本章目录

配平、线性化与动态系统基础

第四章 载具运动建模与仿真

4.1 运动建模基础与运动学
4.2 刚体动力学与运动求解
4.3 动力单元、受力与观测建模
4.4 配平、线性化与动态系统基础
4.5 多旋翼模型逐步编程与仿真
4.6 参数测量与静态模型辨识
4.7 动态系统辨识、验证与模型修正
4.8 典型无人载具建模与扩展
4.9 建模工具、代码生成与模型部署
4.10 API与SDK建模接口
4.11 例程体系与综合实践
4.12 习题案例分析与课程设计

本节 5 个教学单元

4.4.1 工作点与配平
教材对应：第4.1.4.5节

4.4.2 局部线性化与状态
教材对应：第4.1.4.5节

4.4.3 状态空间与传递函数
教材对应：第4.1.4.3、4.1.4.5节

4.4.4 阶跃和频率响应
用时间常数、幅值比和相位读响应

4.4.5 采样、保持与离散化
教材对应：第4.1.4.5节

4.4.1 工作点与配平：先分清输入与环境作用

控制输入如何与环境力区分

- 分类依据：能由控制器主动调节的是控制作用；重力、风与地面约束通常作为环境作用。分类看执行机制和建模边界，不只看力的名称。
- 理想四旋翼：将总推力和三轴力矩视为独立虚拟控制量，$u = [f, \tau_x, \tau_y, \tau_z]^T$；再由分配器求四桨指令。
- 平面无人车：若只建纵向驱动力和偏航力矩，$u = [f, \tau_z]^T$；侧向轮地力由约束和轮胎状态决定。
- 边界：轮地摩擦既可表现为驱动作用也可表现为阻力；固定翼舵面由控制器操纵，但实际气动力还依赖空速和迎角。建模时逐项声明。

先定义可控输入和环境作用，再写工作点的受力平衡。

4.4.1 工作点与配平：悬停力与力矩平衡

悬停工作点首先是一组力和力矩平衡条件

- 非线性模型写成$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$；悬停工作点$(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$使状态导数为零，位置和偏航可按任务指定。
- 水平四桨相同且无其他外力时，总推力等于重力，机体合力矩$\mathbf{M}_{b0}$为零；四个控制量由分配器映射为四桨输入。
- 电机持续转动，物理输入不为零；线性化后输入扰动为零才表示维持工作点。

$$\mathbf{x}_0 = [x_0, y_0, z_0, 0,0,0,0,0, \psi_0, 0,0,0]^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{u}_0 = [mg, 0,0,0]^{\mathrm{T}}$$

$$f(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) = \mathbf{0}, \qquad \sum_i T_{i0} = mg, \quad \mathbf{M}_{b0} = \mathbf{0}$$

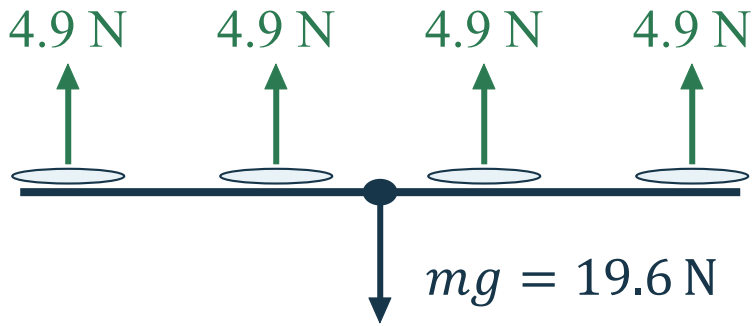
悬停对应非零推力输入，平衡的是合力与合力矩。

4.4.1 工作点与配平：先算每桨推力再算转速

用已声明参数算一个悬停转速

- 教学参数取$m = 2\,\mathrm{kg}$、$g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$、四桨相同，$c_\mathrm{T} = 2.0 \times 10^{-5}\ \mathrm{N/(rad/s)^2}$。
- 每桨需要$T_0 = mg/4 = 4.9\,\mathrm{N}$，由$T_0 = c_\mathrm{T}\omega_0^2$得$\omega_0 \approx 494.975\,\mathrm{rad/s}$。
- 本节沿用名义值；换入课件4.6将给出的回填值$c_\mathrm{T} \approx 2.657 \times 10^{-5}$，得$\omega_0 \approx 429.4\,\mathrm{rad/s}$。

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mg}{4c_\mathrm{T}}} = \sqrt{245000} \approx 494.975\,\mathrm{rad/s}$$



图：四桨等推力，合力平衡、合力矩为零

先计算工作点，再围绕工作点讨论小变化。

4.4.1 工作点与配平：从悬停扩展到稳定运动

配平先求物理条件，再检查全部状态导数

- **代回检查：** $4c_T\omega_0^2 = 19.6\,\mathrm{N} = mg$，竖直加速度为零；四桨同速，三轴力矩与角加速度为零；电机保持ω_0，执行器处于稳态。
- **算法顺序：** 先给定质量、姿态与环境，再求推力和各桨输入；把得到的状态、输入代回非线性方程，逐项检查速度与角速度是否继续变化。
- **匀速区别：** 稳定水平飞行的位置仍随时间变化，不能要求包含位置的全部状态导数为零。需在相应运动状态或移动参考下建立配平条件。
- **用途：** 配平点给线性化一个明确起点。任意填入的初始姿态与油门可能立刻引起加速，因此初始化成功不代表已经配平。

配平由指定运动状态下的平衡条件定义，不是任意一组初始化数值。

本章目录

配平、线性化与动态系统基础

第四章 载具运动建模与仿真

4.1 运动建模基础与运动学
4.2 刚体动力学与运动求解
4.3 动力单元、受力与观测建模
4.4 配平、线性化与动态系统基础
4.5 多旋翼模型逐步编程与仿真
4.6 参数测量与静态模型辨识
4.7 动态系统辨识、验证与模型修正
4.8 典型无人载具建模与扩展
4.9 建模工具、代码生成与模型部署
4.10 API与SDK建模接口
4.11 例程体系与综合实践
4.12 习题案例分析与课程设计

