本章目录

多旋翼运动模型的逐步实现与核验

第四章 载具运动建模与仿真

4.1 运动建模基础与运动学
4.2 刚体动力学与运动求解
4.3 动力单元、受力与观测建模
4.4 配平、线性化与动态系统基础
4.5 多旋翼模型逐步编程与仿真
4.6 参数测量与静态模型辨识
4.7 动态系统辨识、验证与模型修正
4.8 典型无人载具建模与扩展
4.9 建模工具、代码生成与模型部署
4.10 API与SDK建模接口
4.11 例程体系与综合实践
4.12 习题案例分析与课程设计

本节 6 个教学单元

4.5.1 程序的对象、状态与层次
教材：4.1.3.1–4.1.3.2、4.2.3节

4.5.2 升降运动的最小程序
教材对应：第4.1.4.1节 平移动力学

4.5.3 单轴转动的递进实现
教材对应：第4.1.4.1节、第4.1.4.4节

4.5.4 三维刚体与数值积分
教材对应：第4.1.4.1节、第4.1.4.4节

4.5.5 动力、环境与观测扩展
教材对应：第4.1.4.2节、第4.1.4.3节、第4.1.4.6节

4.5.6 真实模板对照与验收
教材对应：第4.2.3节、第4.2.4节

本节导入

把四层关系写成可以逐项检查的程序

- **先隔离问题：**先给定推力，完成升降；再增加俯仰；最后连接三维姿态、动力与环境。
- **同一条计算链：**输入函数给各桨指令，受力函数求合力合矩，导数函数求变化率，积分器更新状态。
- **同一套证据：**每一步保存状态、受力和模型时间，手算值、曲线和代码必须能够相互对应。



图：四层运动模型

程序中的每一层，都返回下一层需要且能够核验的物理量。

4.5.1 程序的对象、状态与层次：教学入口

先找到可以独立运行的教学入口

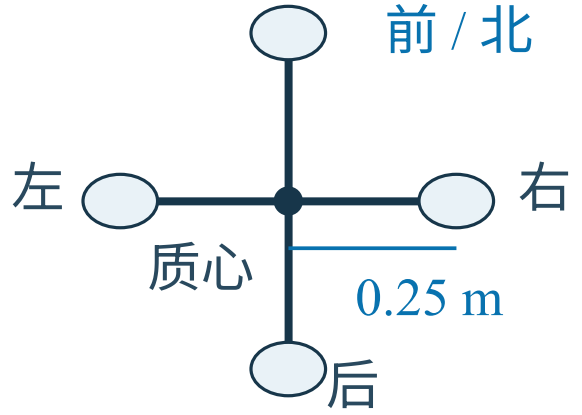
- **目录：**[安装目录]/RflySimAPIs/4.RflySimModel/1.BasicExps/e6_ModelingLearningLab/，先读该目录的Readme.pdf。
- **本节程序：**01_VerticalRigidBody（先读其Readme.pdf）；MATLAB当前目录切到此处，运行modeling_stages('vertical')等四个阶段，vertical_beginner与simulation.py是独立入门路线。
- **M0检查：**05_M0Checks中的m0_offline_checks.m复制e0_MinModelTemp的模型做离线工况，需要Simulink；分阶段程序只需基础MATLAB，Python路线需NumPy。
- **输出与排查：**正常结束时命令窗口显示metrics且checks_pass为true；outputs阶段子目录存CSV、JSON与PNG；目录不可写时把可写目录作为输出参数传入。

例程目录中的程序、数据和说明共同构成可重复的建模实验。

4.5.1 程序的对象、状态与层次：程序参数回顾

程序沿用贯穿案例的参数、初态与坐标约定

- **初态：**机体水平、机头朝北，速度与角速度为零；对象与简化条件见课件4.1「参数与初始条件」页。
- **教学参数：**$m = 2\,\mathrm{kg}$，$g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$；旋翼力臂均为$0.25\,\mathrm{m}$，俯仰惯量$J_y = 0.05\,\mathrm{kg\,m^2}$。
- **输入与输出：**按前、右、后、左给定四桨推力，计算位置、速度、姿态和角速度。命令到推力的过程见课件4.3。



图：俯视构型与旋翼力臂

- **程序中的简化：**阻力、旋转阻尼、旋翼响应与触地先取零，升降和单轴转动可用解析值核对；4.5.5再加入电机滞后与相对来流。
- **原点与高度：**地面原点在起点正下方，地向为正；$z_D = -1\,\mathrm{m}$，$H = -z_D = 1\,\mathrm{m}$。

先确定对象和工况，再用模型预测指定输入下的响应。

4.5.1 程序的对象、状态与层次：函数与状态接口

函数接口固定，阶段增加的是内部物理过程

- **调用约定：** modeling_stages(stage,outDir,dt)选择阶段、输出目录和步长；默认步长为0.002 s。
- **返回状态：** result.state前13列始终按位置、速度、四元数和机体角速度排列；扩展阶段在末尾加4列转速。
- **返回载荷：** force_body_N不含重力；moment_body_Nm关于质心；acceleration_NED_mps2与地面NED坐标一致。

$$\mathbf{x} = [\mathbf{p}_e^{\mathrm{T}}, \mathbf{v}_e^{\mathrm{T}}, \mathbf{q}_{eb}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\omega}_b^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$$

- **下标：** e指地面北东地（NED）系，b指机体前右下（FRD）系。

固定返回量，使简单阶段和复杂阶段能够用同一套方法比较。

本章目录

多旋翼运动模型的逐步实现与核验

第四章 载具运动建模与仿真

4.1 运动建模基础与运动学
4.2 刚体动力学与运动求解
4.3 动力单元、受力与观测建模
4.4 配平、线性化与动态系统基础
4.5 多旋翼模型逐步编程与仿真
4.6 参数测量与静态模型辨识
4.7 动态系统辨识、验证与模型修正
4.8 典型无人载具建模与扩展
4.9 建模工具、代码生成与模型部署
4.10 API与SDK建模接口
4.11 例程体系与综合实践
4.12 习题案例分析与课程设计

本节 6 个教学单元

4.5.1 程序的对象、状态与层次
教材：4.1.3.1–4.1.3.2、4.2.3节

4.5.2 升降运动的最小程序
教材对应：第4.1.4.1节 平移动力学

4.5.3 单轴转动的递进实现
教材对应：第4.1.4.1节、第4.1.4.4节

4.5.4 三维刚体与数值积分
教材对应：第4.1.4.1节、第4.1.4.4节

4.5.5 动力、环境与观测扩展
教材对应：第4.1.4.2节、第4.1.4.3节、第4.1.4.6节

4.5.6 真实模板对照与验收
教材对应：第4.2.3节、第4.2.4节

4.5.2 升降运动的最小程序：状态与方程

从两条升降方程确定程序要保存什么

- **条件：**机体水平、推力竖直向上，采用近无风悬停的小扰动基线，本阶段取零阻力。

- **变量：**地向坐标z_D向下为正；初态$z_D = -1\,\mathrm{m}$、$v_D = 0$；高度记为$H = -z_D$。
- **推力作用：**总推力$T = mg$时加速度为零；$T > mg$时$a_D < 0$，向上加速。

$$\dot{z}_D = v_D, \qquad \dot{v}_D = g - \frac{T}{m}$$

速度是位置的变化率，合力除以质量才是速度的变化率。

4.5.2 升降运动的最小程序：分段输入

分段输入先加速，再减速，最后保持

- **时间安排：** 前0.5 s悬停；0.5–1.5 s加速上升；1.5–2.5 s减速；之后保持。
- **四桨相同：** 每桨5.4 N时总推力21.6 N；每桨4.4 N时总推力17.6 N；平衡值每桨4.9 N。

```
forces = 4.9*ones(4,1);
if t>=.5 && t<1.5
    forces(:)=5.4;
elseif t>=1.5 && t<2.5
    forces(:)=4.4;
end
```

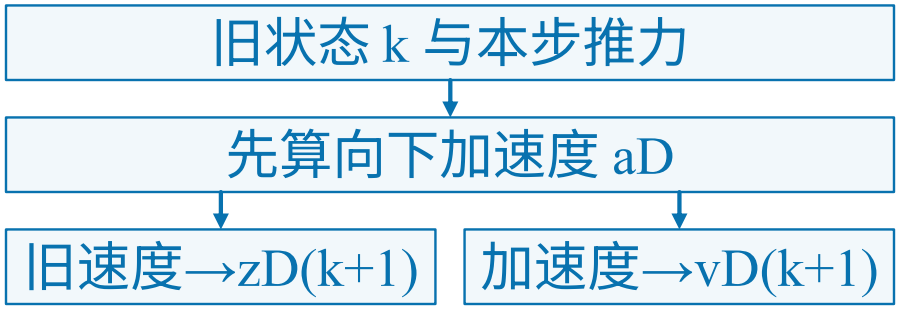
只把推力恢复为重力，不能消除已经积累的上升速度。

4.5.2 升降运动的最小程序：可运行程序核心

升降的前向欧拉核心只需一个循环

- **变量：**t为时间，T为总推力，zD为地向位置，vD为地向速度。初始化zD(1)=-1、vD(1)=0；dt为步长。

```
for k = 1:numel(t)-1
    aD = g - T(k)/m;
    zD(k+1) = zD(k) + dt*vD(k);
    vD(k+1) = vD(k) + dt*aD;
end
```



