



4.4 配平、线性化与动态系统基础



本章目录

配平、线性化与动态系统基础

第四章 载具运动建模与仿真

- 4.1 运动建模基础与运动学
- 4.2 刚体动力学与运动求解
- 4.3 动力单元、受力与观测建模
- 4.4 配平、线性化与动态系统基础**
- 4.5 多旋翼模型逐步编程与仿真
- 4.6 参数测量与静态模型辨识
- 4.7 动态系统辨识、验证与模型修正
- 4.8 典型无人载具建模与扩展
- 4.9 建模工具、代码生成与模型部署
- 4.10 API与SDK建模接口
- 4.11 例程体系与综合实践
- 4.12 习题案例分析与课程设计

本节 5 个教学单元

4.4.1 工作点与配平

教材对应：第4.1.4.5节

4.4.2 局部线性化与状态

教材对应：第4.1.4.5节

4.4.3 状态空间与传递函数

教材对应：第4.1.4.3、4.1.4.5节

4.4.4 阶跃和频率响应

用时间常数、幅值比和相位读响应

4.4.5 采样、保持与离散化

教材对应：第4.1.4.5节



4.4.1 工作点与配平：先分清输入与环境作用

控制输入如何与环境力区分

- 分类依据：能由控制器主动调节的是控制作用；重力、风与地面约束通常作为环境作用。分类看执行机制和建模边界，不只看力的名称。
- 理想四旋翼：将总推力和三轴力矩视为独立虚拟控制量， $u = [f, \tau_x, \tau_y, \tau_z]^T$ ；再由分配器求四桨指令。
- 平面无人车：若只建纵向驱动力和偏航力矩， $u = [f, \tau_z]^T$ ；侧向轮地力由约束和轮胎状态决定。
- 边界：轮地摩擦既可表现为驱动作用也可表现为阻力；固定翼舵面由控制器操纵，但实际气动力还依赖空速和迎角。建模时逐项声明。

先定义可控输入和环境作用，再写工作点的受力平衡。

4.4.1 工作点与配平：悬停力与力矩平衡

悬停工作点首先是一组力和力矩平衡条件

- 非线性模型写成 $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ ；悬停工作点 $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$ 使状态导数为零，位置和偏航可按任务指定。
- 水平四桨相同且无其他外力时，总推力等于重力，机体合力矩 $\mathbf{M}_{b0}$ 为零；四个控制量由分配器映射为四桨输入。
- 电机持续转动，物理输入不为零；线性化后输入扰动为零才表示维持工作点。

$$\mathbf{x}_0 = [x_0, y_0, z_0, 0, 0, 0, 0, \psi_0, 0, 0, 0]^T, \quad \mathbf{u}_0 = [mg, 0, 0, 0]^T$$

$$f(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) = \mathbf{0}, \quad \sum_i T_{i0} = mg, \quad \mathbf{M}_{b0} = \mathbf{0}$$

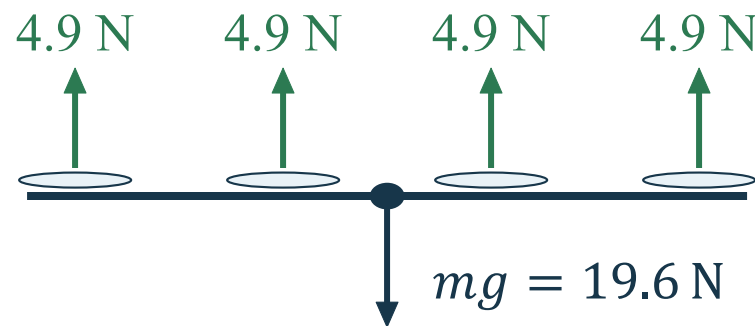
悬停对应非零推力输入，平衡的是合力与合力矩。

4.4.1 工作点与配平：先算每桨推力再算转速

用已声明参数算一个悬停转速

- 教学参数取 $m = 2 \text{ kg}$ 、 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ 、四桨相同， $c_T = 2.0 \times 10^{-5} \text{ N/(rad/s)}^2$ 。
- 每桨需要 $T_0 = mg/4 = 4.9 \text{ N}$ ，由 $T_0 = c_T \omega_0^2$ 得 $\omega_0 \approx 494.975 \text{ rad/s}$ 。
- 本节沿用名义值；换入课件4.6将给出的回填值 $c_T \approx 2.657 \times 10^{-5}$ ，得 $\omega_0 \approx 429.4 \text{ rad/s}$ 。

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mg}{4c_T}} = \sqrt{245000} \approx 494.975 \text{ rad/s}$$



图：四桨等推力，合力平衡、合力矩为零

先计算工作点，再围绕工作点讨论小变化。

4.4.1 工作点与配平：从悬停扩展到稳定运动

配平先求物理条件，再检查全部状态导数

- **代回检查：** $4c_T\omega_0^2 = 19.6 \text{ N} = mg$ ，竖直加速度为零；四桨同速，三轴力矩与角加速度为零；电机保持 ω_0 ，执行器处于稳态。
- **算法顺序：** 先给定质量、姿态与环境，再求推力和各桨输入；把得到的状态、输入代回非线性方程，逐项检查速度与角速度是否继续变化。
- **匀速区别：** 稳定水平飞行的位置仍随时间变化，不能要求包含位置的全部状态导数为零。需在相应运动状态或移动参考下建立配平条件。
- **用途：** 配平点给线性化一个明确起点。任意填入的初始姿态与油门可能立刻引起加速，因此初始化成功不代表已经配平。

配平由指定运动状态下的平衡条件定义，不是任意一组初始化数值。



4.4 配平、线性化与动态系统基础



本章目录

配平、线性化与动态系统基础

第四章 载具运动建模与仿真

- 4.1 运动建模基础与运动学
- 4.2 刚体动力学与运动求解
- 4.3 动力单元、受力与观测建模
- 4.4 配平、线性化与动态系统基础**
- 4.5 多旋翼模型逐步编程与仿真
- 4.6 参数测量与静态模型辨识
- 4.7 动态系统辨识、验证与模型修正
- 4.8 典型无人载具建模与扩展
- 4.9 建模工具、代码生成与模型部署
- 4.10 API与SDK建模接口
- 4.11 例程体系与综合实践
- 4.12 习题案例分析与课程设计