本节 5 个教学单元

4.4.1 工作点与配平
教材对应：第4.1.4.5节

4.4.2 局部线性化与状态
教材对应：第4.1.4.5节

4.4.3 状态空间与传递函数
教材对应：第4.1.4.3、4.1.4.5节

4.4.4 阶跃和频率响应
用时间常数、幅值比和相位读响应

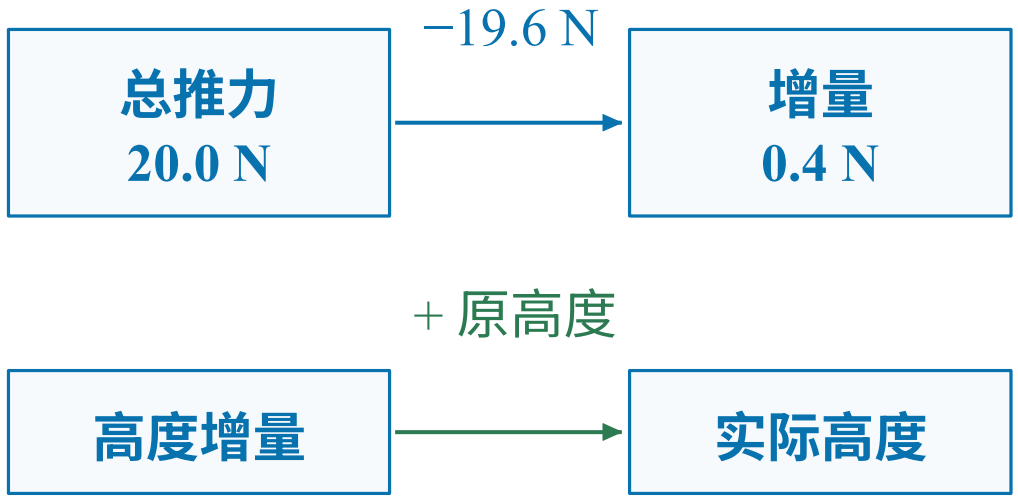
4.4.5 采样、保持与离散化
教材对应：第4.1.4.5节

4.4.2 局部线性化与状态：把总量与增量分开

扰动变量把“现在多少”改成“离基准多少”

- 定义$\delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$、$\delta\mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0$（教材记作$\tilde{\mathbf{x}}$、$\tilde{\mathbf{u}}$）。总推力19.6 N时，加0.4 N后的绝对输入是20.0 N。

- 线性模型算的是偏离工作点的变化；输出高度增量后须加回原高度。把增量直接送绝对接口，会改变输入物理含义。



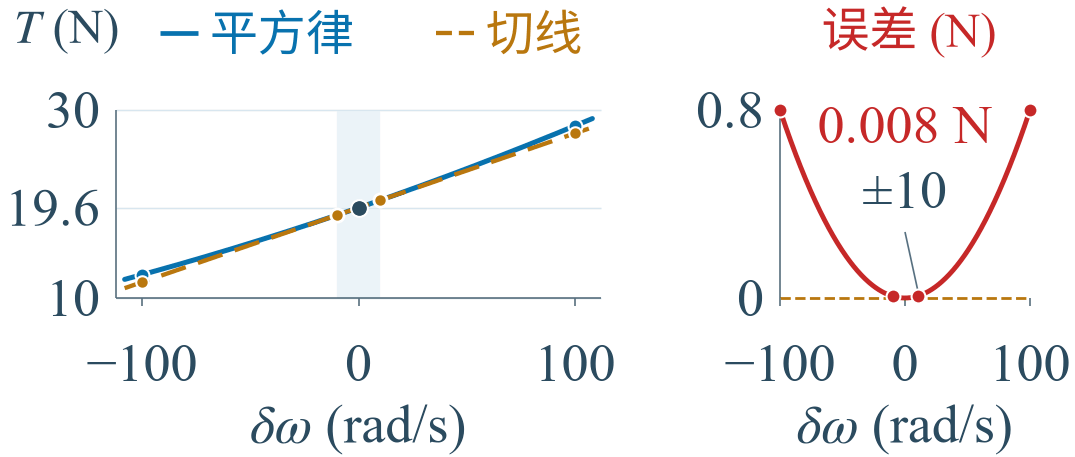
图：进入局部模型先减基准，输出再加基准

扰动量围绕工作点定义，使用前后都要处理基准值。

4.4.2 局部线性化与状态：导数为何给出局部变化率

一阶线性化保留局部斜率而舍去高阶变化

- 在工作点展开$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$，仅保留一次小变化，得到$\delta\dot{\mathbf{x}} = A\delta\mathbf{x} + B\delta\mathbf{u}$。
- A为状态变化对导数的斜率，B为输入变化对导数的斜率。图用推力与转速的关系演示局部近似，切点始终不变。



图：固定切点，小扰动接近、大扰动偏离

$$A = \left.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}\right|_{(\mathbf{x}_0,\mathbf{u}_0)}, \qquad B = \left.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}\right|_{(\mathbf{x}_0,\mathbf{u}_0)}$$

线性模型的系数是工作点附近的敏感程度。

4.4.2 局部线性化与状态：从平方关系得到线性斜率

把总推力展开到工作点附近

- **对象：**教学四旋翼$m = 2\,\mathrm{kg}$，每桨$T_i = c_\mathrm{T}\omega^2$，$c_\mathrm{T} = 2 \times 10^{-5}\,\mathrm{N/(rad/s)^2}$，四桨同速。