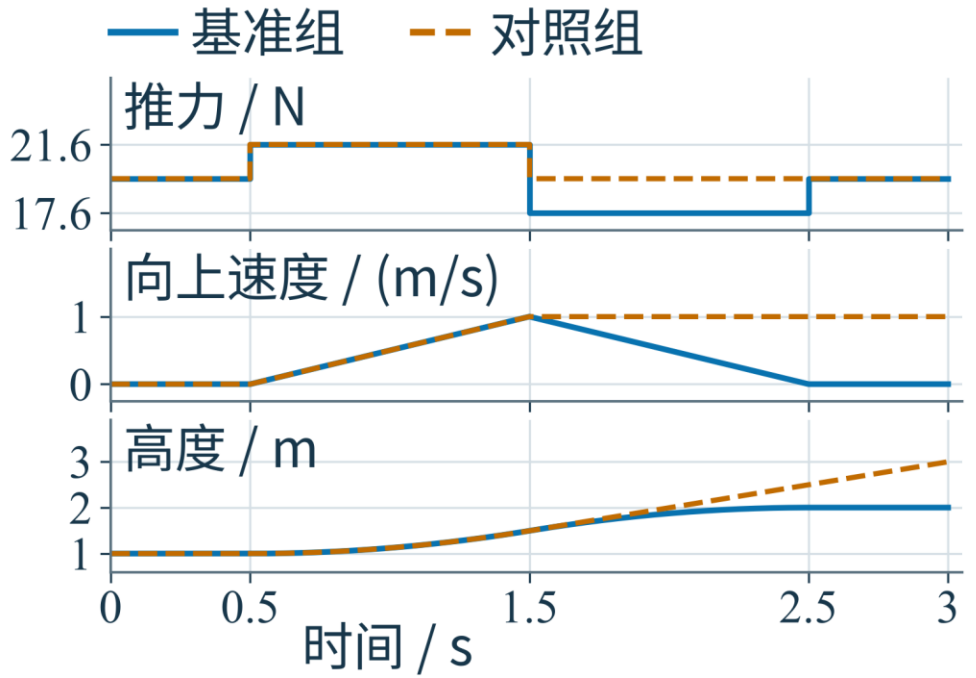
图：右侧同读k，分别写入k+1

- **读代码：**每次循环先求合力对应的加速度，再用旧位置和旧速度更新；两行右侧都读取索引k。位置和速度数组保留每一步结果。
- **显示曲线：**plot(t,-zD)显示高度，plot(t,-vD)显示向上速度。

4.5.2 升降运动的最小程序：运行结果判读

读升降案例的推力、速度与高度曲线

- **入口回顾：**课件4.1课堂练习已运行vertical_beginner；本页读曲线与程序。
- **基准输入：**21.6 N加速1 s、17.6 N减速1 s，其余时段19.6 N；对照组取消减速段。
- **先读结果：**基准组3 s时高2 m、速度为0；对照组保持约1 m/s上升，3 s时约3 m。
- **读图：**推力分段决定加速度，速度是加速度的累积，高度又是速度的累积；1.5 s时向上速度最大。



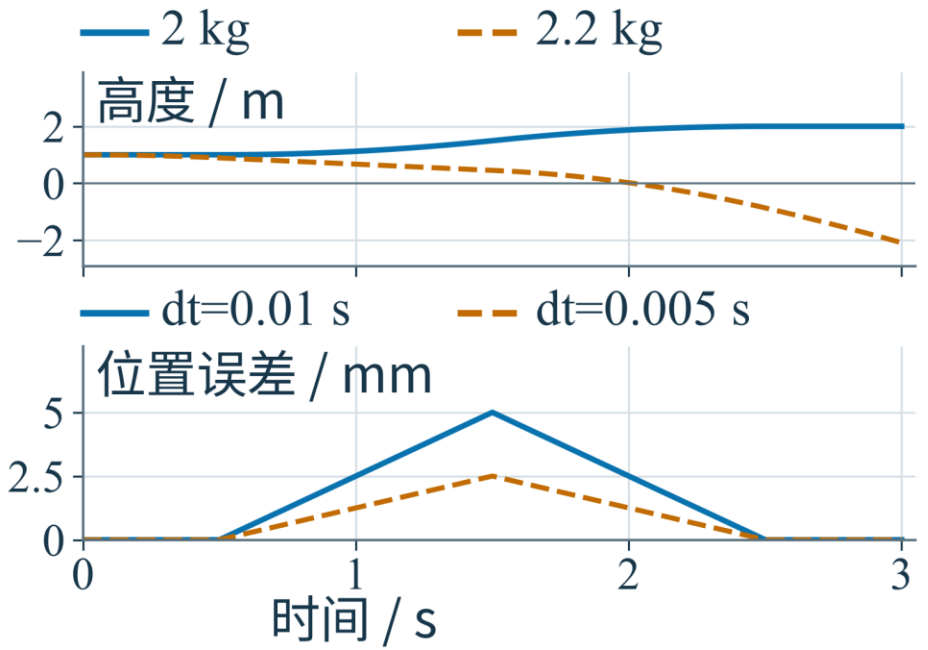
图：基准组与对照组（教学算例，非平台实测）

先用能手算的工况检查程序，再逐步增加模型复杂度。

4.5.2 升降运动的最小程序：改变一个参数

每次只改一个参数，先预测再运行

- **改质量：** *m*改为2.2 kg，重力21.56 N超过19.6 N推力，悬停段向下加速约0.89 m/s²，3 s时高约−2.1 m（无触地模型）。
- **改步长：** 保持2 kg，dt由0.01 s减为0.005 s，最大位置误差从5 mm减半到2.5 mm。
- **另存结果：** 一次只改一个量，并为每次运行另设输出目录。



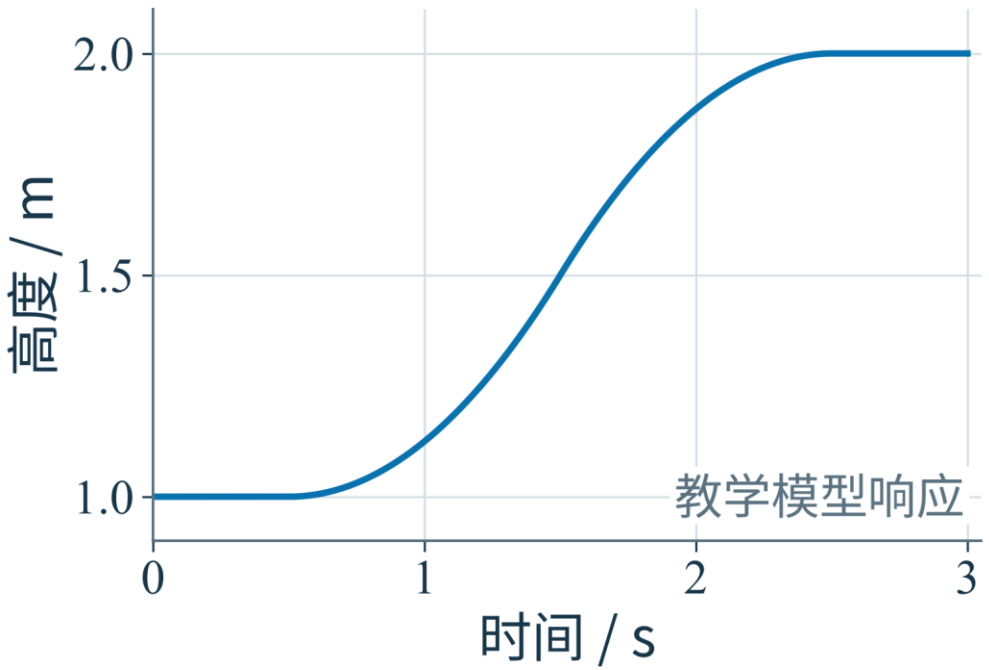
图：改质量与改步长（教学算例，非平台实测）

一次只改一个参数，结果的变化才能归因于这个参数。

4.5.2 升降运动的最小程序：终点与曲线核验

运行后先核对终点，再解释整条曲线

- **程序切换：**运行modeling_stages('vertical')，结果在outputs/vertical；积分改用四阶龙格—库塔法（RK4，4.5.4展开），方程与输入不变。
- **实算结果：**3 s时高度2.000 m，地向速度0；曲线先变陡、再变平。
- **回看输入：**0.5 s前与2.5 s后高度不变；加速、减速两段曲率相反。



图：升降阶段实际计算的高度

正确的终点同时满足目标高度和零竖直速度。

本章目录

多旋翼运动模型的逐步实现与核验

第四章 载具运动建模与仿真

4.1 运动建模基础与运动学
4.2 刚体动力学与运动求解
4.3 动力单元、受力与观测建模
4.4 配平、线性化与动态系统基础
4.5 多旋翼模型逐步编程与仿真
4.6 参数测量与静态模型辨识
4.7 动态系统辨识、验证与模型修正
4.8 典型无人载具建模与扩展
4.9 建模工具、代码生成与模型部署
4.10 API与SDK建模接口
4.11 例程体系与综合实践
4.12 习题案例分析与课程设计