本节 5 个教学单元

4.4.1 工作点与配平

教材对应：第4.1.4.5节

4.4.2 局部线性化与状态

教材对应：第4.1.4.5节

4.4.3 状态空间与传递函数

教材对应：第4.1.4.3、4.1.4.5节

4.4.4 阶跃和频率响应

用时间常数、幅值比和相位读响应

4.4.5 采样、保持与离散化

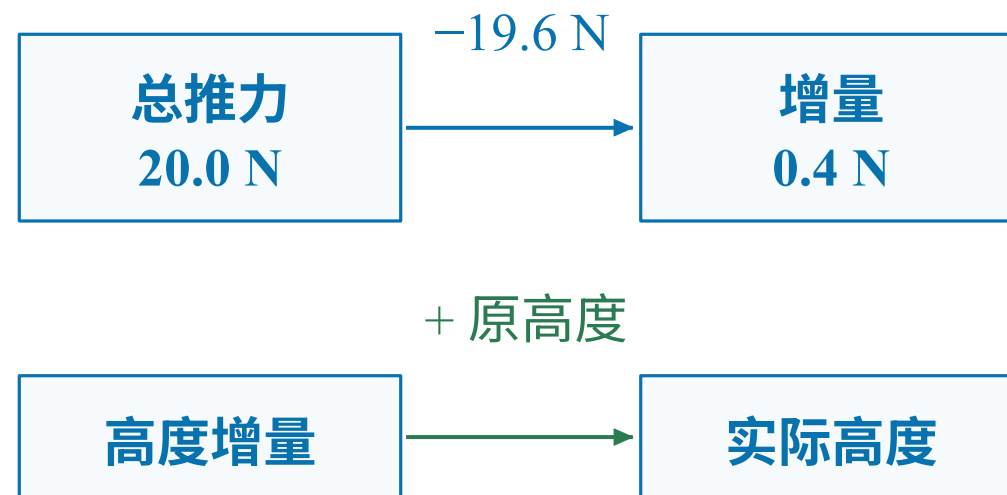
教材对应：第4.1.4.5节



4.4.2 局部线性化与状态：把总量与增量分开

扰动变量把“现在多少”改成“离基准多少”

- 定义 $\delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ 、 $\delta \mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0$ （教材记作 $\tilde{\mathbf{x}}$ 、 $\tilde{\mathbf{u}}$ ）。总推力19.6 N时，加0.4 N后的绝对输入是20.0 N。
- 线性模型算的是偏离工作点的变化；输出高度增量后须加回原高度。把增量直接送绝对接口，会改变输入物理含义。



图：进入局部模型先减基准，输出再加基准

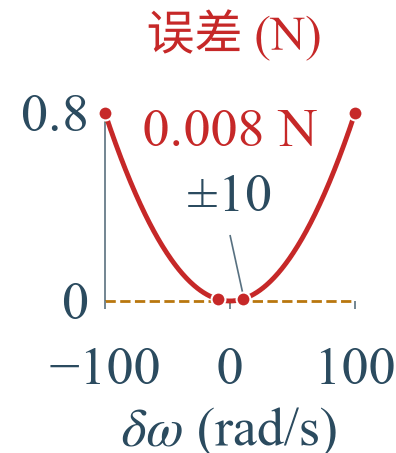
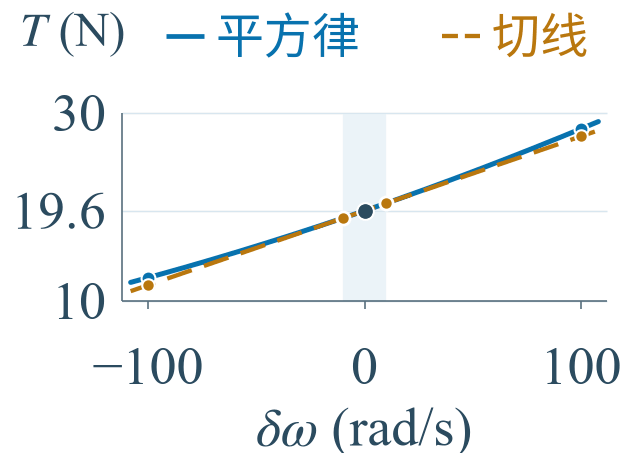
扰动量围绕工作点定义，使用前后都要处理基准值。

4.4 配平、线性化与动态系统基础

4.4.2 局部线性化与状态：导数为何给出局部变化率

一阶线性化保留局部斜率而舍去高阶变化

- 在工作点展开 $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ ，仅保留一次小变化，得到 $\delta\dot{\mathbf{x}} = A\delta\mathbf{x} + B\delta\mathbf{u}$ 。
- A 为状态变化对导数的斜率， B 为输入变化对导数的斜率。图用推力与转速的关系演示局部近似，切点始终不变。



图：固定切点，小扰动接近、大扰动偏离

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)}, \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)}$$

线性模型的系数是工作点附近的敏感程度。

4.4.2 局部线性化与状态：从平方关系得到线性斜率

把总推力展开到工作点附近

- **对象：**教学四旋翼 $m = 2 \text{ kg}$ ，每桨 $T_i = c_T \omega^2$ ， $c_T = 2 \times 10^{-5} \text{ N/(rad/s)}^2$ ，四桨同速。
- **展开：**总推力 $T = 4c_T \omega^2$ 。将 $\omega = \omega_0 + \delta\omega$ 代入，常数项是悬停推力，一次项描述邻近斜率，平方小量是近似误差。
- **含义：** $\omega_0 \approx 494.975 \text{ rad/s}$ 时，转速增加 1 rad/s 使总推力一阶近似增加 0.079196 N ；这条斜率只属于该工作点。