- **展开：**总推力$T = 4c_\mathrm{T}\omega^2$。将$\omega = \omega_0 + \delta\omega$代入，常数项是悬停推力，一次项描述邻近斜率，平方小量是近似误差。
- **含义：**$\omega_0 \approx 494.975\,\mathrm{rad/s}$时，转速增加1 rad/s使总推力一阶近似增加0.079196 N；这条斜率只属于该工作点。

$$\delta T = 8c_\mathrm{T}\omega_0\delta\omega + 4c_\mathrm{T}(\delta\omega)^2$$

$$\delta T \approx 0.079196\,\delta\omega$$

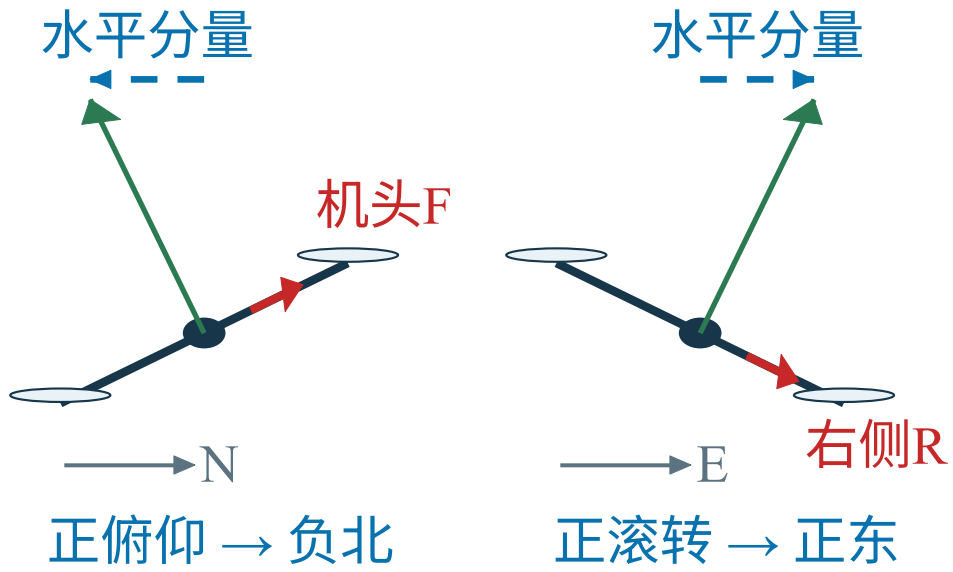
线性化保留工作点附近的一次变化，原非线性关系仍决定近似范围。

4.4.2 局部线性化与状态：悬停附近的水平和竖直耦合

悬停小角度模型怎样解释横向加速度

- 地面NED、机体FRD；水平悬停且偏航为零时，旋转矩阵把向上推力转到地面，小角变化得到下式。
- 正俯仰向负北，正滚转向正东；推力增加使下向加速度减少。角度用弧度，1°应代0.01745。

$$\begin{bmatrix} \delta\dot{v}_N \\ \delta\dot{v}_E \\ \delta\dot{v}_D \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -g\delta\theta \\ g\delta\phi \\ -\delta T/m \end{bmatrix}$$



图：推力分解（倾角放大示意）

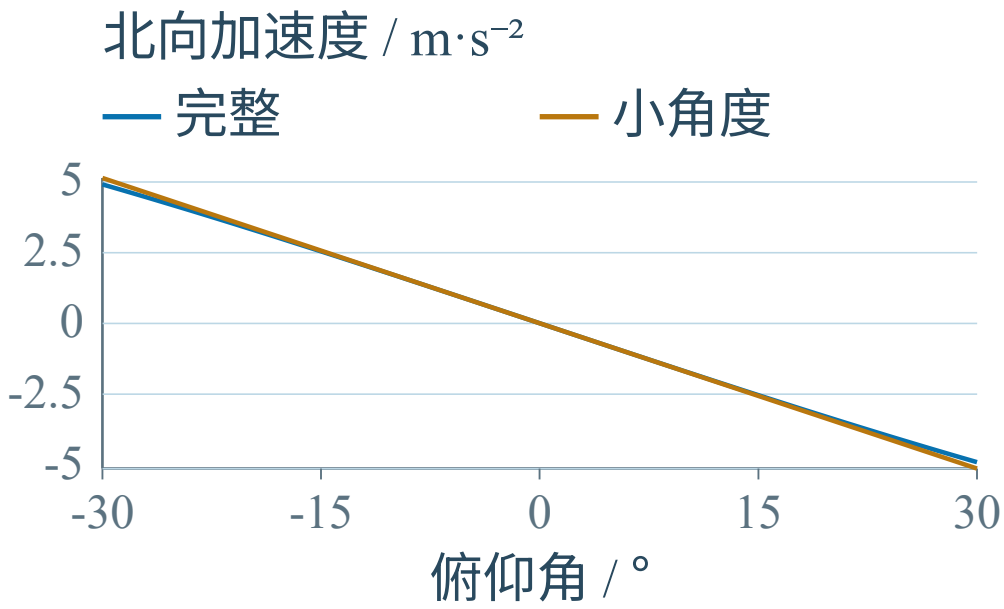
悬停附近的倾角把重力大小的推力转成横向加速度。

4.4.2 局部线性化与状态：小角度误差如何随角度增大

把倾角从5度增加到30度，近似误差怎样变化

- 总推力保持mg、只俯仰时，北向加速度为$-g\sin\theta$，线性近似为$-g\theta$。5°时分别为−0.854与−0.855 m/s²。

- 30°时变为−4.900与−5.131 m/s²。这里差异来自舍去三角函数高阶项，缩小积分步长不能消除这种模型误差。



图：角度轴用度显示，计算用弧度

局部线性化是否够用，要由扰动范围与用途判断。

4.4.2 局部线性化与状态：存储变量数与独立扰动数

全局四元数与局部十二维状态怎样分工

- 非线性仿真保存四元数4个分量，单位范数约束使姿态只有3个自由度；常质量刚体共存13个数，只有12个独立状态。

- 悬停远离欧拉角奇异点（俯仰±90°），局部模型用位置、速度、小角度、角速度各3维增量；四元数的约束方向不是独立姿态。

$$\mathbf{x} = [x, y, z, v_x, v_y, v_z, \phi, \theta, \psi, p, q, r]^{\mathrm{T}}$$