本节 6 个教学单元

4.5.1 程序的对象、状态与层次
教材：4.1.3.1–4.1.3.2、4.2.3节

4.5.2 升降运动的最小程序
教材对应：第4.1.4.1节 平移动力学

4.5.3 单轴转动的递进实现
教材对应：第4.1.4.1节、第4.1.4.4节

4.5.4 三维刚体与数值积分
教材对应：第4.1.4.1节、第4.1.4.4节

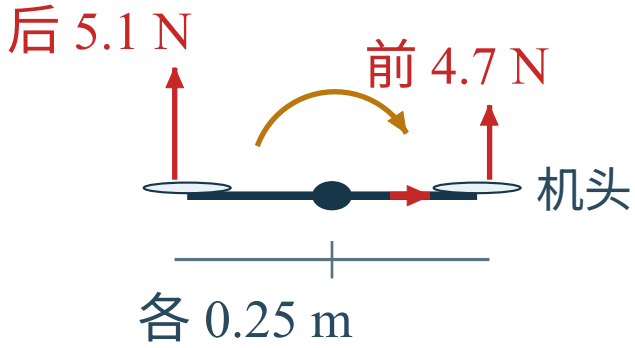
4.5.5 动力、环境与观测扩展
教材对应：第4.1.4.2节、第4.1.4.3节、第4.1.4.6节

4.5.6 真实模板对照与验收
教材对应：第4.2.3节、第4.2.4节

4.5.3 单轴转动的递进实现：单轴边界

单轴阶段先固定平移，只研究俯仰

- **物理对象：**把机体放在可绕质心俯仰的理想支架上，外部支撑保持位置不变；它不是自由飞行。
- **输入差动：**前桨4.7 N、后桨5.1 N，总推力仍为19.6 N；左右桨维持4.9 N。
- **保留状态：**角速度与四元数照常积分；代码仅把位置、线速度的导数置零，便于单独核对俯仰。



图：前弱后强，机头下俯

- **转动与制动：**负力矩0.3 s后接等大正力矩0.3 s，角速度归零，俯仰停在−0.18 rad（约−10.31°）；推导见课件4.2「单轴转动计算」页。

减少自由度是隔离转动关系的教学试验，约束必须明确写入模型。

4.5.3 单轴转动的递进实现：力臂与力矩

从安装位置直接算出俯仰力矩

- **教学构型：**前、右、后、左桨位于$+x_b, +y_b, -x_b, -y_b$；臂长为$L = 0.25$ m。
- **负俯仰段：**前桨4.7 N、后桨5.1 N，故$M_y = L(T_f - T_r) = -0.10$ N m。
- **数值预测：**$J_y = 0.05$ kg m^2，单轴时陀螺耦合项为零，角加速度为-2 rad/s^2。

$$\mathbf{M}_b = \sum_i \boldsymbol{\rho}_i \times [0,0,-T_i]^{\mathrm{T}}$$

- **符号：**$\boldsymbol{\rho}_i$为第i桨相对质心的位置，$[0,0,-T_i]^{\mathrm{T}}$为其在FRD中的向上推力。

力矩的正负来自位置与力向量的叉乘，不能只凭电机编号记忆。

4.5.3 单轴转动的递进实现：三段力矩

三段力矩把角速度带回零

- **输入时序：** 0–0.3 s施加−0.10 N·m；0.3–0.6 s施加+0.10 N·m；之后力矩为零。

```
if t<.3
    forces([1 3])=[4.7;5.1];
elseif t<.6
    forces([1 3])=[5.1;4.7];
end
```

$$M_y(t)=\begin{cases}-0.10\,\mathrm{N\,m}, & 0\le t<0.3\,\mathrm{s}\\ +0.10\,\mathrm{N\,m}, & 0.3\le t<0.6\,\mathrm{s}\\ 0, & t\ge 0.6\,\mathrm{s}\end{cases}$$