$$\delta T = 8c_T \omega_0 \delta\omega + 4c_T (\delta\omega)^2$$

$$\delta T \approx 0.079196 \delta\omega$$

线性化保留工作点附近的一次变化，原非线性关系仍决定近似范围。

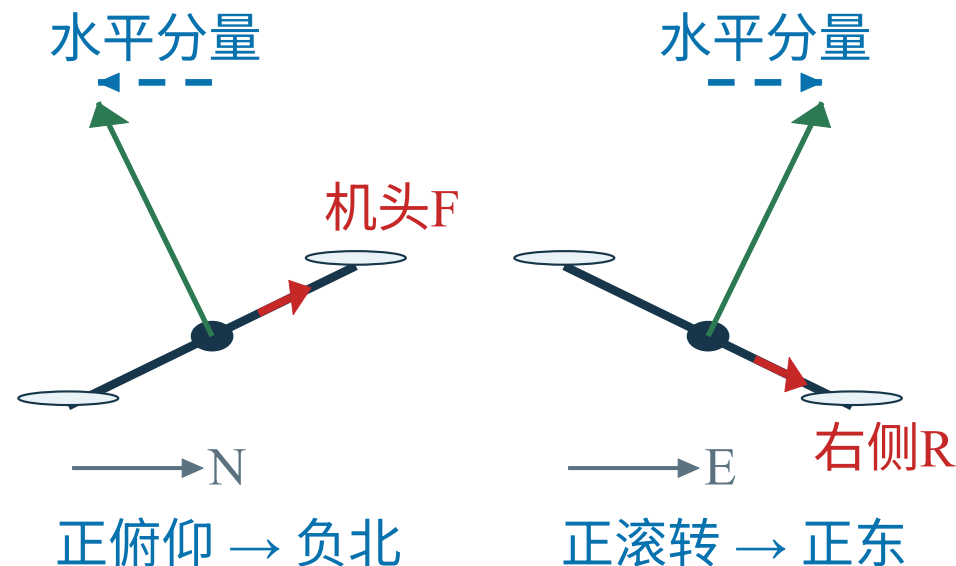
4.4 配平、线性化与动态系统基础

4.4.2 局部线性化与状态：悬停附近的水平和竖直耦合

悬停小角度模型怎样解释横向加速度

- 地面NED、机体FRD；水平悬停且偏航为零时，旋转矩阵把向上推力转到地面，小角变化得到下式。
- 正俯仰向负北，正滚转向正东；推力增加使下向加速度减少。角度用弧度， 1° 应代0.01745。

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{v}_N \\ \delta \dot{v}_E \\ \delta \dot{v}_D \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -g\delta\theta \\ g\delta\phi \\ -\delta T/m \end{bmatrix}$$



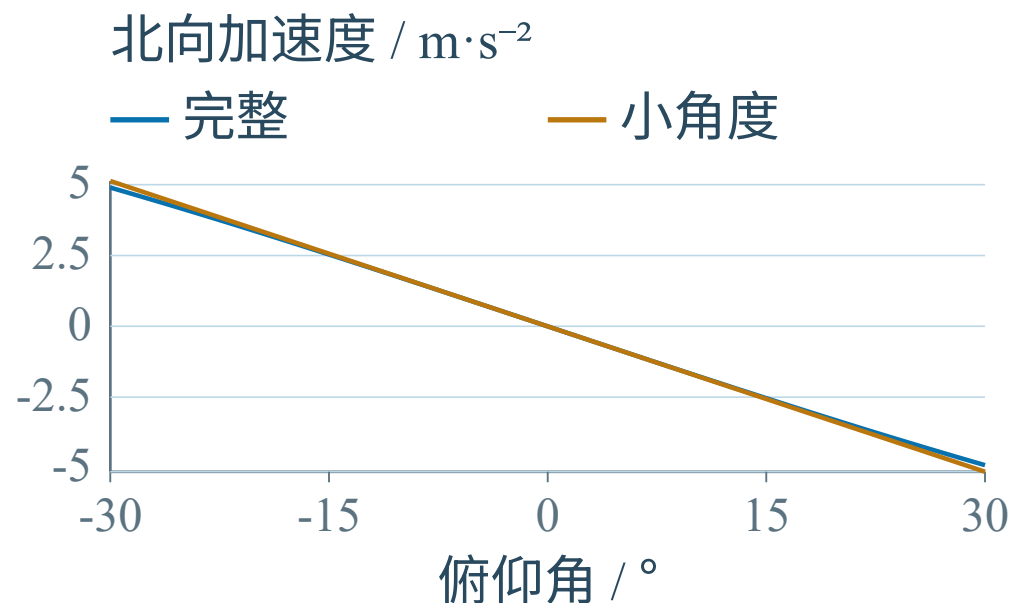
图：推力分解（倾角放大示意）

悬停附近的倾角把重力大小的推力转成横向加速度。

4.4.2 局部线性化与状态：小角度误差如何随角度增大

把倾角从5度增加到30度，近似误差怎样变化

- 总推力保持 mg 、只俯仰时，北向加速度为 $-g\sin\theta$ ，线性近似为 $-g\theta$ 。5°时分别为 -0.854 与 -0.855 m/s^2 。
- 30°时变为 -4.900 与 -5.131 m/s^2 。这里差异来自舍去三角函数高阶项，缩小积分步长不能消除这种模型误差。



图：角度轴用度显示，计算用弧度

局部线性化是否够用，要由扰动范围与用途判断。

4.4 配平、线性化与动态系统基础

4.4.2 局部线性化与状态：存储变量数与独立扰动数

全局四元数与局部十二维状态怎样分工

- 非线性仿真保存四元数4个分量，单位范数约束使姿态只有3个自由度；常质量刚体共存13个数，只有12个独立状态。

- 悬停远离欧拉角奇异点（俯仰 $\pm 90^\circ$ ），局部模型用位置、速度、小角度、角速度各3维增量；四元数的约束方向不是独立姿态。

$$\mathbf{x} = [x, y, z, v_x, v_y, v_z, \phi, \theta, \psi, p, q, r]^T$$

	分量数	独立数
位置	3	3
速度	3	3
四元数	4	3
角速度	3	3

合计：13个数 → 12个独立状态

图：存储分量与独立自由度不同

全局姿态保存约束，局部模型只使用独立的小扰动。



4.4 配平、线性化与动态系统基础



本章目录

配平、线性化与动态系统基础

第四章 载具运动建模与仿真

- 4.1 运动建模基础与运动学
- 4.2 刚体动力学与运动求解
- 4.3 动力单元、受力与观测建模
- 4.4 配平、线性化与动态系统基础**
- 4.5 多旋翼模型逐步编程与仿真
- 4.6 参数测量与静态模型辨识
- 4.7 动态系统辨识、验证与模型修正
- 4.8 典型无人载具建模与扩展
- 4.9 建模工具、代码生成与模型部署
- 4.10 API与SDK建模接口
- 4.11 例程体系与综合实践
- 4.12 习题案例分析与课程设计

