



4.2 刚体动力学与运动求解



本章目录

刚体动力学与运动求解

第四章 载具运动建模与仿真

4.1 运动建模基础与运动学

4.2 刚体动力学与运动求解

4.3 动力单元、受力与观测建模

4.4 配平、线性化与动态系统基础

4.5 多旋翼模型逐步编程与仿真

4.6 参数测量与静态模型辨识

4.7 动态系统辨识、验证与模型修正

4.8 典型无人载具建模与扩展

4.9 建模工具、代码生成与模型部署

4.10 API与SDK建模接口

4.11 例程体系与综合实践

4.12 习题案例分析与课程设计

本节 5 个教学单元

4.2.1 悬停与升降

教材对应：第4.1.4.1节（平移方程）

4.2.2 差动推力与转动

教材对应：第4.1.4.1节（转动方程）

4.2.3 倾斜与三维动力学

教材对应：第4.1.3.2节、第4.1.4.1节

4.2.4 连续方程与数值积分

前向欧拉、步长误差与数值稳定

4.2.5 解析核验与练习

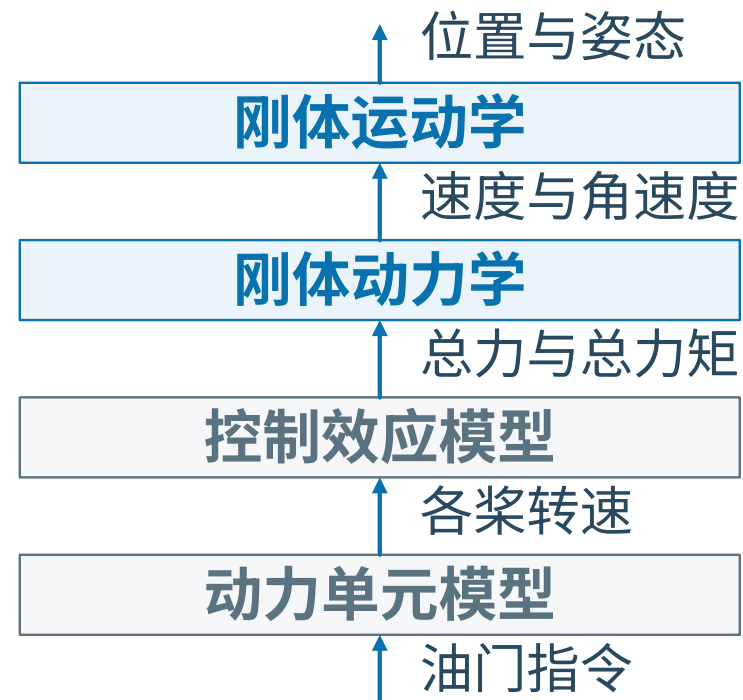
用平衡、单轴转动与误差归因核验模型



本节导入

先算合力和合矩，再求刚体怎样运动

- **本节输入：**各桨推力及其关于质心的力矩先视为已知。主线参数： $m = 2 \text{ kg}$ 、 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ 、力臂 0.25 m 、 $J_y = 0.05 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ，悬停推力 19.6 N 。
- **动力学输出：**牛顿方程求线加速度；欧拉动力学求角加速度，惯性和耦合项不能混用。
- **接回运动学：**线速度更新位置；机体角速度经课件4.1的姿态运动学更新四元数。课件4.5再把本节方程写成程序并逐步仿真。