	分量数	独立数
位置	3	3
速度	3	3
四元数	4	3
角速度	3	3

合计：13个数 → 12个独立状态

图：存储分量与独立自由度不同

全局姿态保存约束，局部模型只使用独立的小扰动。

本章目录

配平、线性化与动态系统基础

第四章 载具运动建模与仿真

4.1 运动建模基础与运动学
4.2 刚体动力学与运动求解
4.3 动力单元、受力与观测建模
4.4 配平、线性化与动态系统基础
4.5 多旋翼模型逐步编程与仿真
4.6 参数测量与静态模型辨识
4.7 动态系统辨识、验证与模型修正
4.8 典型无人载具建模与扩展
4.9 建模工具、代码生成与模型部署
4.10 API与SDK建模接口
4.11 例程体系与综合实践
4.12 习题案例分析与课程设计

本节 5 个教学单元

4.4.1 工作点与配平
教材对应：第4.1.4.5节

4.4.2 局部线性化与状态
教材对应：第4.1.4.5节

4.4.3 状态空间与传递函数
教材对应：第4.1.4.3、4.1.4.5节

4.4.4 阶跃和频率响应
用时间常数、幅值比和相位读响应

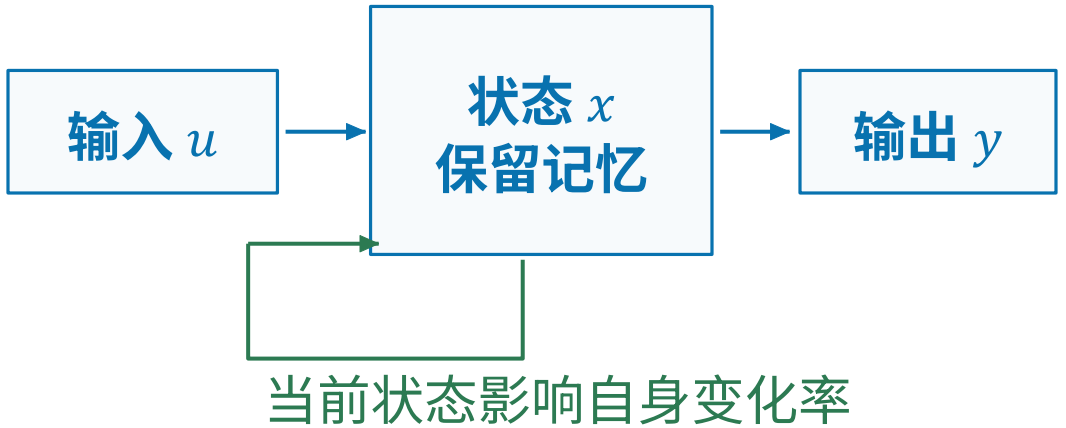
4.4.5 采样、保持与离散化
教材对应：第4.1.4.5节

4.4.3 状态空间与传递函数：一阶电机的状态空间

状态空间把内部记忆与可观察输出分开

- 一阶电机以当前转速$x = \omega$作状态，$\dot{x} = -x/\tau + (K/\tau)u$；相同指令在不同初态下会有不同瞬态。

- 若直接测转速，$y = x$。一般模型用C将状态映射成输出，D表示输入的直接作用；测量通道数不等于状态数。



图：状态保存内部记忆

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \qquad \mathbf{y} = C\mathbf{x} + D\mathbf{u}$$

状态保存动态记忆，输出是由状态和输入形成的观察量。

4.4.3 状态空间与传递函数：从组件模型到状态矩阵

电机与竖直运动串联后，怎样组成两个状态

- **选择状态：**取$\delta x = [\delta v_D, \delta\omega]^{\mathrm{T}}$；$v_D$是NED向下速度，$\omega$为四桨共同转速。输入$\delta u$是共同归一化指令增量。
- **连接关系：**推力增加使向下加速度减小，故$\delta\dot{v}_D = -0.039598\delta\omega$。教学电机$\tau = 0.05\,s$，每单位指令的稳态转速增益$K_u = 1000\,\mathrm{rad/s}$。
- **读矩阵：**第一行表示转速怎样影响平移，第二行表示电机自身衰减，其中 $1/\tau = 20$ 、$K_u/\tau = 20000$；输入先作用于电机，再经推力改变速度。

$$\delta\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -0.039598 \\ 0 & -20 \end{bmatrix} \delta x + \begin{bmatrix} 0 \\ 20000 \end{bmatrix} \delta u$$

状态矩阵把各条物理因果关系放到对应的行和列。

4.4.3 状态空间与传递函数：传递函数与零初始条件

零初态下，输出与输入的拉氏变换之比是传递函数

1 微分方程

- 一阶环节$\tau\dot{y}+y=Ku$中，u为输入，y为输出，K决定稳态增益，τ决定响应快慢。

2 拉氏变换

- 拉普拉斯变换将输入、输出记为$U(s),Y(s)$，s是变换变量。微分项变成$sY(s)-y(0)$，所以非零初态不能直接丢掉。

$$\tau[sY(s)-y(0)]+Y(s)=KU(s)$$

初始扰动为零时，初态项才消去

3 输入输出比

$$G(s)=Y(s)/U(s)=\frac{K}{\tau s+1}\qquad (y(0)=0)$$

$G(s)$是变换后的比值，不是逐时刻的$y(t)/u(t)$。

4.4.3 状态空间与传递函数：从状态方程读出输入输出

同一竖直模型也能写成串联传递函数

- **边界：**只考察输入δu到输出δv_D，并取零初始扰动。电机先产生转速增量，推力再改变加速度，积分后得到速度。
- **串联：**$\delta\omega(s) = 1000\,\delta U(s)/(0.05s+1)$，$\delta V_D(s) = -0.039598\,\delta\omega(s)/s$，两式相乘得下式；负号只表示NED向下为正。
- **输入检查：**持续正的输入增量使推力高于重力，理想零阻力模型便持续加速。电机达到稳态，不表示速度也一定达到有限稳态。

$$\frac{\delta V_D(s)}{\delta U(s)} = -\frac{39.598}{s(0.05s+1)}$$

传递函数的每个因子都应能返回动力链中的一个物理环节。

本章目录

配平、线性化与动态系统基础

第四章 载具运动建模与仿真

4.1 运动建模基础与运动学
4.2 刚体动力学与运动求解
4.3 动力单元、受力与观测建模
4.4 配平、线性化与动态系统基础
4.5 多旋翼模型逐步编程与仿真
4.6 参数测量与静态模型辨识
4.7 动态系统辨识、验证与模型修正
4.8 典型无人载具建模与扩展
4.9 建模工具、代码生成与模型部署
4.10 API与SDK建模接口
4.11 例程体系与综合实践
4.12 习题案例分析与课程设计