本节 5 个教学单元

4.4.1 工作点与配平

教材对应：第4.1.4.5节

4.4.2 局部线性化与状态

教材对应：第4.1.4.5节

4.4.3 状态空间与传递函数

教材对应：第4.1.4.3、4.1.4.5节

4.4.4 阶跃和频率响应

用时间常数、幅值比和相位读响应

4.4.5 采样、保持与离散化

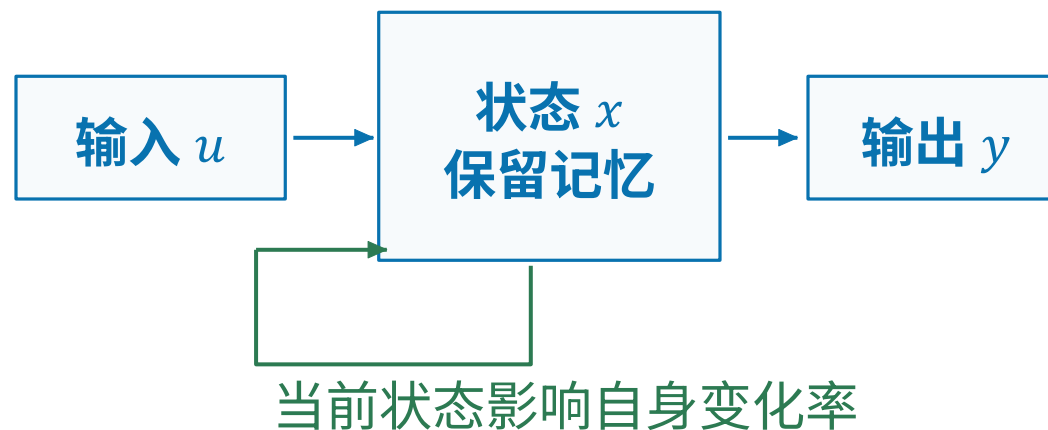
教材对应：第4.1.4.5节



4.4.3 状态空间与传递函数：一阶电机的状态空间

状态空间把内部记忆与可观察输出分开

- 一阶电机以当前转速 $x = \omega$ 作状态， $\dot{x} = -x/\tau + (K/\tau)u$ ；相同指令在不同初态下会有不同瞬态。
- 若直接测转速， $y = x$ 。一般模型用 C 将状态映射成输出， D 表示输入的直接作用；测量通道数不等于状态数。



图：状态保存内部记忆

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

状态保存动态记忆，输出是由状态和输入形成的观察量。

4.4.3 状态空间与传递函数：从组件模型到状态矩阵

电机与竖直运动串联后，怎样组成两个状态

- **选择状态：**取 $\delta x = [\delta v_D, \delta \omega]^T$ ； v_D 是NED向下速度， ω 为四桨共同转速。输入 δu 是共同归一化指令增量。
- **连接关系：**推力增加使向下加速度减小，故 $\delta \dot{v}_D = -0.039598 \delta \omega$ 。教学电机 $\tau = 0.05 \text{ s}$ ，每单位指令的稳态转速增益 $K_u = 1000 \text{ rad/s}$ 。
- **读矩阵：**第一行表示转速怎样影响平移，第二行表示电机自身衰减，其中 $1/\tau = 20$ 、 $K_u/\tau = 20000$ ；输入先作用于电机，再经推力改变速度。

$$\delta \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -0.039598 \\ 0 & -20 \end{bmatrix} \delta x + \begin{bmatrix} 0 \\ 20000 \end{bmatrix} \delta u$$

状态矩阵把各条物理因果关系放到对应的行和列。

4.4.3 状态空间与传递函数：传递函数与零初始条件

零初态下，输出与输入的拉氏变换之比是传递函数

1 微分方程

- 一阶环节 $\tau \dot{y} + y = Ku$ 中， u 为输入， y 为输出， K 决定稳态增益， τ 决定响应快慢。

2 拉氏变换

- 拉普拉斯变换将输入、输出记为 $U(s), Y(s)$ ， s 是变换变量。微分项变成 $sY(s) - y(0)$ ，所以非零初态不能直接丢掉。

$$\tau[sY(s) - y(0)] + Y(s) = KU(s)$$

初始扰动为零时，初态项才消去

3 输入输出比

$$G(s) = Y(s)/U(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \quad (y(0) = 0)$$

$G(s)$ 是变换后的比值，不是逐时刻的 $y(t)/u(t)$ 。

4.4 配平、线性化与动态系统基础

4.4.3 状态空间与传递函数：从状态方程读出输入输出

同一竖直模型也能写成串联传递函数

- **边界：**只考察输入 δu 到输出 δv_D ，并取零初始扰动。电机先产生转速增量，推力再改变加速度，积分后得到速度。
- **串联：** $\delta\omega(s) = 1000 \delta U(s)/(0.05s + 1)$ ， $\delta V_D(s) = -0.039598 \delta\omega(s)/s$ ，两式相乘得下式；负号只表示NED向下为正。
- **输入检查：**持续正的输入增量使推力高于重力，理想零阻力模型便持续加速。电机达到稳态，不表示速度也一定达到有限稳态。

$$\frac{\delta V_D(s)}{\delta U(s)} = -\frac{39.598}{s(0.05s + 1)}$$

传递函数的每个因子都应能返回动力链中的一个物理环节。



4.4 配平、线性化与动态系统基础



本章目录

配平、线性化与动态系统基础

第四章 载具运动建模与仿真

- 4.1 运动建模基础与运动学
- 4.2 刚体动力学与运动求解
- 4.3 动力单元、受力与观测建模
- 4.4 配平、线性化与动态系统基础**
- 4.5 多旋翼模型逐步编程与仿真
- 4.6 参数测量与静态模型辨识
- 4.7 动态系统辨识、验证与模型修正
- 4.8 典型无人载具建模与扩展
- 4.9 建模工具、代码生成与模型部署
- 4.10 API与SDK建模接口
- 4.11 例程体系与综合实践
- 4.12 习题案例分析与课程设计