- **读码：** forces([1 3])依次是前桨与后桨；左右两桨保持4.9 N。程序以每步区间中点的时刻调用此分支。

反向力矩先消除角速度，姿态才停在新的角度。

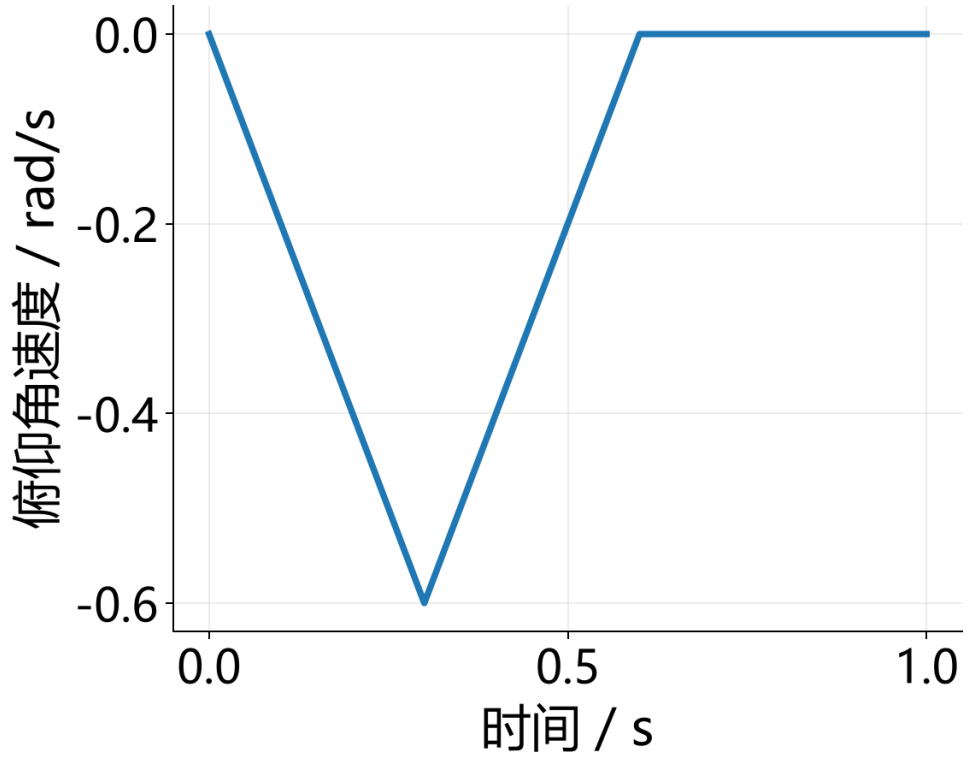
4.5.3 单轴转动的递进实现：角速度核验

先用角速度曲线核对力矩积分

- **运行：** r = modeling_stages('single_axis')，结果位于outputs/single_axis。

- **斜率对应角加速度。**
  0.3 s角速度为−0.6 rad/s，随后线性回零；0.6 s后不转。

- **面积对应俯仰角变化。**
  两段三角形面积各−0.09 rad，合计−0.18 rad（约−10.31°）。



图：单轴阶段的机体俯仰角速度

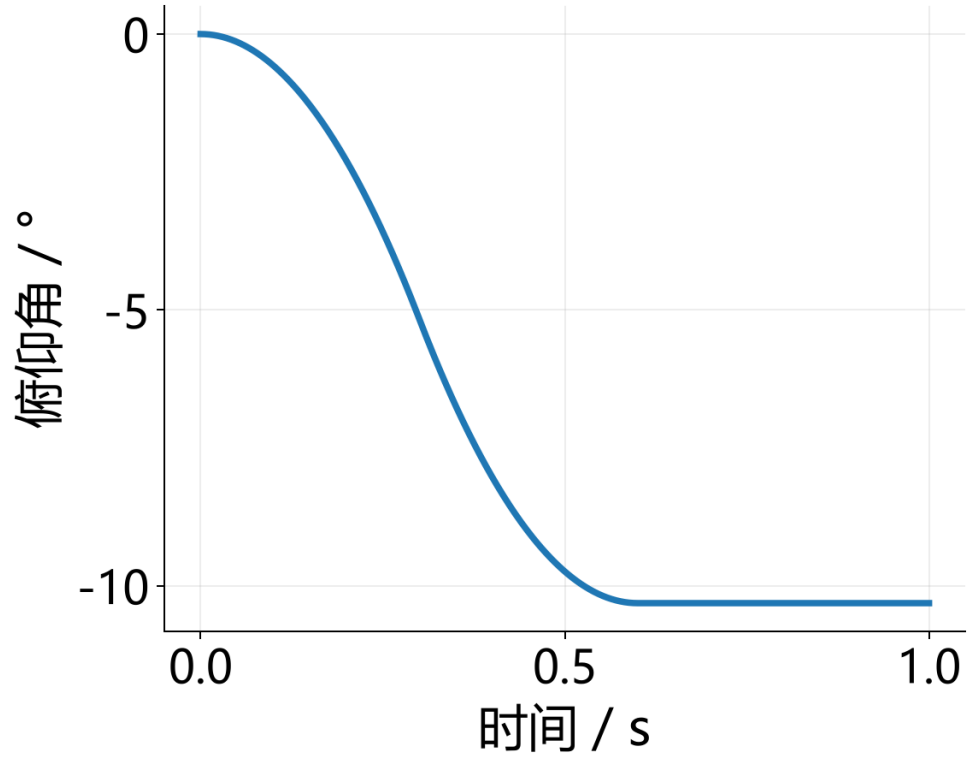
4.5.3 单轴转动的递进实现：终态俯仰角

角速度回零后，俯仰角停在新位置

- **角度结果：**最终俯仰角约−10.31°，与解析值−0.18 rad之差小于10^{-6} rad。

- **曲线形状：**0.3 s以后仍在低头，但变化速度逐渐减小；到0.6 s角速度为零才停住。停转不等于回平，回到水平需再安排反向动作。

- **改变参数：**俯仰惯量加倍而力矩不变，转角减半；副本中P.J(2,2)改为0.1，解析值与误差式中的0.18都改为0.09。



图：同一单轴实验的俯仰角

本章目录

多旋翼运动模型的逐步实现与核验

第四章 载具运动建模与仿真

4.1 运动建模基础与运动学
4.2 刚体动力学与运动求解
4.3 动力单元、受力与观测建模
4.4 配平、线性化与动态系统基础
4.5 多旋翼模型逐步编程与仿真
4.6 参数测量与静态模型辨识
4.7 动态系统辨识、验证与模型修正
4.8 典型无人载具建模与扩展
4.9 建模工具、代码生成与模型部署
4.10 API与SDK建模接口
4.11 例程体系与综合实践
4.12 习题案例分析与课程设计

本节 6 个教学单元

4.5.1 程序的对象、状态与层次
教材：4.1.3.1–4.1.3.2、4.2.3节

4.5.2 升降运动的最小程序
教材对应：第4.1.4.1节 平移动力学

4.5.3 单轴转动的递进实现
教材对应：第4.1.4.1节、第4.1.4.4节

4.5.4 三维刚体与数值积分
教材对应：第4.1.4.1节、第4.1.4.4节

4.5.5 动力、环境与观测扩展
教材对应：第4.1.4.2节、第4.1.4.3节、第4.1.4.6节

4.5.6 真实模板对照与验收
教材对应：第4.2.3节、第4.2.4节

4.5.4 三维刚体与数值积分：十三状态

十三个状态按四组保存

- **位置与速度：** 1–3列为NED位置，4–6列为NED线速度，单位分别为m和m/s。
- **姿态：** 7–10列为Hamilton四元数wxyz，表示机体FRD到地面NED；单位范数约束减少一个独立自由度。
- **角速度：** 11–13列为机体系角速度，单位rad/s；它们不是三个欧拉角的导数。
- **初始状态：** 所有状态先置零，再设 $x_3 = -1$ 、 $x_7 = 1$ ，即高度1 m、水平朝北、静止。

状态排序是程序接口的一部分，任何子函数都必须遵守同一顺序。

4.5.4 三维刚体与数值积分：受力函数

受力函数只做求和，不推进运动

- **函数输入：** forces是四桨向上推力，P.rotor_position是相对质心的位置，每行对应同一台电机。
- **函数输出：** Fb是机体系合力，Mb是质心合矩；本教学对称指令使反向旋转对的偏航反扭矩抵消。

```
fi = [zeros(4,2), -forces(:)];
Fb = sum(fi,1)';
Mb = sum(cross(P.rotor_position,fi,2),1)';
```

受力映射与状态积分分开，才能单独核对每个旋翼的贡献。

4.5.4 三维刚体与数值积分：平移方程

平移动力学先换坐标，再加一次重力

- **姿态矩阵：** rotation_matrix读取wxyz四元数，输出机体到地面旋转矩阵R。
- **力的约定：** Fb不含重力，因而地向重力加速度在导数函数中加一次；不能在受力函数重复加入。

```
R = rotation_matrix(x(7:10));
dx(1:3) = x(4:6);
dx(4:6) = [0;0;P.g] + R*Fb/P.mass;
```

$$\dot{\mathbf{p}}_e = \mathbf{v}_e, \quad \dot{\mathbf{v}}_e = g\,\mathbf{e}_3 + \mathbf{R}\mathbf{F}_b/m$$

- **读码：** [0;0;P.g]即$g\,\mathbf{e}_3$，$\mathbf{e}_3$为地向单位向量；R*Fb/P.mass即$\mathbf{R}\mathbf{F}_b/m$。

机体推力先转到NED，才能与地面重力放在同一个加速度方程里。

4.5.4 三维刚体与数值积分：转动与姿态方程

转动力学与姿态运动学共用机体角速度

- **动力学：**角动量耦合$\boldsymbol{\omega} \times (J\boldsymbol{\omega})$在三维运动中保留；单轴核验时才为零。
- **运动学：**四元数导数采用q与纯角速度四元数的Hamilton乘积；乘法左右次序由坐标约定决定。

```
omega = x(11:13);
dx(7:10) = .5*quat_product(x(7:10),[0;omega]);
dx(11:13) = P.J\(Mb-cross(omega,P.J*omega));
```

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_b = \mathbf{M}_b - \boldsymbol{\omega}_b \times (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_b)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\,\mathbf{q} \otimes [0, \boldsymbol{\omega}_b^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$$

- **读码：**P.J\(⋯)解线性方程而不求逆；quat_product即⊗。

合矩先改变机体角速度，角速度再改变姿态。

4.5.4 三维刚体与数值积分：Hamilton乘法

Hamilton乘法把标量与向量部分分别计算

- **分组：**a(1)、b(1)为标量部，a(2:4)、b(2:4)为向量部；dot是点乘，cross是叉乘。

- **调用：**姿态微分中b=[0;omega]；角速度必须使用rad/s，再由前面的0.5系数进入四元数导数。

```
q = [a(1)*b(1)-dot(a(2:4),b(2:4)); ...
     a(1)*b(2:4)+b(1)*a(2:4) ...
     + cross(a(2:4),b(2:4))];
```

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_0 b_0 - \mathbf{a}_v \cdot \mathbf{b}_v \\ a_0 \mathbf{b}_v + b_0 \mathbf{a}_v + \mathbf{a}_v \times \mathbf{b}_v \end{bmatrix}$$

- **对应：**a_0即a(1)，$\mathbf{a}_v$即a(2:4)；第一行是标量部，第二行是3维向量部。

四元数乘法的叉乘项保留旋转次序，不能换成逐元素乘法。

4.5.4 三维刚体与数值积分：四次求值

四次求值完成一个时间步

- **四阶龙格—库塔（RK4）：** f(x)简写本步输入、参数固定的导数函数，h为本步时长；试算四次后按权重合成。

```
k1 = f(x);
k2 = f(x+h*k1/2);
k3 = f(x+h*k2/2);
k4 = f(x+h*k3);
next = x+h*(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
next(7:10) = next(7:10)/norm(next(7:10));
```

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \frac{h}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4)$$

- **斜率：** k1取起点，k2、k3取两次中点试算，k4取终点试算，按1:2:2:1加权。

四阶RK方法用中间试算改善积分精度，真正状态每步只提交一次。

4.5.4 三维刚体与数值积分：输入跳变

输入跳变时刻也属于数值试验设置

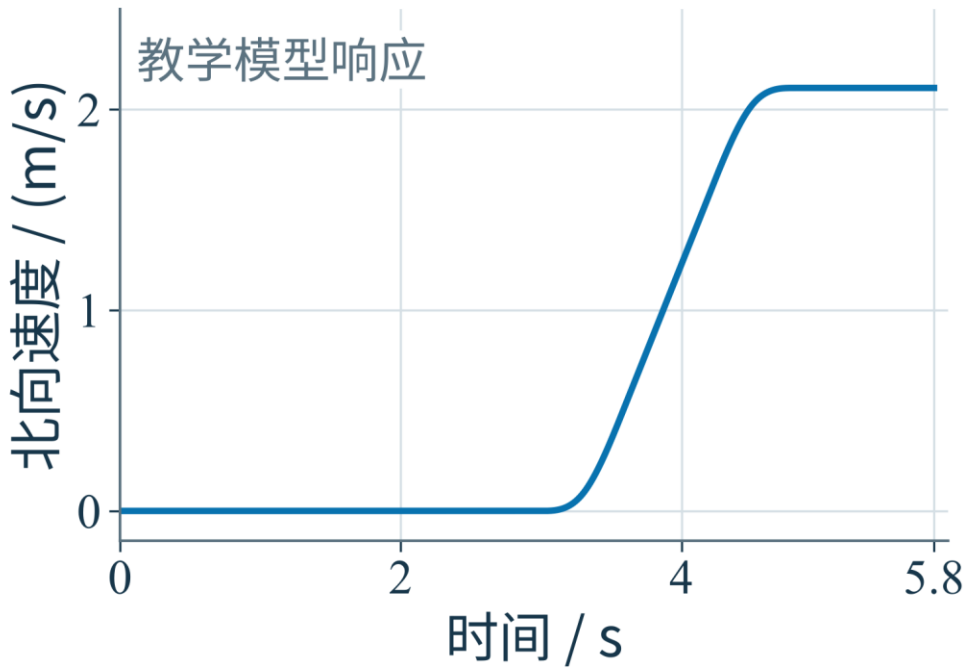
- **问题：**若一次RK试算跨过推力切换时刻，中间求值可能混用切换前后输入，造成终点偏差。
- **程序做法：**时间网格显式包含0.5、1.5、2.5 s等事件；本步使用区间中点对应的分段常量命令。
- **状态与记录：**输入跳变时状态仍连续；记录在切换时刻计算新输入下的导数，所以载荷曲线可以跳变。
- **步长对照：**把dt减半时保留相同事件、初态和输入，比较同一模型时刻，才能判断积分误差。