本节 5 个教学单元

4.4.1 工作点与配平
教材对应：第4.1.4.5节

4.4.2 局部线性化与状态
教材对应：第4.1.4.5节

4.4.3 状态空间与传递函数
教材对应：第4.1.4.3、4.1.4.5节

4.4.4 阶跃和频率响应
用时间常数、幅值比和相位读响应

4.4.5 采样、保持与离散化
教材对应：第4.1.4.5节

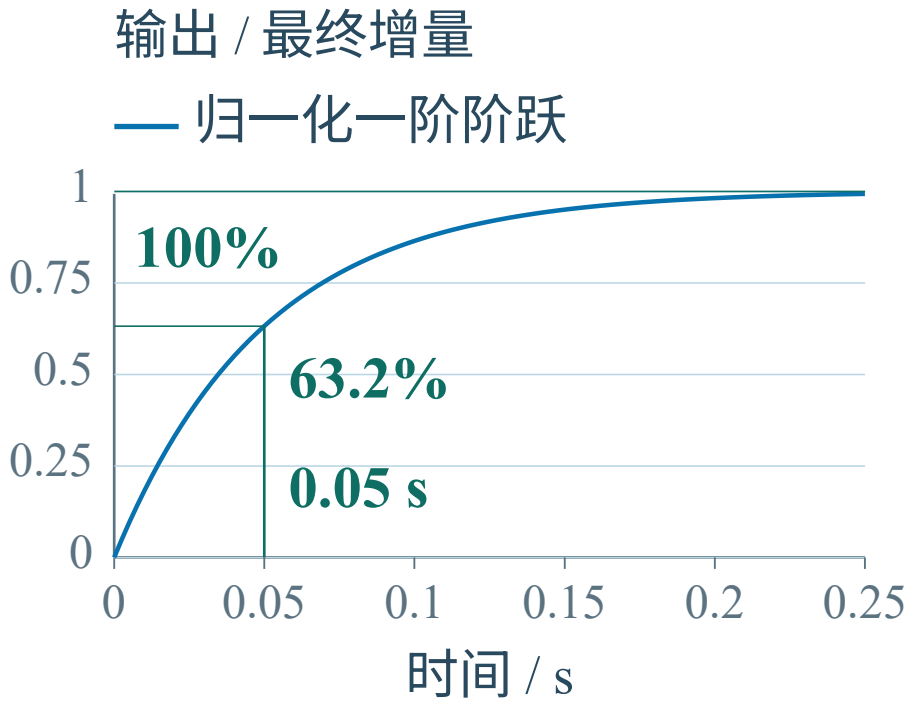
4.4.4 阶跃和频率响应：一阶阶跃的增益与时间常数

时间常数对应阶跃响应的63.2%位置

- 零初值下施加单位阶跃，响应为$y(t) = K(1 - e^{-t/\tau})$；增益决定最终增量。当$t = \tau$时，输出达到最终增量的63.2%。

- 教学模型τ=0.05 s时，0.05 s达到63.2%，0.15 s达到95.0%，0.25 s达到99.3%；这些比例属于无时延的一阶结构。

- 真实曲线若先停顿后上升，停顿可能来自时延；若明显振荡或超调，需要比一阶无零点模型更丰富的结构。



图：τ=0.05 s的教学阶跃响应

4.4.4 阶跃和频率响应：正弦输入怎样读取幅值与相位

正弦输入用幅值比和相位描述稳态响应

- 令输入为$A\sin(\Omega t)$，稳定线性系统经过暂态后输出同频正弦；幅值比为$|G(j\Omega)|$，相位差为$\angle G(j\Omega)$。
- 在传递函数中令$s = j\Omega$即可取指定频率响应，其中$j^2 = -1$；负相位表示输出落后，不能一律等同固定时延。
- 下式用于$K > 0$、$\tau > 0$的无时延一阶环节；比较实测幅相时，应固定工作点、输入幅值并去除暂态。

$$|G(j\Omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + (\Omega\tau)^2}}, \qquad \angle G(j\Omega) = -\arctan(\Omega\tau)$$

频率响应说明每个频率怎样被衰减和延迟。

4.4.4 阶跃和频率响应：频率单位与相位时间差

Hz、弧度每秒与相位时间差怎样换算

- 频率f的单位Hz表示每秒周期数，角频率$\Omega = 2\pi f$表示每秒相位弧度；代入$G(j\Omega)$前必须完成转换。
- 例：2 Hz信号周期0.5 s，输出波峰晚0.05 s，即落后1/10周期，相位−36°。
- 这个波峰差只能在对应频率及同一周期配对后解释；把周期错配或把度直接代入弧度公式，会得到错误时延。

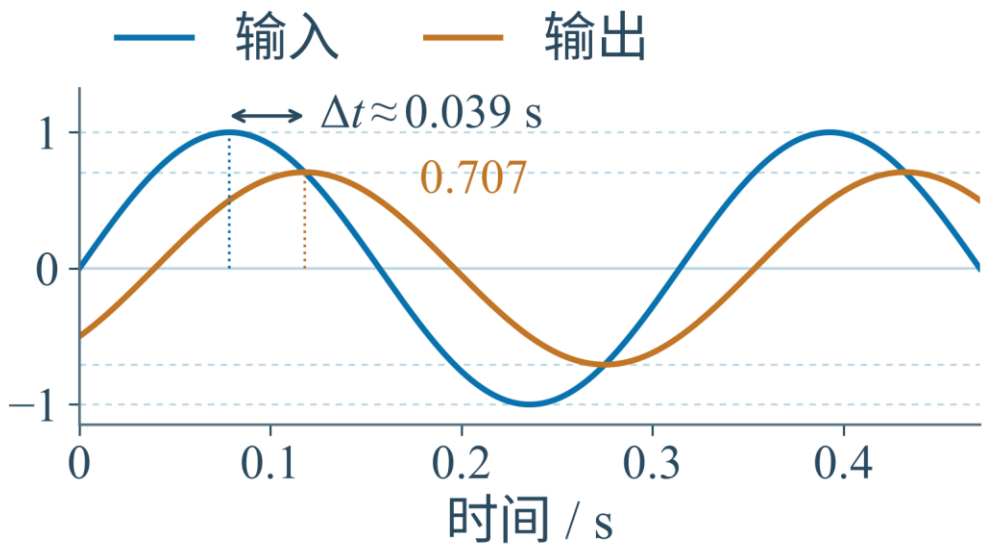
$$\Omega = 2\pi f, \qquad \varphi = -360^\circ f \Delta t$$