本节 5 个教学单元

4.4.1 工作点与配平

教材对应：第4.1.4.5节

4.4.2 局部线性化与状态

教材对应：第4.1.4.5节

4.4.3 状态空间与传递函数

教材对应：第4.1.4.3、4.1.4.5节

4.4.4 阶跃和频率响应

用时间常数、幅值比和相位读响应

4.4.5 采样、保持与离散化

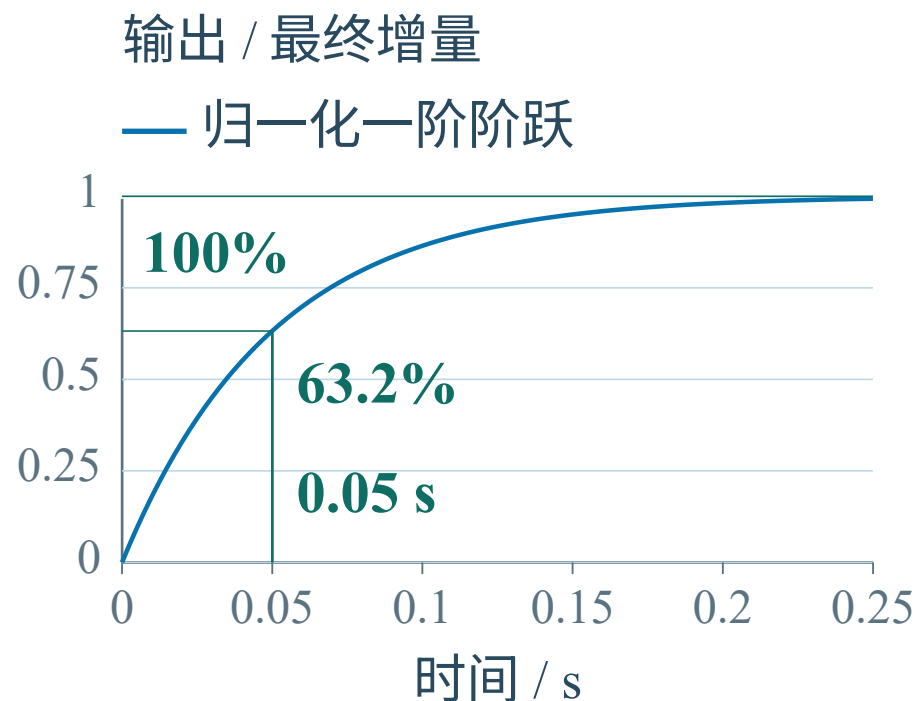
教材对应：第4.1.4.5节



4.4.4 阶跃和频率响应：一阶阶跃的增益与时间常数

时间常数对应阶跃响应的63.2%位置

- 零初值下施加单位阶跃，响应为 $y(t) = K(1 - e^{-t/\tau})$ ；增益决定最终增量。当 $t = \tau$ 时，输出达到最终增量的63.2%。
- 教学模型 $\tau=0.05$ s时，0.05 s达到63.2%，0.15 s达到95.0%，0.25 s达到99.3%；这些比例属于无时延的一阶结构。
- 真实曲线若先停顿后上升，停顿可能来自时延；若明显振荡或超调，需要比一阶无零点模型更丰富的结构。



图： $\tau=0.05$ s的教学阶跃响应

4.4 配平、线性化与动态系统基础

4.4.4 阶跃和频率响应：正弦输入怎样读取幅值与相位

正弦输入用幅值比和相位描述稳态响应

- 令输入为 $A\sin(\Omega t)$ ，稳定线性系统经过暂态后输出同频正弦；幅值比为 $|G(j\Omega)|$ ，相位差为 $\angle G(j\Omega)$ 。
- 在传递函数中令 $s = j\Omega$ 即可取指定频率响应，其中 $j^2 = -1$ ；负相位表示输出落后，不能一律等同固定时延。
- 下式用于 $K > 0$ 、 $\tau > 0$ 的无时延一阶环节；比较实测幅相时，应固定工作点、输入幅值并去除暂态。

$$|G(j\Omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + (\Omega\tau)^2}}, \quad \angle G(j\Omega) = -\arctan(\Omega\tau)$$

频率响应说明每个频率怎样被衰减和延迟。

4.4.4 阶跃和频率响应：频率单位与相位时间差

Hz、弧度每秒与相位时间差怎样换算

- 频率 f 的单位Hz表示每秒周期数，角频率 $\Omega = 2\pi f$ 表示每秒相位弧度；代入 $G(j\Omega)$ 前必须完成转换。
- 例：2 Hz信号周期0.5 s，输出波峰晚0.05 s，即落后1/10周期，相位 -36° 。
- 这个波峰差只能在对应频率及同一周期配对后解释；把周期错配或把度直接代入弧度公式，会得到错误时延。

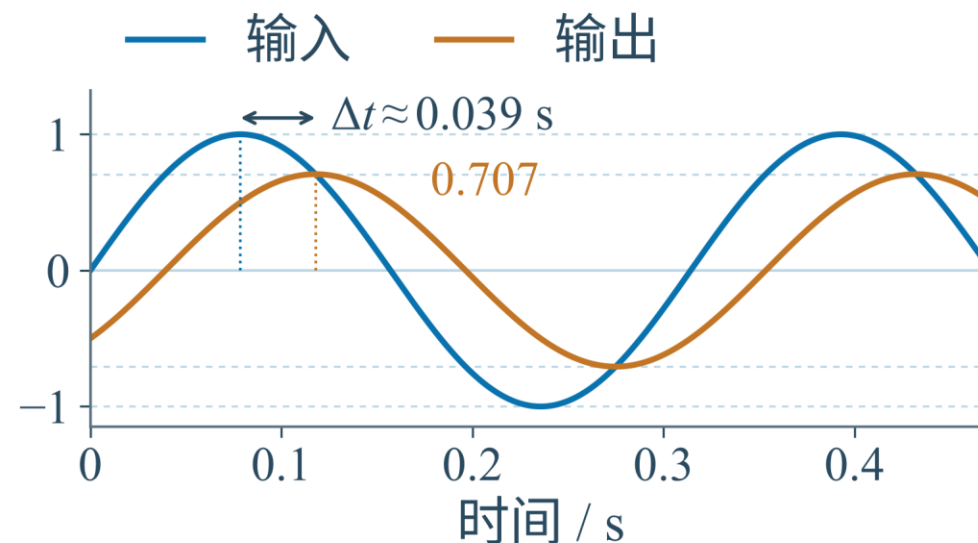
$$\Omega = 2\pi f, \quad \varphi = -360^\circ f \Delta t$$

频率单位若换错，相位差对应的时间延迟也会错。

4.4.4 阶跃和频率响应：正弦输入输出对照

转折频率处，输出幅值降到0.707并落后八分之一周期

- **算例：** $K = 1$ 、 $\tau = 0.05 \text{ s}$ ，输入3.183 Hz，即 $\Omega = 20 \text{ rad/s}$ 、 $\Omega\tau = 1$ 。
- **幅值比：** 暂态过后输出幅值0.707，与 $1/\sqrt{2}$ 一致。
- **相位：** 输出波峰晚约0.039 s，是周期0.314 s的八分之一，相位 $-360^\circ/8 = -45^\circ$ 。