图：四层运动模型

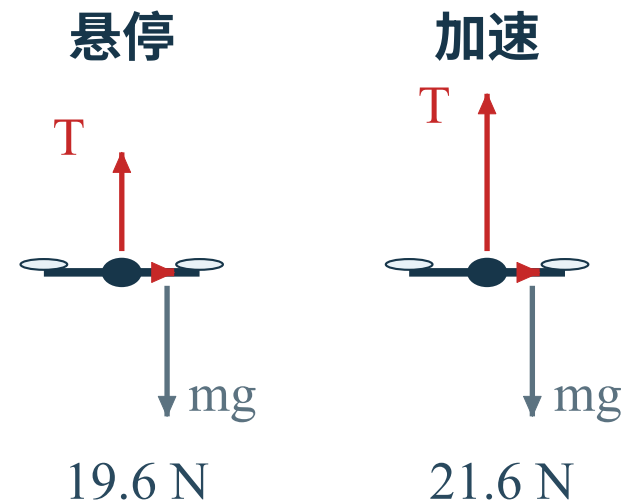
动力学把外力和力矩转换成状态变化率，运动学再累积成轨迹。

4.2.1 悬停与升降：力到加速度

竖直合力决定速度怎样变化

- **悬停条件：**四桨各4.9 N， $T = mg = 19.6$ N；姿态水平、合力矩为零，且速度与角速度都为零，才能保持原位。
- **变化率：**加速度表示速度每秒改变多少，位置导数表示位置每秒改变多少。点号表示时间导数，积分把变化率累积成状态。
- **增大推力：**四桨各5.4 N时，向上净力2 N。除以质量2 kg，得到 $a_D = -1 \text{ m/s}^2$ （NED的D轴向下，向上为负）。

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4, \quad a_D = \dot{v}_D = g - \frac{T}{m}, \quad \dot{z}_D = v_D$$



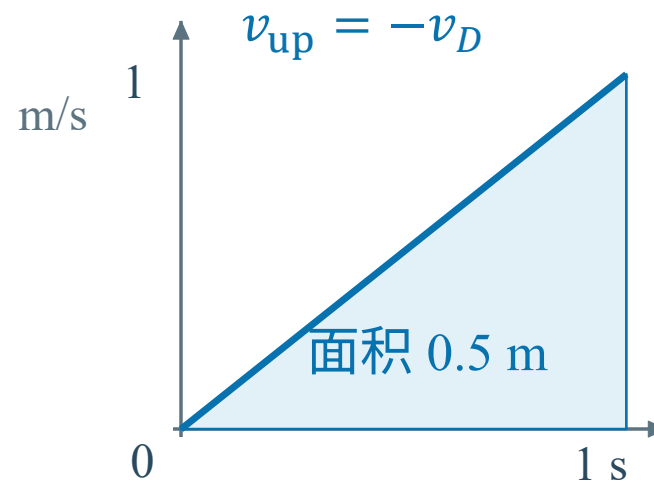
图：向上推力与向下重力

推力先改变加速度，速度的累计变化再改变高度。

4.2.1 悬停与升降：解析计算与曲线

恒定推力下，一秒钟会上升多少

- **本段从加速开始计时：** $z_D(0) = -1 \text{ m}$ 、 $v_D(0) = 0$ ；总推力21.6 N，故 $a_D = -1 \text{ m/s}^2$ 。
- **一秒终点：** $v_D = -1 \text{ m/s}$ 、 $z_D = -1.5 \text{ m}$ ，即高度1.5 m、向上速度1 m/s。
- **位移来自累积：** 图中三角形面积0.5 m就是升高量。解析式仅用于恒加速度；数值结果应随步长缩小而接近它。



图：速度面积给出位移

$$v_D(t) = v_D(0) + a_D t, \quad z_D(t) = z_D(0) + v_D(0)t + \frac{1}{2} a_D t^2$$