在输入事件处分步，才能让同一段积分使用同一段控制输入。

4.5.4 三维刚体与数值积分：北向速度核验

运行完整刚体阶段，先追踪北向速度

- **运行：** r = modeling_stages('rigid_body')；输出共13个状态，积分到5.8 s。
- **时序：** 3.0 s开始低头，3.6–4.2 s保持倾斜；随后反向动作恢复水平。
- **实算结果：** 4.8 s回平后，北向速度仍约2.10738 m/s；本基线无阻力，因此之后继续向北移动。



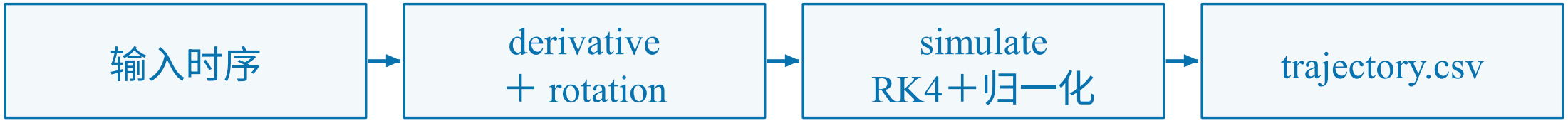
图：完整刚体阶段的北向速度

恢复三维平移后，倾斜推力会产生水平加速度并积累速度。

4.5.4 三维刚体与数值积分：三维程序与结果

运行完整刚体程序，从同一份CSV读三个量

- **程序入口：**simulation.py（需Python与NumPy）与rigid_body阶段参数、初态和输入相同：2 kg、初高1 m，阻力与旋转阻尼取零。



- **Python运行：**输出trajectory.csv

```
python simulation.py --out-dir outputs
```

- **MATLAB读表：**读同一份CSV画高度

```
D = readtable('outputs/trajectory.csv');
plot(D.t_s,D.height_m);
```

height_m（高度）

2.5 s：2 m，速度为零

pitch_deg（俯仰角）

3.6 s：约−10.31°，停止转动

v_N_mps（北向速度）

4.8 s：约2.11 m/s，仍向北

图：函数职责与同一份CSV中的三个观察量

本章目录

多旋翼运动模型的逐步实现与核验

第四章 载具运动建模与仿真

4.1 运动建模基础与运动学
4.2 刚体动力学与运动求解
4.3 动力单元、受力与观测建模
4.4 配平、线性化与动态系统基础
4.5 多旋翼模型逐步编程与仿真
4.6 参数测量与静态模型辨识
4.7 动态系统辨识、验证与模型修正
4.8 典型无人载具建模与扩展
4.9 建模工具、代码生成与模型部署
4.10 API与SDK建模接口
4.11 例程体系与综合实践
4.12 习题案例分析与课程设计

本节 6 个教学单元

4.5.1 程序的对象、状态与层次
教材：4.1.3.1–4.1.3.2、4.2.3节

4.5.2 升降运动的最小程序
教材对应：第4.1.4.1节 平移动力学

4.5.3 单轴转动的递进实现
教材对应：第4.1.4.1节、第4.1.4.4节

4.5.4 三维刚体与数值积分
教材对应：第4.1.4.1节、第4.1.4.4节

4.5.5 动力、环境与观测扩展
教材对应：第4.1.4.2节、第4.1.4.3节、第4.1.4.6节

4.5.6 真实模板对照与验收
教材对应：第4.2.3节、第4.2.4节

4.5.5 动力、环境与观测扩展：模块接口

保持刚体接口，增加电机和环境

- **新增动力状态：**四个电机转速作为第14–17项状态；推力由实际转速平方得到，不再立即等于命令。
- **新增环境：**向北1 m/s的风改变相对来流；三轴有符号平方阻力接入机体系合力。
- **保持可比：**仍使用同一推力目标时序、2 kg参数和初态，观察动力与环境对原基线的影响。



图：四层运动模型

扩展模型应能指出新增状态、输入和受力从哪里进入计算链。

4.5.5 动力、环境与观测扩展：电机状态

四个转速状态把动力滞后写进模型

- **目标与实际：**拉力系数$c_{\mathrm{T}} = 10^{-5}\,\mathrm{N/(rad/s)^2}$（课件4.3已定义，代码中记作Ct），电机时间常数$\tau_m = 0.05\,\mathrm{s}$；目标转速由目标推力反求。
- **初态一致：**每桨从4.9 N对应的稳态转速启动，与理想刚体阶段初态相同。

$$\tau_m \dot{\omega}_i + \omega_i = \omega_{t,i}, \quad T_i = c_{\mathrm{T}}\,\omega_i^2$$

```
motor = x(14:17);
target = sqrt(max(command,0)/P.Ct);
dx(14:17) = (target-motor)/P.motor_tau;
forces = P.Ct*motor.^2;
```

当前转速决定当前推力，目标转速只决定转速变化的方向和快慢。

4.5.5 动力、环境与观测扩展：相对风速

相对风速先在同一坐标系相减

- **先相减：** vNED和wind_NED均用地面NED坐标；相减得到相对空气速度，再转到机体系。
- **再算力：** 逐轴使用有符号平方关系；abs保留大小，前面的负号保证力反向，drag_k为教学系数。

```
vAirBody = R'*(vNED-P.wind_NED);
Fdrag = -P.drag_k*vAirBody.*abs(vAirBody);
Fb = Fb + Fdrag;
```

阻力反对的是相对空气运动，地面静止不意味着空气相对速度为零。

4.5.5 动力、环境与观测扩展：静止受风

用静止受风工况检查方向和量级

- **条件：**机体水平朝北、地速为零，风速向北1 m/s；三轴阻力系数取0.10，单位为N/(m/s)²。
- **方向：**载具相对空气速度向南，机体系前向分量为−1 m/s；阻力向北，为+0.10 N。
- **加速度：**质量2 kg，故初始北向加速度+0.05 m/s²。modeling_stages扩展阶段的初始值与此一致。

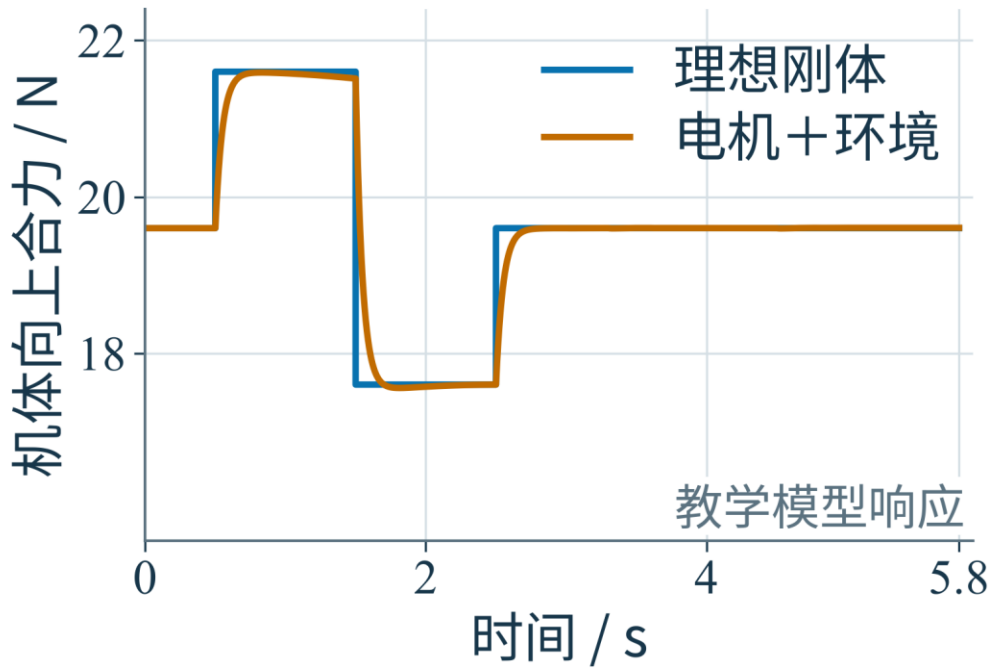
$$F_{D,N} = -0.10(-1)|-1| = 0.10\ \text{N}, \quad a_N = F_{D,N}/2 = 0.05\ \text{m/s}^2$$