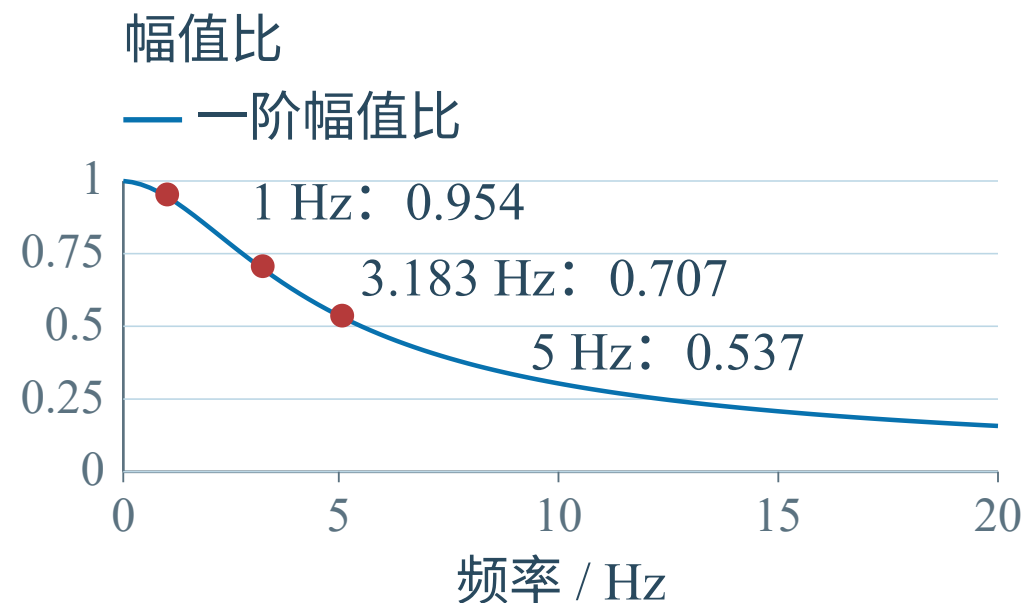
图：3.183 Hz稳态输入输出
(教学算例，非平台实测)

同一个时间常数同时决定幅值衰减和相位滞后。

4.4.4 阶跃和频率响应：一阶系统的幅频和相频

同一个时间常数怎样限制可跟随的频率

- 取 $K = 1, \tau = 0.05 \text{ s}$ ，1 Hz幅值比0.954、相位 -17.44° ；5 Hz幅值比0.537、相位 -57.52° ，快变化更难跟随。
- 当 $\Omega\tau = 1$ ，幅值比 $1/\sqrt{2}$ 、相位 -45° ，本例为3.183 Hz。若改画分贝，应使用 $20\log_{10}|G|$ 并注明尺度。



图：无时延一阶幅值比，不是分贝

频率升高后，有限响应时间使输出幅值下降并增加滞后。



4.4 配平、线性化与动态系统基础



本章目录

配平、线性化与动态系统基础

第四章 载具运动建模与仿真

- 4.1 运动建模基础与运动学
- 4.2 刚体动力学与运动求解
- 4.3 动力单元、受力与观测建模
- 4.4 配平、线性化与动态系统基础**
- 4.5 多旋翼模型逐步编程与仿真
- 4.6 参数测量与静态模型辨识
- 4.7 动态系统辨识、验证与模型修正
- 4.8 典型无人载具建模与扩展
- 4.9 建模工具、代码生成与模型部署
- 4.10 API与SDK建模接口
- 4.11 例程体系与综合实践
- 4.12 习题案例分析与课程设计

本节 5 个教学单元

4.4.1 工作点与配平

教材对应：第4.1.4.5节

4.4.2 局部线性化与状态

教材对应：第4.1.4.5节

4.4.3 状态空间与传递函数

教材对应：第4.1.4.3、4.1.4.5节

4.4.4 阶跃和频率响应

用时间常数、幅值比和相位读响应

4.4.5 采样、保持与离散化

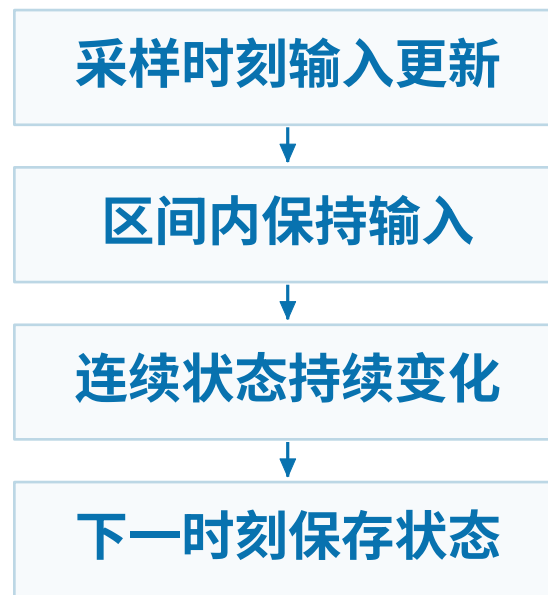
教材对应：第4.1.4.5节



4.4.5 采样、保持与离散化：采样与零阶保持

采样描述何时记录，保持描述两次更新之间输入怎样作用

- 采样周期 T_s 是记录或更新相邻时刻的间隔；零阶保持（ZOH）指两次更新之间输入维持上次给定值，并非输入在中间不存在。
- 输入保持为常值后，可对连续方程在一个采样区间内积分，得到从当前状态到下一状态的离散关系。
- 采样率 $f_s = 1/T_s$ ，与仿真求解器的内部积分步长不同；一个输入保持周期内，求解器仍可执行多个小步。



图：零阶保持下的一次离散更新

采样周期与输入保持共同定义离散模型的物理含义。

4.4.5 采样、保持与离散化：一阶模型的精确离散化

在一个输入保持区间内直接解微分方程

- **保持条件：** t_k 至 $t_k + T_s$ 间输入保持为 u_k ，方程 $\tau \dot{y} + y = Ku_k$ 的平衡输出为 Ku_k 。

区间内：误差连续衰减

- **求解思路：** 令误差 $\varepsilon = y - Ku_k$ ，区间内满足 $\tau \dot{\varepsilon} + \varepsilon = 0$ ，误差按指数衰减；下一状态等于目标值加剩余误差。

