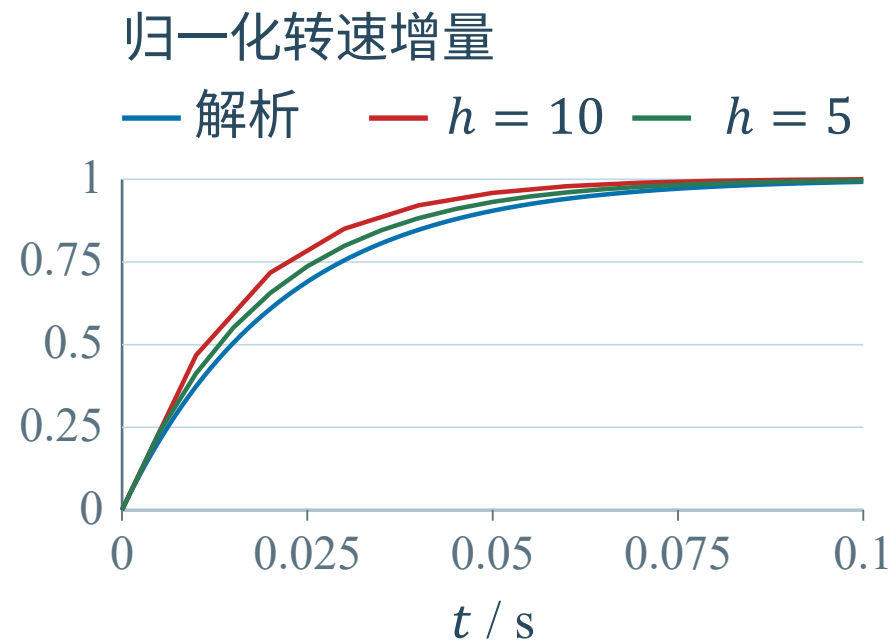
逐层找第一处偏差，比只看最终位置更容易定位原因。

4.5.6 真实模板对照与验收：一阶电机与步长

用一阶电机基准比较步长误差

- **M0电机：** $\tau_m = 0.0214 \text{ s}$, $\eta = 1 - e^{-t/\tau_m}$ (课件4.3)，一个时间常数达63.2%。
- **同一欧拉方程：** 10 ms步长算1步为0.4673；5 ms步长算2步为0.4127，都对应10 ms。
- **误差：** 解析值0.3733；误差由0.0940降到0.0394，约减半，符合一阶收敛（课件4.2）。
- **M0对照：** 步长对比见课件4.11.2。

$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{h}{\tau_m} (1 - \eta_k)$$



图：步长单位ms，曲线为教学计算

先固定物理问题，再在相同仿真时刻比较数值结果。

4.5.6 真实模板对照与验收：综合模型边界

综合模型把载具运动与控制器合在一起

- **教材第4.2.4节：**综合模型是“载具模型+控制器”一体化实现。前面2 kg教学程序与M0/D0只负责运动求解，不能直接称为综合模型。
- **实现路线：**在Simulink运动模型内集成控制算法，生成的DLL既处理控制指令又计算运动；控制接口、状态定义和调度周期须一起核对。
- **使用边界：**软件／硬件在环（SITL/HITL）调用PX4闭环，贴近真实控制流程；综合模型可脱离PX4运行，适合加速与并行训练，不能代替飞控验证。
- **蓝图路线：**UE蓝图综合模型用UE物理引擎处理接触碰撞，并内置简化上层控制器，与DLL路线是两种不同实现。

运动模型求物理响应；综合模型还须实现控制闭环。

4.5.6 真实模板对照与验收：三层任务

用基础、改动与真实模型三层任务完成验收

- **基础完成：**运行四阶段，保存CSV、指标与曲线；用升降终点、单轴角速度和转角完成解析核验。
- **独立改动：**只改质量、惯量或电机时间常数中的一项，先写趋势预测再运行；如俯仰惯量加倍，单轴转角减半，副本中两处0.18同时改为0.09（符号不变）。
- **真实模型：**按课件4.11.2运行m0_offline_checks，用report.json中的参数完成自由落体、悬停与单电机方向三项预测和对照。
- **提交材料：**记录程序版本、参数、输入、初态、步长和输出路径；至少给出一项手算、一条状态曲线和一项误差。

代码、数值与物理解释相互一致，才构成一次可复查的建模实现。

课堂练习

换一组数据，先预测再运行

- **题1 改质量：**仍用4.5.2的推力时序（19.6、21.6、17.6、19.6 N），把质量改为2.4 kg。21.6 N段飞机会上升吗？3 s时高度约多少？
- **题2 改时长：**单轴阶段保持 $\pm 0.10 \text{ N} \cdot \text{m}$ 、俯仰惯量 $0.05 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ，两段各持续0.4 s。最大角速度与最终俯仰角各是多少？
- **题3 改时间常数：**在modeling_stages副本中令drag_k、wind_NED为零，再把motor_tau由0.05 s改为0.1 s。转速何时完成63.2%？1.5 s时高度比理想刚体高还是低？
- **做法：**先写预测再运行，另存输出目录。题1用vertical_beginner的质量参数；题2在modeling_stages副本中把command_forces与events的0.3、0.6改为0.4、0.8，single_axis的解析值-0.18与误差式中的+0.18都按预测改（符号不变）。

先写预测再运行，程序结果才能检验物理判断。

参考要点

课堂练习的预测与判据

- **题1:** 重力23.52 N，21.6 N段仍向下加速 0.8 m/s^2 ，全程下降；3 s时向下速度 4.9 m/s ，高度约 -5.5 m （无触地模型）。
- **题2:** 角加速度仍为 $\pm 2 \text{ rad/s}^2$ ，最大角速度 -0.8 rad/s ；转角与时长平方成正比，最终约 -0.32 rad （约 -18.3° ），角速度归零。
- **题3:** 转速0.1 s完成63.2%、0.3 s完成95.0%；上升推迟，1.5 s高度约 1.41 m （理想刚体 1.50 m ， $\tau_m = 0.05 \text{ s}$ 时约 1.45 m ），3 s时约 1.99 m 。
- **判据:** 方向与量级先对，再比数值；结果与预测相反时，先查符号、单位和输入时序。题3数值为离线教学算例。

改变参数时，先判断它改变的是合力、作用时间还是响应快慢。

本节小结

逐步建模的方法、判据与易错点

- **四阶段方法：**升降 → 单轴俯仰 → 三维刚体 → 电机、风与理想观测；接口和13列状态顺序不变，每次只加一个物理过程。
- **核验判据：**升降看终点高度与零速度；单轴看角速度斜率 M_y/J_y 与转角；三维看回平后保留的北向速度；扩展看初始导数与曲线差异的来源。
- **易错点一：**NED中 z_D 向下为正，高度 $H = -z_D$ ；推力不含重力，重力只在导数函数中加一次。
- **易错点二：**四元数初值须为 $[1,0,0,0]$ ，全零四元数非法；RK4的一步试算不能跨越推力切换时刻。
- **易错点三：**目标推力、目标转速是输入，不是状态；归一化转速只比较响应形状，推力模型要用真实转速（rad/s）。