一个可以独立手算的风场工况，能同时核对坐标变换与阻力符号。

4.5.5 动力、环境与观测扩展：受力曲线

加入动力滞后以后，受力曲线先改变

- **运行：**输出共17个状态，入口为modeling_stages('actuator_environment')。
- **读图：**推力目标相同，但电机使实际向上力在切换处逐渐变化；图中合力还包含机身阻力。
- **局部核验：**对单次阶跃，可在转速曲线上检查0.05 s后的变化约达总变化的63.2%，再检查平方推力。



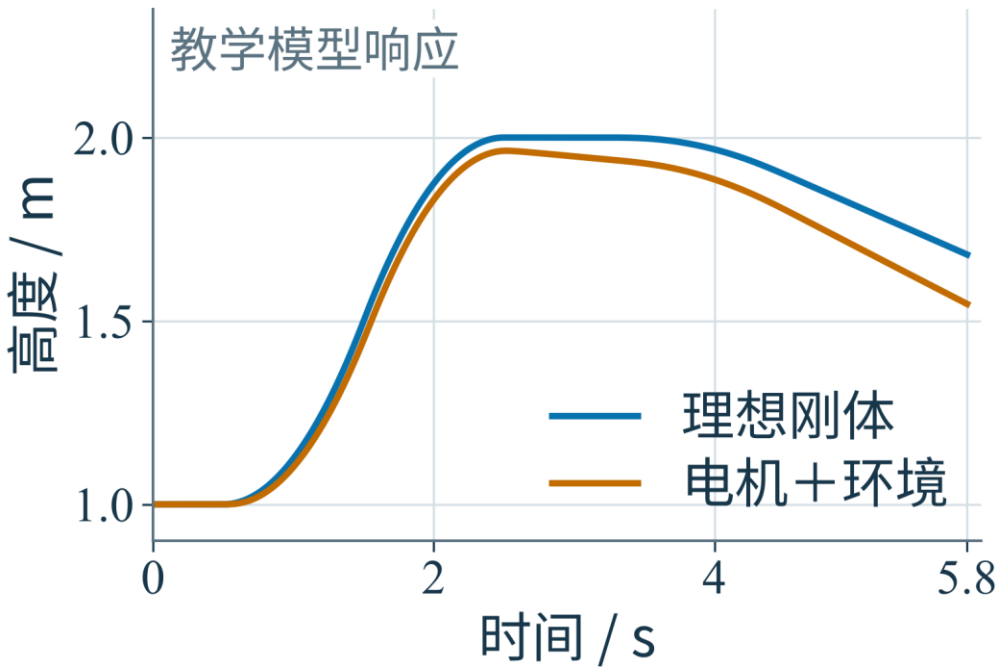
图：相同指令下的向上合力

动力状态的延迟先改变受力，再通过积分改变速度和轨迹。

4.5.5 动力、环境与观测扩展：终点比较

同一指令时序不再保证相同终点

- **5.8 s对照：**理想刚体高度约1.68103 m，电机与环境扩展模型约1.54633 m。
- **解释差异：**倾斜时竖直推力约19.28 N，小于19.6 N重力，回平后保留下沉速度；扩展模型再叠加动力滞后、风和阻力。
- **进一步实验：**分别关闭风、阻力或缩短电机时间常数并另存目录；若关闭的是主要原因，扩展曲线应靠近理想刚体。



图：理想刚体与扩展模型的高度

加入新的物理过程后，应重新检验原来依赖简化条件的终点结论。

4.5.5 动力、环境与观测扩展：理想惯性观测

由运动状态计算理想惯性传感器观测

- **观测位置：**先取质心、安装轴与FRD重合的理想传感器；偏心安装和噪声可在此基础上扩展。
- **比力：**从NED加速度中减去重力，再转回机体系；悬停时得到$[0,0,-g]^{\mathrm{T}}$。
- **陀螺仪：**理想角速度直接取x(11:13)；若观测轴与机体系不同，需按安装矩阵转换。

$$\mathbf{f}_b = R^{\mathrm{T}}(\mathbf{a}_e - [0,0,g]^{\mathrm{T}}), \qquad \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{gyro}} = \boldsymbol{\omega}_b$$

传感器读数由运动真值派生，不能把地面加速度直接当成机体比力。

本章目录

多旋翼运动模型的逐步实现与核验

第四章 载具运动建模与仿真

4.1 运动建模基础与运动学
4.2 刚体动力学与运动求解
4.3 动力单元、受力与观测建模
4.4 配平、线性化与动态系统基础
4.5 多旋翼模型逐步编程与仿真
4.6 参数测量与静态模型辨识
4.7 动态系统辨识、验证与模型修正
4.8 典型无人载具建模与扩展
4.9 建模工具、代码生成与模型部署
4.10 API与SDK建模接口
4.11 例程体系与综合实践
4.12 习题案例分析与课程设计

本节 6 个教学单元

4.5.1 程序的对象、状态与层次
教材：4.1.3.1–4.1.3.2、4.2.3节

4.5.2 升降运动的最小程序
教材对应：第4.1.4.1节 平移动力学

4.5.3 单轴转动的递进实现
教材对应：第4.1.4.1节、第4.1.4.4节

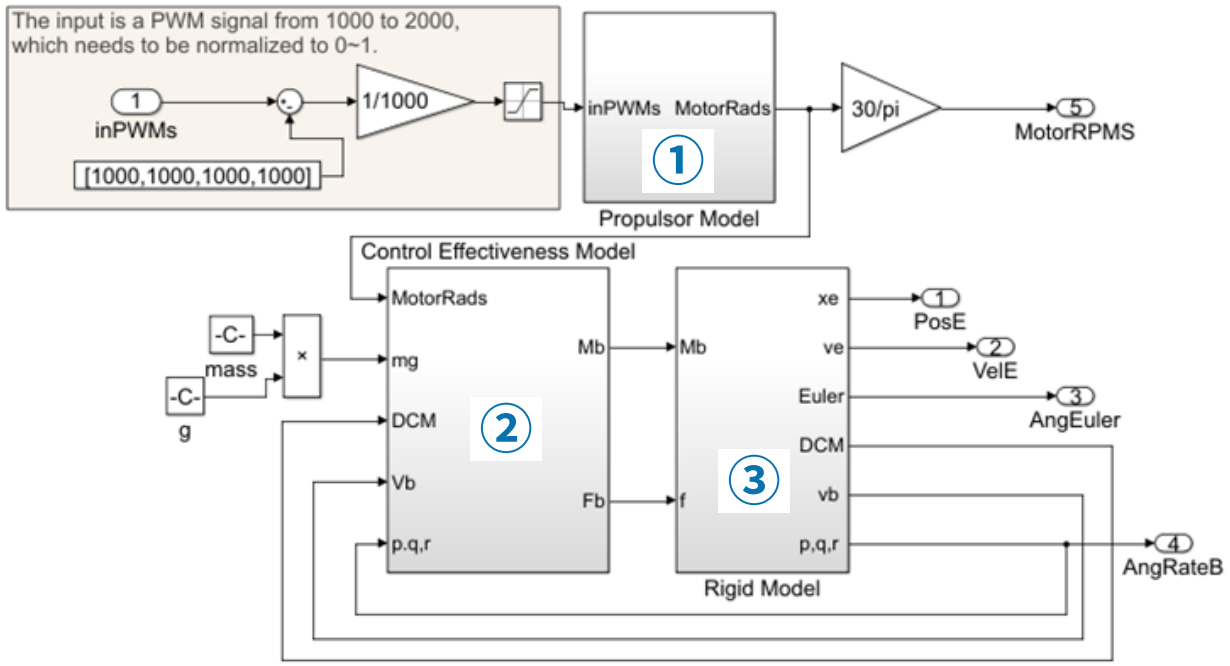
4.5.4 三维刚体与数值积分
教材对应：第4.1.4.1节、第4.1.4.4节

4.5.5 动力、环境与观测扩展
教材对应：第4.1.4.2节、第4.1.4.3节、第4.1.4.6节

4.5.6 真实模板对照与验收
教材对应：第4.2.3节、第4.2.4节

4.5.6 真实模板对照与验收：真实模型入口

真实例程把这些方程连接成动力学模型



图：e12 四旋翼动力学整体模型

- ① **动力单元：** PWM指令归一化后，产生各电机转速。
- ② **控制效率：** 由转速、质量与重力算出合力与合矩，力已含重力。
- ③ **刚体模块：** 积分得位置、速度与姿态；DCM（方向余弦矩阵）与本节**R**同表姿态。
- **口径：** 模型1.4 kg、积分机体速度；与本节2 kg算例参数独立。

执行器产生力和力矩，刚体模块积分得到位置与姿态。

4.5.6 真实模板对照与验收：文件与模块定位

例程文件与本节公式的对应关系

- **例程目录：**[安装目录]/RflySimAPIs/4.RflySimModel/2.AdvExps/e12_ModelTempId/3.ModelingTemp/code/。