区间末：目标值加剩余误差

$$y(t_k + T_s) = Ku_k + (y_k - Ku_k)e^{-T_s/\tau}$$

- $\tau = 0.05 \text{ s}$ 、 $T_s = 0.01 \text{ s}$ 时，
 $a = 0.81873075$ ， $1 - a = 0.18126925$ 。

旧状态权重 81.87% 目标权重 18.13%

- **含义：** $a = e^{-T_s/\tau}$ 给出上一时刻误差留下的比例， $1 - a$ 给出向本次目标前进的比例。这是区间积分，不是数值Euler近似。

4.4 配平、线性化与动态系统基础

4.4.5 采样、保持与离散化：逐步迭代与连续解对照

逐步迭代：零阶保持更新在采样点与连续解吻合

- **算例：** $K = 1$ 、 $u_k = 1$ 、 $y_0 = 0$ ， $T_s = 0.01 \text{ s}$ 。零阶保持 $y_{k+1} = 0.8187y_k + 0.1813$ ，欧拉 $y_{k+1} = 0.8y_k + 0.2$ ，每步代入上一步结果。

k	零阶保持	前向欧拉	连续解 $1 - e^{-kT_s/\tau}$
1	0.1813	0.2000	0.1813
2	0.3297	0.3600	0.3297
3	0.4512	0.4880	0.4512

- **核对：** 零阶保持三步与连续解逐位相同（阶跃输入在区间内确实保持）；欧拉每步多走一点，前几步领先连续解。
- 旧状态权重与稳态目标权重之和为1；若输入一直不变，离散模型最终仍趋近 Ku ，与连续模型的稳态一致。

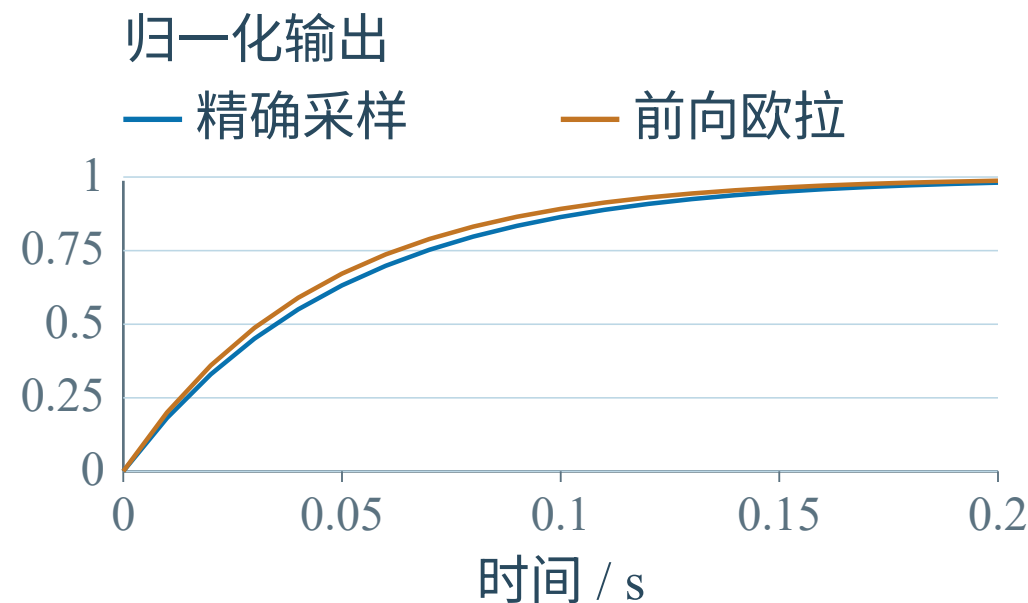
4.4.5 采样、保持与离散化：前向欧拉离散化与稳定性

前向欧拉近似何时与精确离散明显不同

- 欧拉系数 $a_E = 1 - T_s/\tau$ 。 $T_s = 0.01$ s 时 $a_E = 0.8$ ，精确系数 0.81873，两条曲线几乎重合。
- 步长越大差别越明显： $T_s = \tau$ 时 $a_E = 0$ ，精确系数 $e^{-1} \approx 0.368$ ； $T_s > 2\tau$ 时 $|a_E| > 1$ ，欧拉更新发散。

$$y_{k+1} = (1 - T_s/\tau)y_k + (T_s/\tau)Ku_k$$

$$|1 - T_s/\tau| < 1 \Leftrightarrow 0 < T_s < 2\tau$$



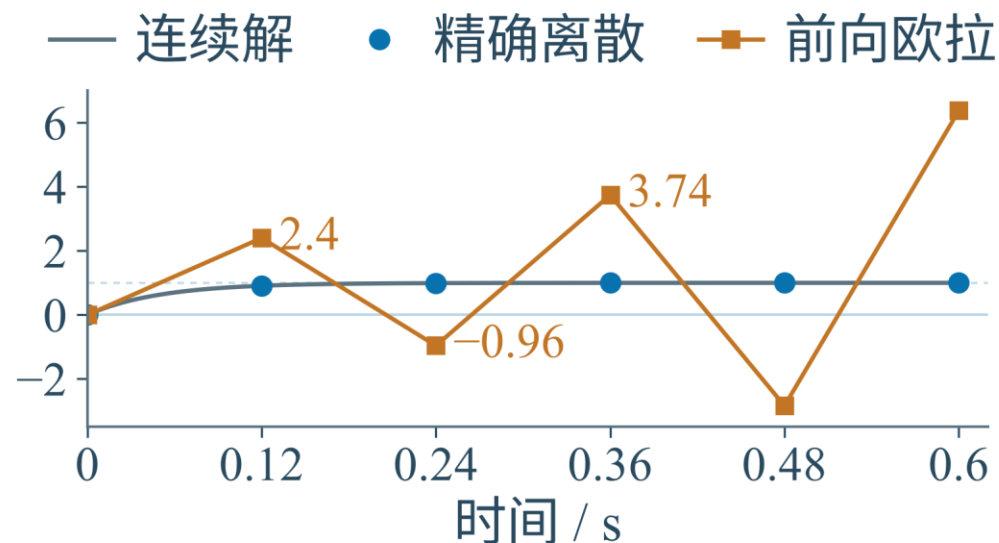
图：同一阶跃下的两种更新

离散近似误差取决于采样间隔相对动态时间尺度的大小。

4.4.5 采样、保持与离散化：步长越过稳定界

步长超过 2τ 时，欧拉更新交替发散而精确离散收敛

- **算例：** $\tau = 0.05 \text{ s}$ 、 $T_s = 0.12 \text{ s}$ 、 $u = 1$ 、 $y_0 = 0$ 。欧拉 $y_{k+1} = -1.4y_k + 2.4$ ，依次得2.4、-0.96、3.74、-2.84……
- **精确离散：** $y_{k+1} = 0.0907y_k + 0.9093$ ，依次得0.909、0.992、0.999，单调趋近1。
- **结论：** 误差每步乘以-1.4，正负交替且放大；连续对象本身稳定，发散来自离散方法与步长。