频率单位若换错，相位差对应的时间延迟也会错。

4.4.4 阶跃和频率响应：正弦输入输出对照

转折频率处，输出幅值降到0.707并落后八分之一周期

- **算例：** $K = 1$、$\tau = 0.05\,\mathrm{s}$，输入3.183 Hz，即$\Omega = 20\,\mathrm{rad/s}$、$\Omega\tau = 1$。
- **幅值比：** 暂态过后输出幅值0.707，与$1/\sqrt{2}$一致。
- **相位：** 输出波峰晚约0.039 s，是周期0.314 s的八分之一，相位$-360°/8 = -45°$。



图：3.183 Hz稳态输入输出
（教学算例，非平台实测）

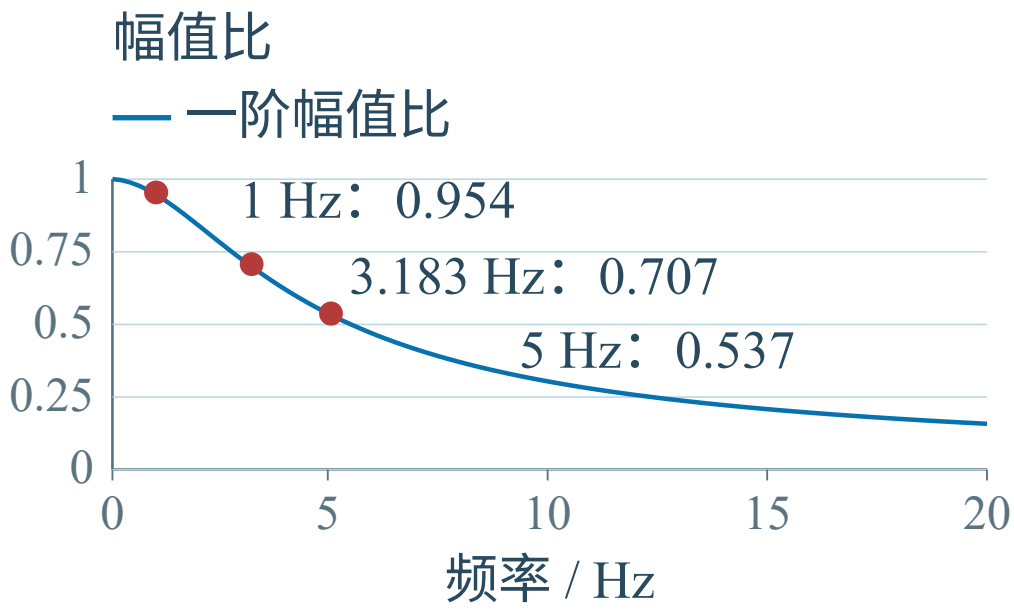
同一个时间常数同时决定幅值衰减和相位滞后。

4.4.4 阶跃和频率响应：一阶系统的幅频和相频

同一个时间常数怎样限制可跟随的频率

- 取 $K=1, \tau=0.05$ s，1 Hz幅值比0.954、相位−17.44°；5 Hz幅值比0.537、相位−57.52°，快变化更难跟随。

- 当$\Omega\tau=1$，幅值比$1/\sqrt{2}$、相位−45°，本例为3.183 Hz。若改画分贝，应使用$20\log_{10}|G|$并注明尺度。



图：无时延一阶幅值比，不是分贝

频率升高后，有限响应时间使输出幅值下降并增加滞后。

本章目录

配平、线性化与动态系统基础

第四章 载具运动建模与仿真

4.1 运动建模基础与运动学
4.2 刚体动力学与运动求解
4.3 动力单元、受力与观测建模
4.4 配平、线性化与动态系统基础
4.5 多旋翼模型逐步编程与仿真
4.6 参数测量与静态模型辨识
4.7 动态系统辨识、验证与模型修正
4.8 典型无人载具建模与扩展
4.9 建模工具、代码生成与模型部署
4.10 API与SDK建模接口
4.11 例程体系与综合实践
4.12 习题案例分析与课程设计

本节 5 个教学单元

4.4.1 工作点与配平
教材对应：第4.1.4.5节

4.4.2 局部线性化与状态
教材对应：第4.1.4.5节

4.4.3 状态空间与传递函数
教材对应：第4.1.4.3、4.1.4.5节

4.4.4 阶跃和频率响应
用时间常数、幅值比和相位读响应

4.4.5 采样、保持与离散化
教材对应：第4.1.4.5节

4.4.5 采样、保持与离散化：采样与零阶保持

采样描述何时记录，保持描述两次更新之间输入怎样作用

- 采样周期T_s是记录或更新相邻时刻的间隔；零阶保持（ZOH）指两次更新之间输入维持上次给定值，并非输入在中间不存在。
- 输入保持为常值后，可对连续方程在一个采样区间内积分，得到从当前状态到下一状态的离散关系。
- 采样率$f_s = 1/T_s$，与仿真求解器的内部积分步长不同；一个输入保持周期内，求解器仍可执行多个小步。