图：文件到方程

- **运行：**MATLAB中先运行Init.m，再打开并运行dynamics.slx；ode4即四阶龙格—库塔，步长0.001 s（本节0.002 s），总力含重力。
- **现象与排查：**pwm输入为0时机体从100 m下落，阻力使向下加速度逐渐减小；编译报错先查mex编译器配置。

从已理解的状态与方程出发，才能读懂实际仿真模型。

4.5.6 真实模板对照与验收：子系统对应

把教学函数对应到真实模板的子系统

- **M0入口：** 1.BasicExps/e0_MinModelTemp中的Exp1_MinModelTemp.slx用于部署起点，内部为六自由度（6DOF）欧拉角模块；质量1.515 kg，按自身初始化脚本求悬停点。

- **D0入口：** 2.AdvExps/e12_ModelTempId/3.ModelingTemp/code/dynamics.slx便于逐式对照方程；需对应版本的进阶资源。

- **逐层查找：** 先找电机状态，再找推力与力矩合成，之后找刚体导数及积分；端口和单位按照实际连线核对。

- **比较条件：** 教学模型、M0和D0先分别自检。若比较曲线，必须统一参数、初态、输入、环境和模型时间。

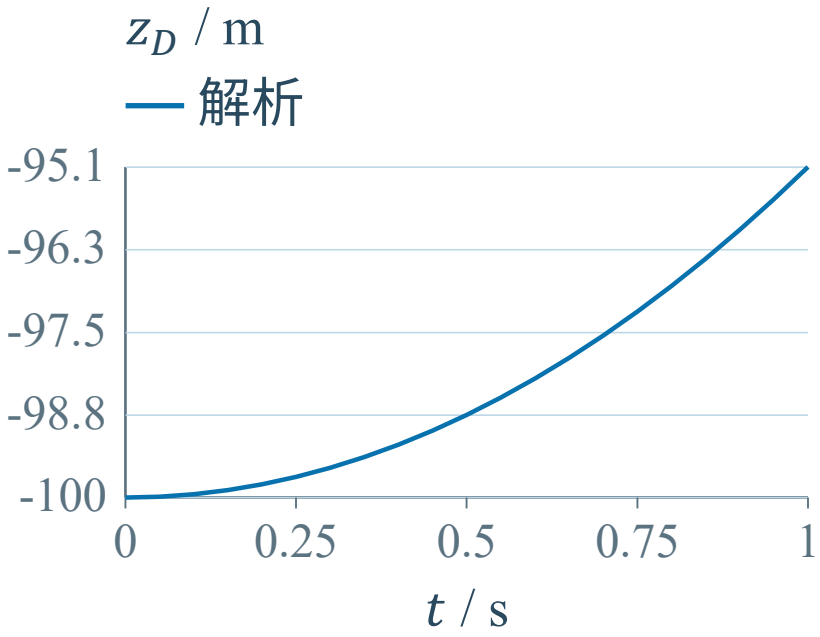
对应的是方程、信号和参数来源，模板与教学模型仍是不同对象。

4.5.6 真实模板对照与验收：自由落体预测

实验一：先预测无推力自由运动

- **理想条件：** $z_0 = -100\ \mathrm{m}$、$g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$，初速为零；无推力、无阻力、无接触。
- **手算结果：** 1 s时向下速度9.8 m/s，位移4.9 m，$z_D = -95.1\ \mathrm{m}$，NED向下为正，数值变大。
- **程序对照：** zero工况取$z_D = -10\ \mathrm{m}$、g=9.81 m/s²，1 s后$z_D = -5.095\ \mathrm{m}$、向下速度9.81 m/s；运行见课件4.11.2「零输入基准」页。

$$v_D = gt, \quad z_D = z_0 + 1/2\, gt^2$$



图：自由落体解析基准（教学计算）

在无接触、无阻力的理想条件下，向下速度随时间线性增加。

4.5.6 真实模板对照与验收：自由落体排查

自由落体偏离时先看受力

- **不下落：**先看是否已经触地、接触力是否抵消重力，以及位置或速度是否被测试连线固定。
- **速度趋稳：**查看阻力是否随速度增长；保留阻力的物理模型本来就不会永久保持重力加速度。
- **方向相反：**检查NED符号、坐标变换和重力是否重复加入；这类结构错误靠调整步长无法修正。
- **完整排查：**M0逐层定位见课件4.11.2「异常定位」页。

自由落体偏差先查接触、阻力与重力口径，再评估积分误差。

4.5.6 真实模板对照与验收：悬停手算

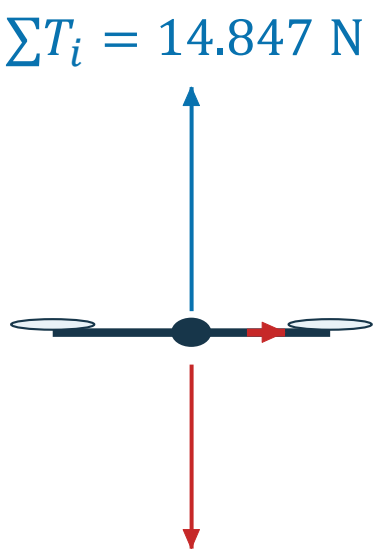
实验二：先手算M0的近似悬停点

- **手算近似：** 1.515 kg，本页取$g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$；总推力14.847 N，每桨3.71175 N。
- **反求：** 由$c_T = 1.681 \times 10^{-5}$求转速，再由课件4.3的M0映射$\omega = 842.1u + 22.83$求输入；程序取g=9.81，得470.14 rad/s、u≈0.53118。

$$\omega_h = \sqrt{3.71175/(1.681 \times 10^{-5})} = 469.90\ \mathrm{rad/s}$$

$$u_h = (469.90 - 22.83)/842.1 = 0.53090$$

- **起步：** 零转速启动有电机暂态，不会立即悬停；两种初态的对照见课件4.11.2「平衡与启动」页。



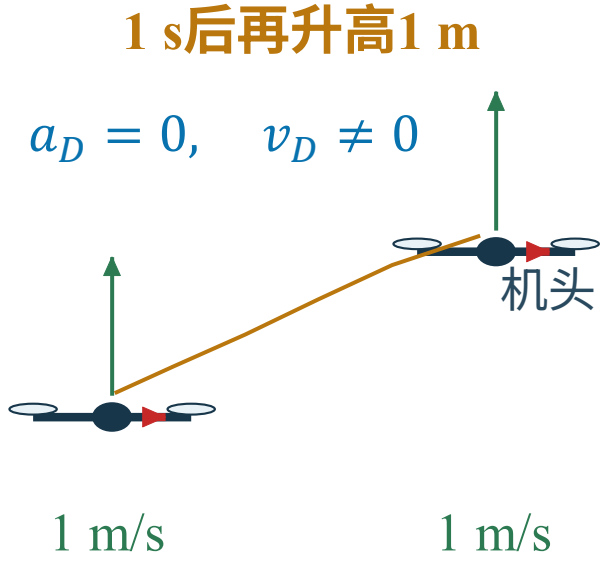
水平、四桨对称

静态悬停同时要求合力为零、力矩为零和初始速度为零。

4.5.6 真实模板对照与验收：对称输入

对称增加输入为何主要改变升降

- **对称增推：**水平对称四桨的力矩相互抵消；总推力大于重力时，向下加速度为负，飞机开始向上加速。
- **反例：**已向上1 m/s后将推力恢复为重力，合力为零，1 s后仍向上1 m/s，高度再增加1 m。
- **判别：**恢复平衡推力不会刹停；若速度立刻归零，检查控制器、状态复位或把目标值误当状态。



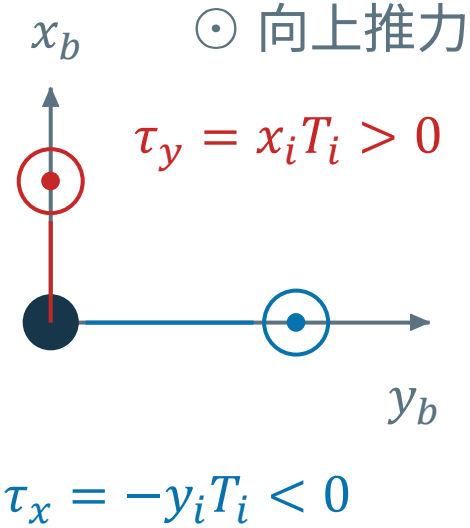
$$a_D = g - \frac{\sum_i T_i}{m}$$

水平对称条件下，合推力改变而各轴力矩相互抵消。

4.5.6 真实模板对照与验收：单电机方向

实验三：单电机增量先算方向

- 在FRD机体系中，旋翼位置为$(x_i, y_i, 0)$，向上推力为$(0,0,-T_i)$，力臂叉乘得到滚转与俯仰力矩。
- **符号判断：**右侧旋翼增推产生负滚转力矩，前侧旋翼增推产生正俯仰力矩；反扭矩还取决于旋向约定。
- **M0编号：**X型布局的位置与旋向见课件4.3的M0编号核对，与本节“+”构型编号不同。
- **程序对照：**motor1工况在平衡转速上给第一路输入加0.03，结果见课件4.11.2「单电机增量」页。