图： $T_s = 0.12 \text{ s}$ 的单位阶跃
(教学算例，非平台实测)

连续模型稳定，不代表任意步长的数值更新都稳定。

4.4 配平、线性化与动态系统基础

4.4.5 采样、保持与离散化：状态空间的精确离散化

一般状态空间怎样从连续时间变成离散时间

- 常系数线性模型在零阶保持下满足 $\mathbf{x}_{k+1} = A_d \mathbf{x}_k + B_d \mathbf{u}_k$ 。矩阵指数把内部动态推进一个采样周期，区间积分累加输入作用。

$$A_d = e^{AT_s}, \quad B_d = \int_0^{T_s} e^{A\eta} B d\eta$$

- 若 A 可逆，可简写为 $B_d = A^{-1}(A_d - I)B$ ；含位置或速度积分器时 A 不可逆。竖直模型的 A 第一列全为零，取 $T_s = 0.01$ s 按积分式或 c2d 得到：

$$A_d \approx \begin{bmatrix} 1 & -3.59 \times 10^{-4} \\ 0 & 0.8187 \end{bmatrix}, \quad B_d \approx \begin{bmatrix} -0.0371 \\ 181.27 \end{bmatrix}$$

矩阵指数和积分给出零阶保持下的离散关系，不要求系统矩阵可逆。

4.4.5 采样、保持与离散化：用c2d复算一阶例题

用c2d核对零阶保持的离散系数

- 题设： $0.05\dot{y} + y = u$ ，初值为零，采样周期0.01 s，输入在每个采样区间保持常值；这是无延迟的一阶线性模型。
- 在MATLAB（需Control System Toolbox）中运行：

```
sysc = tf(1,[0.05 1]); Ts = 0.01; sysd = c2d(sysc,Ts,'zoh')
```

- 预期显示 $0.1813/(z - 0.8187)$ 与Sample time: 0.01 seconds； z 表示前移一个周期。
- 解析核对： $a = e^{-0.01/0.05} = 0.81873075$ ， $b = 1 - a = 0.18126925$ ；由 $(z - a)Y = bU$ 得 $y_{k+1} = ay_k + bu_k$ 。

c2d 函数说明：<https://www.mathworks.com/help/control/ref/dynamicsystem.c2d.html>

工具输出须与解析系数一致，方法和采样周期必须同时记录。

课堂练习

用新数据复算斜率、离散稳定性与时间常数

- **练习1:** 给定课件4.6回填示例中的 $c_T \approx 2.657 \times 10^{-5}$ ，悬停转速 $\omega_0 \approx 429.4 \text{ rad/s}$ 。求总推力斜率 $8c_T\omega_0$ ，与0.0792比较，并说明竖直状态矩阵和串联传递函数增益怎样变化。
- **练习2:** $\tau = 0.05 \text{ s}$ ， T_s 分别取0.075 s和0.12 s。求欧拉系数 a_E 与精确系数 $a = e^{-T_s/\tau}$ ，判断各自单调收敛、振荡收敛还是发散。
- **练习3:** 电机阶跃试验在 $t = 0, 0.04, 0.08, 0.12, 0.16 \text{ s}$ 测得转速300、615、806、921、992 rad/s，最终稳定在约1100 rad/s。估计时间常数 τ 。
- **延伸:** 教材习题8（悬停点线性化与离散化建模流程）见课件4.12的题8讲评。

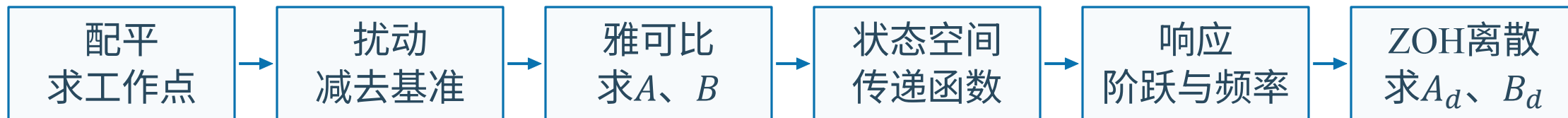
参考要点

课堂练习的结果与判断依据

- **练习1:** $8c_T\omega_0 \approx 0.0913 \text{ N/(rad/s)}$, 约为0.0792的1.15倍。状态矩阵第一行的 -0.039598 变为约 -0.0456 (0.0913 除以 m) ; $B = [0, 20000]^T$ 只含电机参数, 不变; 串联传递函数增益由 -39.598 变为约 -45.6 。
- **练习2:** $T_s = 0.075 \text{ s}$: $a_E = -0.5$, 正负交替收敛; $a = e^{-1.5} \approx 0.223$, 单调收敛。
 $T_s = 0.12 \text{ s}$: $a_E = -1.4$, 交替发散; $a = e^{-2.4} \approx 0.091$, 单调收敛。
- **练习3:** 增量 $1100-300=800 \text{ rad/s}$, 其63.2%为 506 rad/s , 对应转速约 806 rad/s , 读得 $\tau \approx 0.08 \text{ s}$ 。若直接取1100的63.2% (695 rad/s) , 会误读为约 0.055 s 。

本节小结

从配平到离散模型的一条方法链



- **增量与绝对量：**线性模型算的是偏离工作点的增量，送回接口前要加回基准值。
- **单位：**角度用弧度， $1^\circ = 0.01745 \text{ rad}$ ；频率用rad/s， $\Omega = 2\pi f$ 。
- **适用条件：**传递函数只在零初态成立；前向欧拉须 $0 < T_s < 2\tau$ ； A 不可逆时用积分式或c2d求 B_d 。

线性与离散模型将在第五章用于状态反馈和卡尔曼滤波设计。