给定初态与加速度，可以计算任意时刻的速度和位置。

4.2 刚体动力学与运动求解

4.2.1 悬停与升降：运动与曲线

升高并停住需要先加速、再减速

恢复平衡：新高度悬停

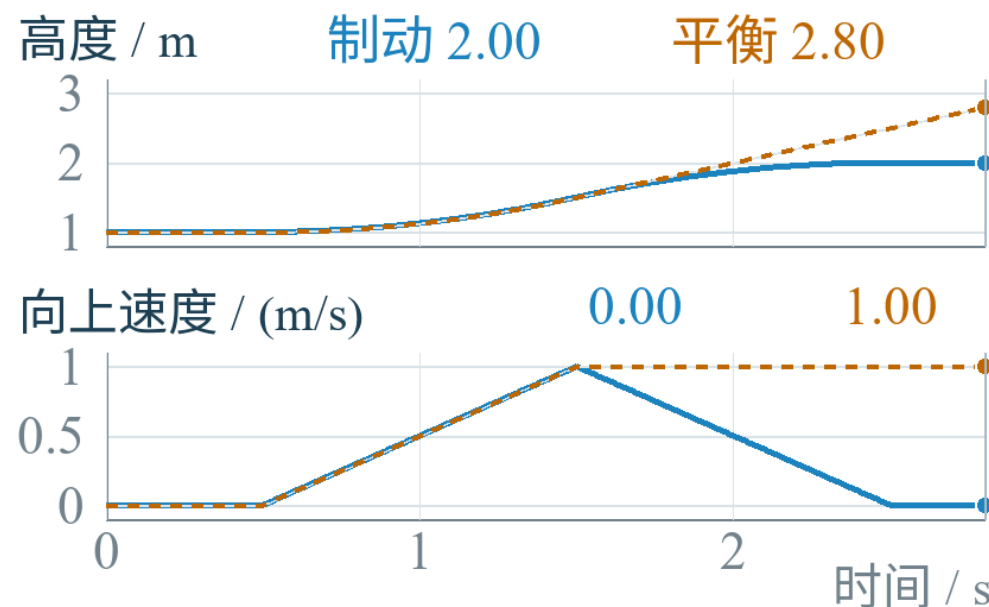
制动方案：四桨各 4.9 N

高度 / m



当前向上加速度: $+0.0 \text{ m/s}^2$

$t = 2.80 \text{ s}$



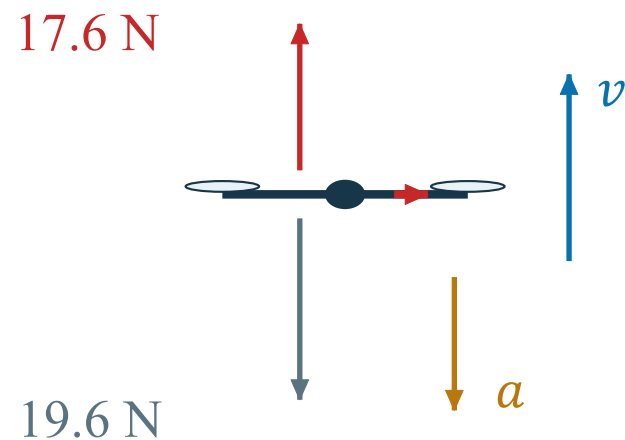
图：本算例阻力为零；21.6 N加速、17.6 N制动，提前恢复19.6 N仍会上升。

恢复悬停推力只能消除加速度，停止上升还要先消除速度。

4.2.1 悬停与升降：状态与控制目标

停止上升时，高度和速度都要满足目标

- **承接加速段：**高度1.5 m、向上速度1 m/s。零阻力下恢复 $T = 19.6 \text{ N}$ 只能使合力为零，飞机仍继续上升。
- **制动输入：**本段重新计时。四桨各4.4 N，总推力17.6 N， $a_D = +1 \text{ m/s}^2$ ；合力与当前速度反向，表示减速。
- 制动1 s仍升高0.5 m；速度归零后恢复19.6 N，停在高度2 m。质量或扰动变化需用状态反馈修正。



图：仍上升，但向下加速

$$v_{D,\text{end}} = -1 + 1 \times 1 = 0 \text{ m/s}, \quad \Delta z_D = -1 \times 1 + \frac{1}{2} \times 1 \times 1^2 = -0.5 \text{ m}$$