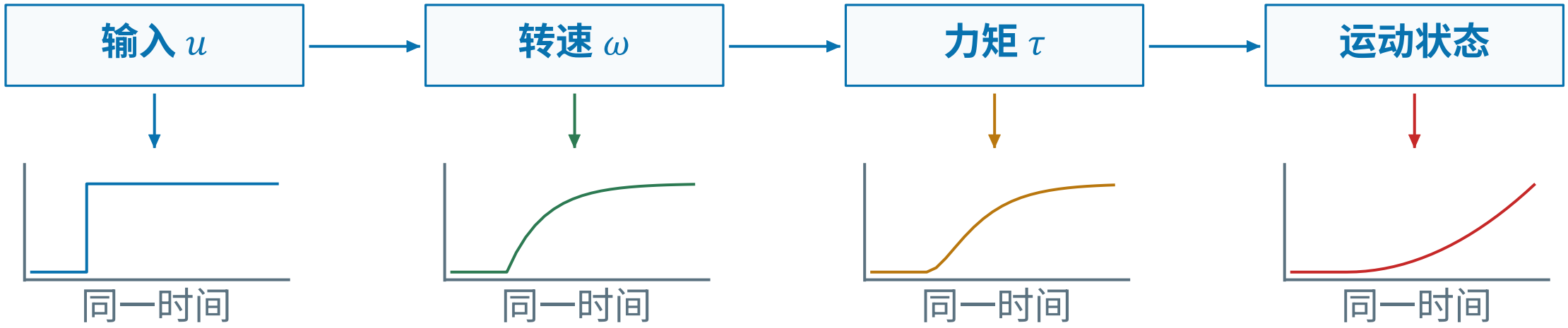


图：旋翼位置与力臂矩方向

力矩符号由电机位置与推力方向决定，不能只凭编号猜测。

4.5.6 真实模板对照与验收：输入与状态时间轴

把输入、部件和状态放在同一时间轴



图：沿信号逐层记录；波形仅为因果形状示意

- **排查顺序：**输入变而转速不变，查门限和接线；转速对而力矩错，查布局。
- **再往后：**力矩对而角速度错，查惯量与坐标；各层日志共用仿真时间。

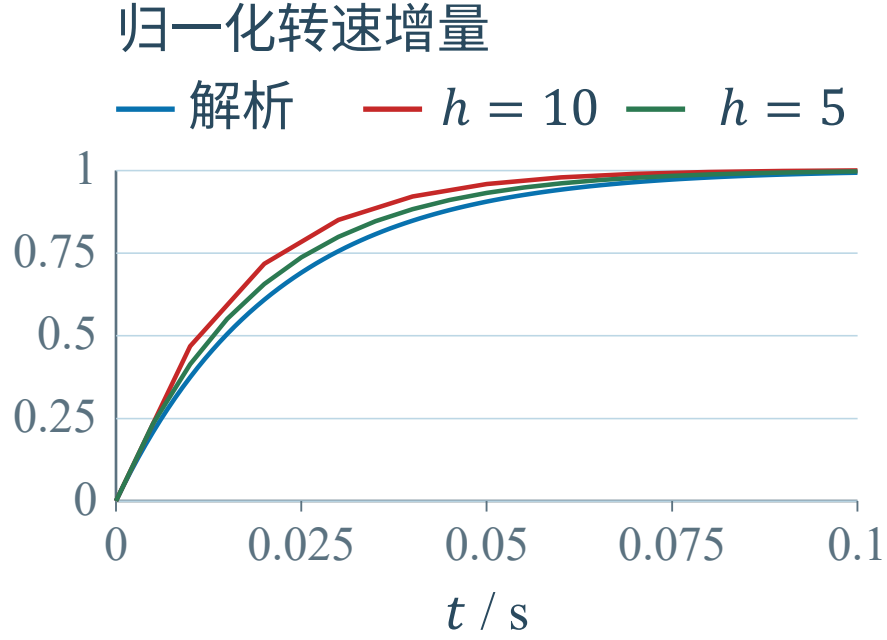
逐层找第一处偏差，比只看最终位置更容易定位原因。

4.5.6 真实模板对照与验收：一阶电机与步长

用一阶电机基准比较步长误差

- **M0电机：** $\tau_m = 0.0214\,\mathrm{s}$，$\eta = 1 - e^{-t/\tau_m}$（课件4.3），一个时间常数达63.2%。
- **同一欧拉方程：** 10 ms步长算1步为0.4673；5 ms步长算2步为0.4127，都对应10 ms。
- **误差：** 解析值0.3733；误差由0.0940降到0.0394，约减半，符合一阶收敛（课件4.2）。
- **M0对照：** 步长对比见课件4.11.2。

$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{h}{\tau_m}(1 - \eta_k)$$



图：步长单位ms，曲线为教学计算

先固定物理问题，再在相同仿真时刻比较数值结果。

4.5.6 真实模板对照与验收：综合模型边界

综合模型把载具运动与控制器合在一起

- **教材第4.2.4节：**综合模型是“载具模型+控制器”一体化实现。前面2 kg教学程序与M0/D0只负责运动求解，不能直接称为综合模型。
- **实现路线：**在Simulink运动模型内集成控制算法，生成的DLL既处理控制指令又计算运动；控制接口、状态定义和调度周期须一起核对。
- **使用边界：**软件／硬件在环（SITL/HITL）调用PX4闭环，贴近真实控制流程；综合模型可脱离PX4运行，适合加速与并行训练，不能代替飞控验证。
- **蓝图路线：**UE蓝图综合模型用UE物理引擎处理接触碰撞，并内置简化上层控制器，与DLL路线是两种不同实现。

运动模型求物理响应；综合模型还须实现控制闭环。

4.5.6 真实模板对照与验收：三层任务

用基础、改动与真实模型三层任务完成验收

- **基础完成：**运行四阶段，保存CSV、指标与曲线；用升降终点、单轴角速度和转角完成解析核验。
- **独立改动：**只改质量、惯量或电机时间常数中的一项，先写趋势预测再运行；如俯仰惯量加倍，单轴转角减半，副本中两处0.18同时改为0.09（符号不变）。
- **真实模型：**按课件4.11.2运行m0_offline_checks，用report.json中的参数完成自由落体、悬停与单电机方向三项预测和对照。
- **提交材料：**记录程序版本、参数、输入、初态、步长和输出路径；至少给出一项手算、一条状态曲线和一项误差。

代码、数值与物理解释相互一致，才构成一次可复查的建模实现。

课堂练习

换一组数据，先预测再运行

- **题1 改质量：**仍用4.5.2的推力时序（19.6、21.6、17.6、19.6 N），把质量改为2.4 kg。21.6 N段飞机会上升吗？3 s时高度约多少？
- **题2 改时长：**单轴阶段保持±0.10 N·m、俯仰惯量0.05 kg·m²，两段各持续0.4 s。最大角速度与最终俯仰角各是多少？
- **题3 改时间常数：**在modeling_stages副本中令drag_k、wind_NED为零，再把motor_tau由0.05 s改为0.1 s。转速何时完成63.2%？1.5 s时高度比理想刚体高还是低？
- **做法：**先写预测再运行，另存输出目录。题1用vertical_beginner的质量参数；题2在modeling_stages副本中把command_forces与events的0.3、0.6改为0.4、0.8，single_axis的解析值−0.18与误差式中的+0.18都按预测改（符号不变）。

先写预测再运行，程序结果才能检验物理判断。

参考要点

课堂练习的预测与判据

- **题1：**重力23.52 N，21.6 N段仍向下加速0.8 m/s²，全程下降；3 s时向下速度4.9 m/s，高度约−5.5 m（无触地模型）。
- **题2：**角加速度仍为±2 rad/s²，最大角速度−0.8 rad/s；转角与时长平方成正比，最终约−0.32 rad（约−18.3°），角速度归零。
- **题3：**转速0.1 s完成63.2%、0.3 s完成95.0%；上升推迟，1.5 s高度约1.41 m（理想刚体1.50 m，$\tau_m = 0.05$ s时约1.45 m），3 s时约1.99 m。

- **判据：**方向与量级先对，再比数值；结果与预测相反时，先查符号、单位和输入时序。题3数值为离线教学算例。

改变参数时，先判断它改变的是合力、作用时间还是响应快慢。

本节小结

逐步建模的方法、判据与易错点

- **四阶段方法：**升降 → 单轴俯仰 → 三维刚体 → 电机、风与理想观测；接口和13列状态顺序不变，每次只加一个物理过程。
- **核验判据：**升降看终点高度与零速度；单轴看角速度斜率M_y/J_y与转角；三维看回平后保留的北向速度；扩展看初始导数与曲线差异的来源。
- **易错点一：**NED中z_D向下为正，高度$H=-z_D$；推力不含重力，重力只在导数函数中加一次。
- **易错点二：**四元数初值须为[1,0,0,0]，全零四元数非法；RK4的一步试算不能跨越推力切换时刻。
- **易错点三：**目标推力、目标转速是输入，不是状态；归一化转速只比较响应形状，推力模型要用真实转速（rad/s）。