图：零阶保持下的一次离散更新

采样周期与输入保持共同定义离散模型的物理含义。

4.4.5 采样、保持与离散化：一阶模型的精确离散化

在一个输入保持区间内直接解微分方程

- **保持条件：** t_k至$t_k + T_s$间输入保持为u_k，方程$\tau\dot{y} + y = Ku_k$的平衡输出为Ku_k。

区间内：误差连续衰减

- **求解思路：** 令误差$\varepsilon = y - Ku_k$，区间内满足$\tau\dot{\varepsilon} + \varepsilon = 0$，误差按指数衰减；下一状态等于目标值加剩余误差。

区间末：目标值加剩余误差

$$y(t_k + T_s) = Ku_k + (y_k - Ku_k)e^{-T_s/\tau}$$

- $\tau = 0.05\,\mathrm{s}$、$T_s = 0.01\,\mathrm{s}$时，$a = 0.81873075$，$1 - a = 0.18126925$。

旧状态权重 81.87%　　目标权重 18.13%

- **含义：** $a = e^{-T_s/\tau}$给出上一时刻误差留下的比例，$1 - a$给出向本次目标前进的比例。这是区间积分，不是数值Euler近似。

4.4.5 采样、保持与离散化：逐步迭代与连续解对照

逐步迭代：零阶保持更新在采样点与连续解吻合

- **算例：** $K=1$、$u_k=1$、$y_0=0$，$T_s=0.01\,\mathrm{s}$。零阶保持$y_{k+1}=0.8187y_k+0.1813$，欧拉$y_{k+1}=0.8y_k+0.2$，每步代入上一步结果。

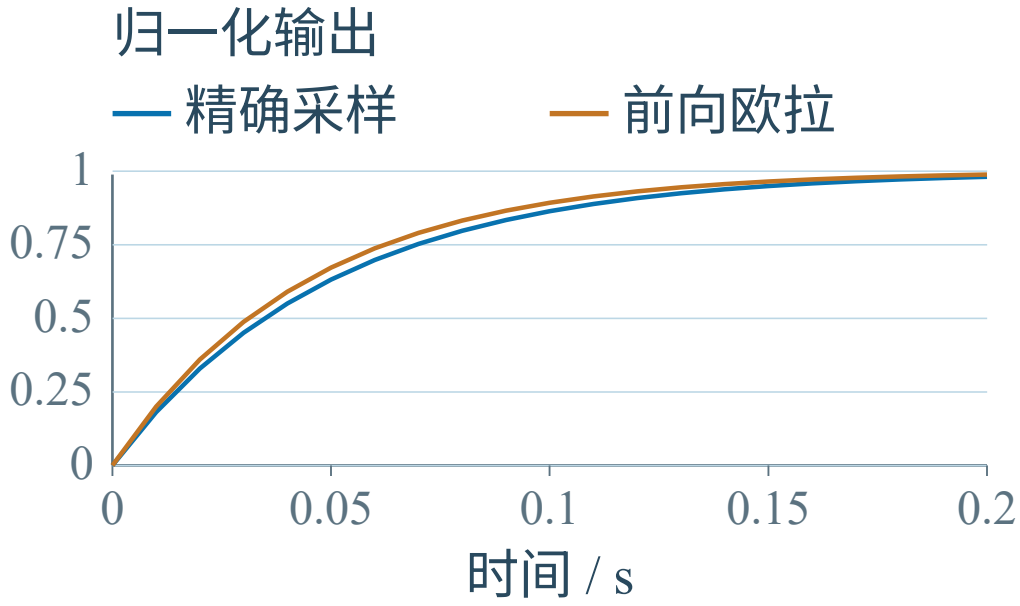
k	零阶保持	前向欧拉	连续解 $1-e^{-kT_s/\tau}$
1	0.1813	0.2000	0.1813
2	0.3297	0.3600	0.3297
3	0.4512	0.4880	0.4512

- **核对：** 零阶保持三步与连续解逐位相同（阶跃输入在区间内确实保持）；欧拉每步多走一点，前几步领先连续解。
- 旧状态权重与稳态目标权重之和为1；若输入一直不变，离散模型最终仍趋近Ku，与连续模型的稳态一致。

4.4.5 采样、保持与离散化：前向欧拉离散化与稳定性

前向欧拉近似何时与精确离散明显不同

- 欧拉系数$a_E = 1 - T_s/\tau$。$T_s = 0.01\,\mathrm{s}$时$a_E = 0.8$，精确系数0.81873，两条曲线几乎重合。
- 步长越大差别越明显：$T_s = \tau$时$a_E = 0$，精确系数$e^{-1} \approx 0.368$；$T_s > 2\tau$时$|a_E| > 1$，欧拉更新发散。



$$y_{k+1} = (1 - T_s/\tau)y_k + (T_s/\tau)Ku_k$$

$$|1 - T_s/\tau| < 1 \Leftrightarrow 0 < T_s < 2\tau$$

图：同一阶跃下的两种更新

离散近似误差取决于采样间隔相对动态时间尺度的大小。

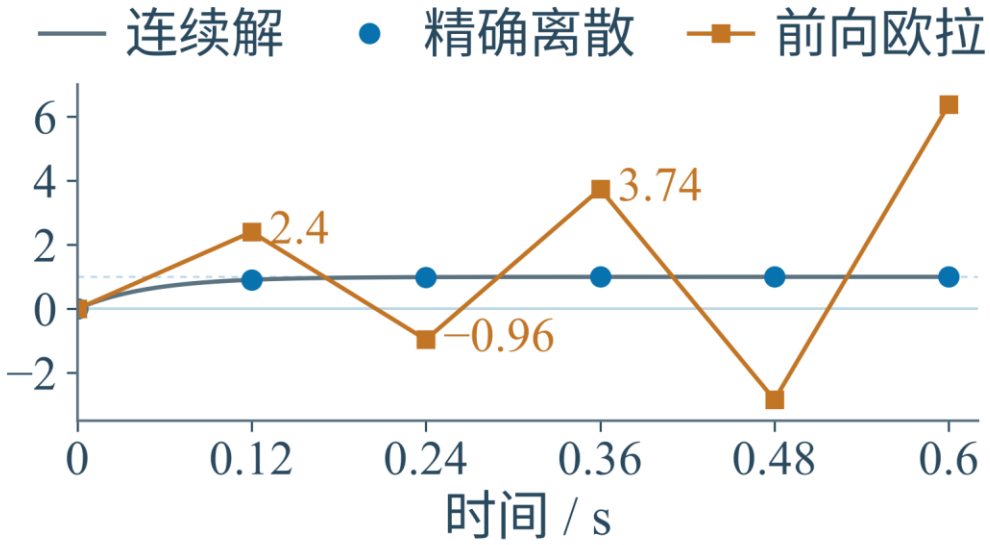
4.4.5 采样、保持与离散化：步长越过稳定界

步长超过2τ时，欧拉更新交替发散而精确离散收敛

- **算例：** $\tau = 0.05\,\mathrm{s}$、$T_s = 0.12\,\mathrm{s}$、$u = 1$、$y_0 = 0$。欧拉$y_{k+1} = -1.4y_k + 2.4$，依次得2.4、−0.96、3.74、−2.84……