运动模型预测响应，控制器根据目标与状态决定施加什么输入。



4.2 刚体动力学与运动求解



本章目录

刚体动力学与运动求解

第四章 载具运动建模与仿真

4.1 运动建模基础与运动学

4.2 刚体动力学与运动求解

4.3 动力单元、受力与观测建模

4.4 配平、线性化与动态系统基础

4.5 多旋翼模型逐步编程与仿真

4.6 参数测量与静态模型辨识

4.7 动态系统辨识、验证与模型修正

4.8 典型无人载具建模与扩展

4.9 建模工具、代码生成与模型部署

4.10 API与SDK建模接口

4.11 例程体系与综合实践

4.12 习题案例分析与课程设计

本节 5 个教学单元

4.2.1 悬停与升降

教材对应：第4.1.4.1节（平移方程）

4.2.2 差动推力与转动

教材对应：第4.1.4.1节（转动方程）

4.2.3 倾斜与三维动力学

教材对应：第4.1.3.2节、第4.1.4.1节

4.2.4 连续方程与数值积分

前向欧拉、步长误差与数值稳定

4.2.5 解析核验与练习

用平衡、单轴转动与误差归因核验模型



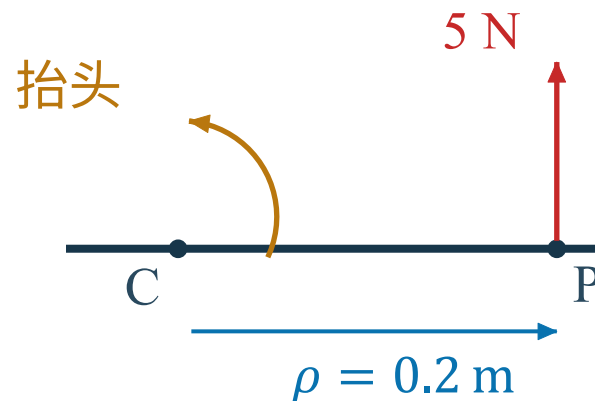
4.2 刚体动力学与运动求解

4.2.2 差动推力与转动：平移惯性与质心力矩

质量、质心和作用位置共同决定响应

- **质量与质心：** m 表征平移惯性，质心是质量加权的位置。机体原点取质心；几何中心、飞控安装点未必与它重合。

- **力矩：** 力臂 ρ 从质心指向施力点，用 $\rho \times F$ 求矩，再加直接偶矩 τ_i （如旋翼反扭矩）。力通过质心时仍使机体平移，但力臂矩为零。



图：质心与施力点

$$\mathbf{r}_C = \frac{1}{m} \int \mathbf{r} dm, \quad \mathbf{M}_b = \sum_i \boldsymbol{\rho}_{i,b} \times \mathbf{F}_{i,b} + \sum_i \boldsymbol{\tau}_{i,b}$$

- **叉乘算例：** 前方0.2 m处5 N向上力产生正俯仰（抬头）力矩。

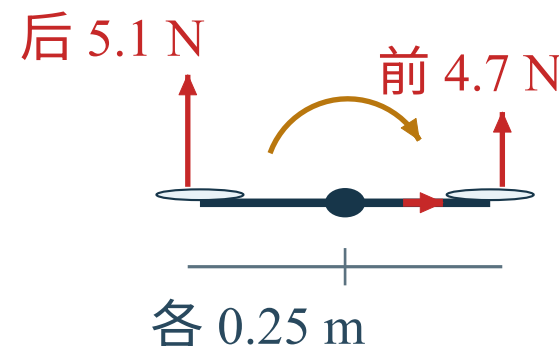
$$[0.2, 0, 0]^T \times [0, 0, -5]^T = [0, 1, 0]^T \text{ N m}$$

外力决定平移作用，施力点相对质心的位置还决定转动作用。

4.2.2 差动推力与转动：单轴转动计算

前后推力差怎样产生俯仰角

- 差动输入如图，左右桨各4.9 N。总推力19.6 N不变，前后力矩却不抵消，产生机头下俯的负俯仰力矩。
- 单轴前提：** $J_y = 0.05 \text{ kg m}^2$ ，仅绕右轴转动。惯量对应平移中的质量，表示改变转动快慢的难易；此时俯仰角变化率等于该轴角速度，角加速度等于力矩除以惯量。



图：前弱后强，机头下俯

① 求力矩

$$\begin{aligned} M_y &= l(T_{\text{front}} - T_{\text{rear}}) \\ &= 0.25 \times (4.7 - 5.1) \\ &= -0.1 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

② 求角加速度

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_y &= M_y / J_y \\ &= -0.1 / 0.05 = -2 \text{ rad/s}^2 \\ \text{单轴时 } \dot{\theta} &= \omega_y \end{aligned}$$

③ 加速再制动

负、正力矩各施加0.3 s
 ω_y 回到0,
 $\theta = -0.18 \text{ rad}$ (约 -10.3°)

力矩先改变角速度，角速度的积分再改变机体姿态。

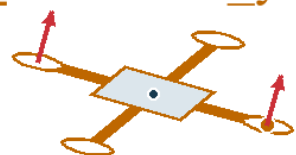
4.2 刚体动力学与运动求解

4.2.2 差动推力与转动：力矩到姿态

停止施加力矩，不会自动停止转动

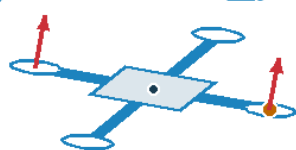
撤矩仍转动；反向力矩可制动

A 撤去力矩 $M_y = +0.00 \text{ N}\cdot\text{m}$

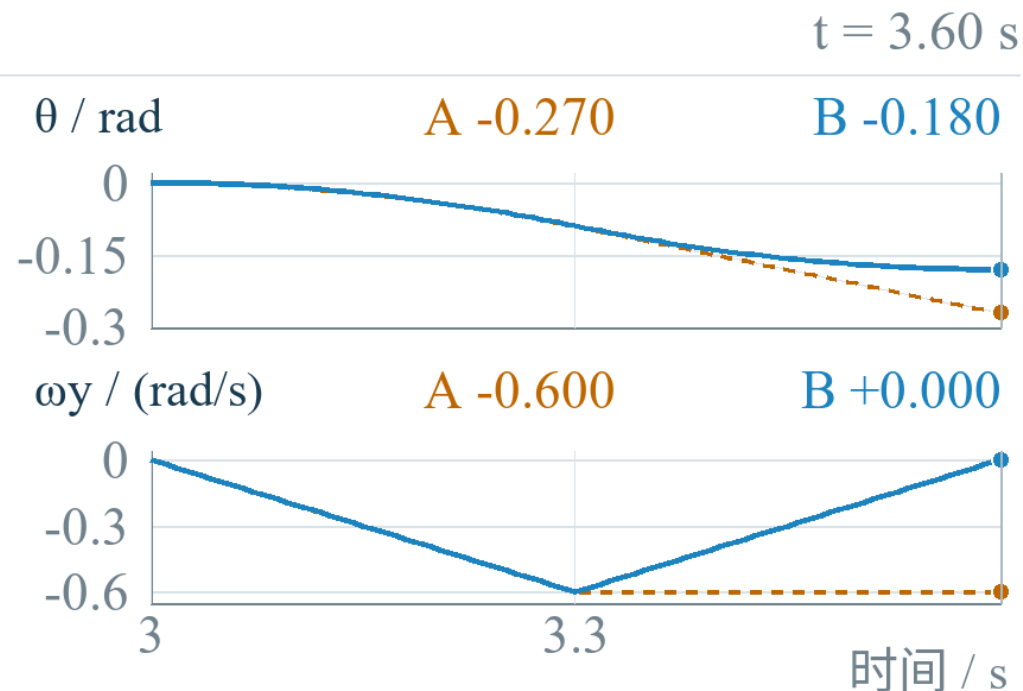


前 4.9 N 后 4.9 N

B 反向制动 $M_y = +0.00 \text{ N}\cdot\text{m}$



前 4.9 N 后 4.9 N



图：相同初态下，撤去力矩仍会转动；反向力矩使角速度归零。

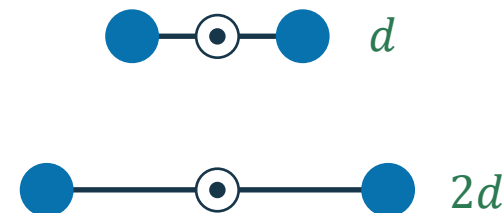
保持某个倾角需要先把角速度减到零。

4.2 刚体动力学与运动求解

4.2.2 差动推力与转动：惯量、主轴与正定性

惯量矩阵记录质量分布，决定转动的难易

- **惯量的意义：** J 由质量相对质心的分布决定，单位为 $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ 。绕 x 轴时，质量离轴的垂直距离越大， J_x 越大（质点离轴距离加倍，其惯量变为4倍）；同样力矩产生的角加速度越小。



$$J = \int [(\boldsymbol{\rho}^T \boldsymbol{\rho})I - \boldsymbol{\rho} \boldsymbol{\rho}^T] dm, \quad J_{xx} = \int (\rho_y^2 + \rho_z^2) dm$$

图：等质量移远

- **对称与主轴：** J 为对称矩阵，有六个独立量；非对角项含 $-\int \rho_x \rho_y dm$ 等质量乘积。选在惯量主轴上可对角化，但机体轴未必与主轴重合。
- **物理约束：**角动量 $\mathbf{H}_b$ 与动能 E_{rot} 由下式给出。 J 正定保证非零转动有正动能；任一主惯量不得大于另外两项之和。

$$\mathbf{H}_b = J \boldsymbol{\omega}_b, \quad E_{\text{rot}} = 1/2 \boldsymbol{\omega}_b^T J \boldsymbol{\omega}_b$$