- **精确离散：** $y_{k+1} = 0.0907y_k + 0.9093$，依次得0.909、0.992、0.999，单调趋近1。

- **结论：** 误差每步乘以−1.4，正负交替且放大；连续对象本身稳定，发散来自离散方法与步长。



图：$T_s = 0.12\,\mathrm{s}$的单位阶跃（教学算例，非平台实测）

连续模型稳定，不代表任意步长的数值更新都稳定。

4.4.5 采样、保持与离散化：状态空间的精确离散化

一般状态空间怎样从连续时间变成离散时间

- 常系数线性模型在零阶保持下满足$\mathbf{x}_{k+1} = A_d\mathbf{x}_k + B_d\mathbf{u}_k$。矩阵指数把内部动态推进一个采样周期，区间积分累加输入作用。

$$A_d = e^{AT_s}, \qquad B_d = \int_0^{T_s} e^{A\eta}\, B\, \mathrm{d}\eta$$

- 若A可逆，可简写为$B_d = A^{-1}(A_d - I)B$；含位置或速度积分器时A不可逆。竖直模型的A第一列全为零，取$T_s = 0.01\,\mathrm{s}$按积分式或c2d得到：

$$A_d \approx \begin{bmatrix} 1 & -3.59\times10^{-4} \\ 0 & 0.8187 \end{bmatrix}, \quad B_d \approx \begin{bmatrix} -0.0371 \\ 181.27 \end{bmatrix}$$

矩阵指数和积分给出零阶保持下的离散关系，不要求系统矩阵可逆。

4.4.5 采样、保持与离散化：用c2d复算一阶例题

用c2d核对零阶保持的离散系数

- 题设：$0.05\dot{y} + y = u$，初值为零，采样周期0.01 s，输入在每个采样区间保持常值；这是无延迟的一阶线性模型。
- 在MATLAB（需Control System Toolbox）中运行：

```
sysc = tf(1,[0.05 1]);  Ts = 0.01;  sysd = c2d(sysc,Ts,'zoh')
```

- 预期显示$0.1813/(z - 0.8187)$与Sample time: 0.01 seconds；z表示前移一个周期。

- 解析核对：$a = e^{-0.01/0.05} = 0.81873075$，$b = 1 - a = 0.18126925$；由$(z - a)Y = bU$得$y_{k+1} = ay_k + bu_k$。

c2d 函数说明：https://www.mathworks.com/help/control/ref/dynamicsystem.c2d.html

工具输出须与解析系数一致，方法和采样周期必须同时记录。

课堂练习

用新数据复算斜率、离散稳定性与时间常数

- **练习1：** 给定课件4.6回填示例中的$c_{\mathrm{T}} \approx 2.657 \times 10^{-5}$，悬停转速$\omega_0 \approx 429.4\ \mathrm{rad/s}$。求总推力斜率$8c_{\mathrm{T}}\omega_0$，与0.0792比较，并说明竖直状态矩阵和串联传递函数增益怎样变化。
- **练习2：** $\tau = 0.05\ \mathrm{s}$，T_s分别取0.075 s和0.12 s。求欧拉系数a_E与精确系数$a = e^{-T_s/\tau}$，判断各自单调收敛、振荡收敛还是发散。
- **练习3：** 电机阶跃试验在$t = 0$、0.04、0.08、0.12、0.16 s测得转速300、615、806、921、992 rad/s，最终稳定在约1100 rad/s。估计时间常数τ。
- **延伸：** 教材习题8（悬停点线性化与离散化建模流程）见课件4.12的题8讲评。

参考要点

课堂练习的结果与判断依据

- **练习1：** $8c_{\mathrm{T}}\omega_0 \approx 0.0913\,\mathrm{N/(rad/s)}$，约为0.0792的1.15倍。状态矩阵第一行的−0.039598变为约−0.0456（0.0913除以m）；$B = [0,\ 20000]^{\mathrm{T}}$只含电机参数，不变；串联传递函数增益由−39.598变为约−45.6。

- **练习2：** $T_s = 0.075\,\mathrm{s}$：$a_E = -0.5$，正负交替收敛；$a = e^{-1.5} \approx 0.223$，单调收敛。$T_s = 0.12\,\mathrm{s}$：$a_E = -1.4$，交替发散；$a = e^{-2.4} \approx 0.091$，单调收敛。

- **练习3：** 增量1100−300=800 rad/s，其63.2%为506 rad/s，对应转速约806 rad/s，读得$\tau \approx 0.08\,\mathrm{s}$。若直接取1100的63.2%（695 rad/s），会误读为约0.055 s。

本节小结

从配平到离散模型的一条方法链

配平
求工作点 → 扰动
减去基准 → 雅可比
求A、B → 状态空间
传递函数 → 响应
阶跃与频率 → ZOH离散
求A_d、B_d

- **增量与绝对量：**线性模型算的是偏离工作点的增量，送回接口前要加回基准值。
- **单位：**角度用弧度，1°=0.01745 rad；频率用rad/s，$\Omega = 2\pi f$。
- **适用条件：**传递函数只在零初态成立；前向欧拉须$0 < T_s < 2\tau$；A不可逆时用积分式或c2d求B_d。

线性与离散模型将在第五章用于状态反馈和卡尔曼滤波设计。