惯量描述质量如何分布，决定角动量、转动能量与角加速度。

4.2 刚体动力学与运动求解

4.2.2 差动推力与转动：角动量定理

欧拉动力学为何含有角动量耦合项

- **建模前提：**机体系原点在质心，质量分布不变， J 为常量。 $\omega_b = [p, q, r]^T$ 分别是绕前、右、下轴的角速度； M_b 为对同一质心取矩的机体系力矩。
- **耦合项的来源：**角动量在地面惯性系中的变化等于外力矩。改用随机体旋转的坐标描述时，既有分量本身的变化，也有坐标轴转动带来的变化。

$$M_b = J\dot{\omega}_b + \omega_b \times (J\omega_b)$$

读式：角动量的两项变化

$J\dot{\omega}_b$ ：分量变化

$\omega_b \times (J\omega_b)$ ：坐标旋转

- **主轴形式：**若 J 为对角阵，滚转方程仍含俯仰与偏航角速度的乘积；只有相关角速度为零或对应主惯量相等时，该耦合项才消失。内部转子的额外角动量需另行建模。

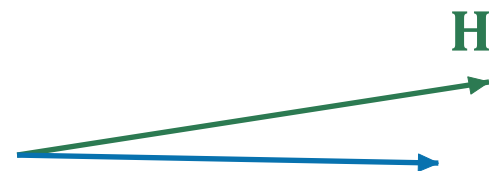
$$J_x \dot{p} = M_x + (J_y - J_z)qr$$

转动方程同时计算外力矩作用与旋转坐标中的角动量耦合。

4.2.2 差动推力与转动：惯性耦合算例

没有外力矩，机体角速度为何仍会改变

- **瞬时题设：** $J = \text{diag}(0.02, 0.03, 0.04) \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $\omega = [1, 2, 3]^T \text{ rad/s}$, 外力矩为零。主惯量不同，使角动量 $H = J\omega$ 与角速度不平行。



夹角约 9.9° ，不平行

- **逐项计算：** $H = [0.02, 0.06, 0.12]^T$; $\omega \times H = [0.06, -0.06, 0.02]^T \text{ N} \cdot \text{m}$ 。再逐轴除以惯量并取负：

$$\dot{\omega}_b = -J^{-1}(\omega_b \times J\omega_b) = [-3, 2, -0.5]^T \text{ rad/s}^2$$

- **守恒量：** 惯性空间中的角动量不变，机体轴上的分量可以变化。转动动能为 0.25 J ，且 $\dot{E}_{\text{rot}} = \omega^T \dot{M} = 0$ 。

$$E_{\text{rot}} = 1/2 (0.02 \times 1^2 + 0.03 \times 2^2 + 0.04 \times 3^2) = 0.25 \text{ J}$$

无外力矩守恒的是惯性空间角动量，不是每个机体系角速度分量。



4.2 刚体动力学与运动求解



本章目录

刚体动力学与运动求解

第四章 载具运动建模与仿真

4.1 运动建模基础与运动学

4.2 刚体动力学与运动求解

4.3 动力单元、受力与观测建模

4.4 配平、线性化与动态系统基础

4.5 多旋翼模型逐步编程与仿真

4.6 参数测量与静态模型辨识

4.7 动态系统辨识、验证与模型修正

4.8 典型无人载具建模与扩展

4.9 建模工具、代码生成与模型部署

4.10 API与SDK建模接口

4.11 例程体系与综合实践

4.12 习题案例分析与课程设计

本节 5 个教学单元

4.2.1 悬停与升降

教材对应：第4.1.4.1节（平移方程）

4.2.2 差动推力与转动

教材对应：第4.1.4.1节（转动方程）

4.2.3 倾斜与三维动力学

教材对应：第4.1.3.2节、第4.1.4.1节

4.2.4 连续方程与数值积分

前向欧拉、步长误差与数值稳定

4.2.5 解析核验与练习

用平衡、单轴转动与误差归因核验模型



4.2 刚体动力学与运动求解

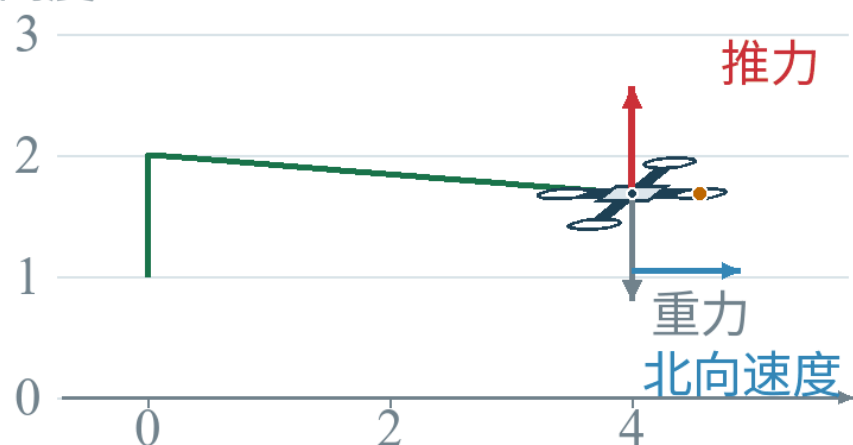
4.2.3 倾斜与三维动力学：运动现象

倾斜产生平移，回平以后仍会漂移

机身已回平：已有速度仍然保留

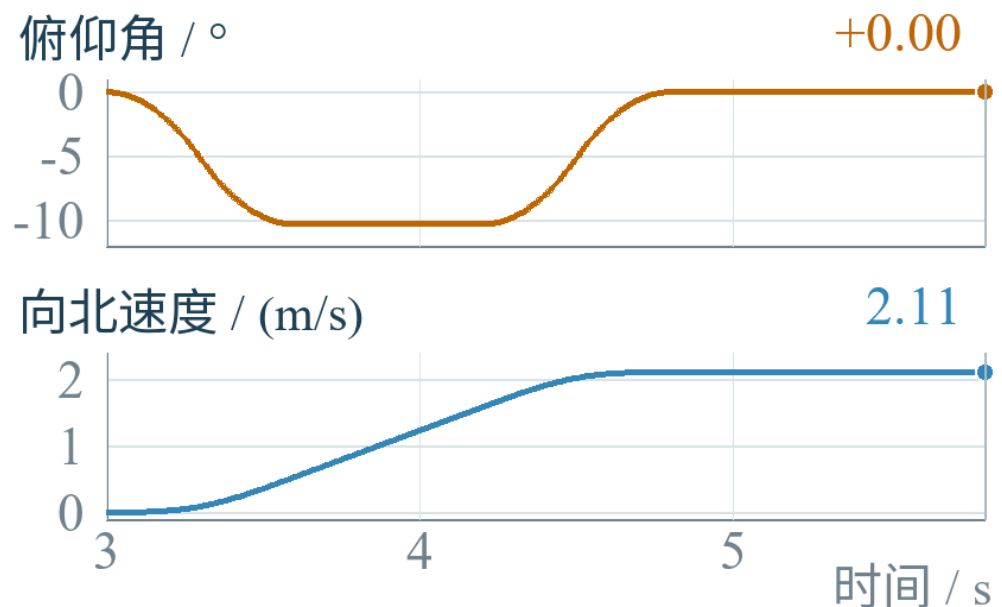
总推力 19.6 N 俯仰力矩 +0.00 N·m

高度 / m



俯仰角：+0.0°

北向位置 / m



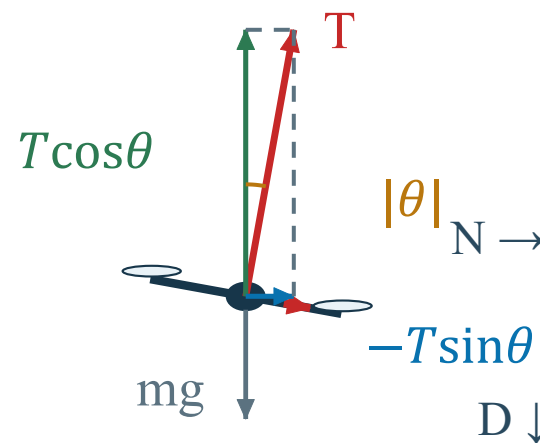
图：本算例阻力为零，回平后水平合力为零，飞机继续向北匀速漂移。

姿态决定推力方向，平移速度还取决于此前的受力过程。

4.2.3 倾斜与三维动力学：推力的坐标转换

机体推力怎样分解为地面方向的力

- **符号：** b/e 为机体/地面， N/D 为北/下； $F_{ng,b}$ 是本例仅含推力的非重力合力。 R 把机体方向转到地面。
- **俯仰平面：** 滚转、偏航为零。图中推力的两个分量再与向下重力合成；换坐标只改变表达，不增加推力。
- 代入 19.6 N 与 -0.18 rad ，北向加速度约 1.75 m/s^2 ，向下约 0.158 m/s^2 ，竖直推力已不足。



图：同一推力的正交分解

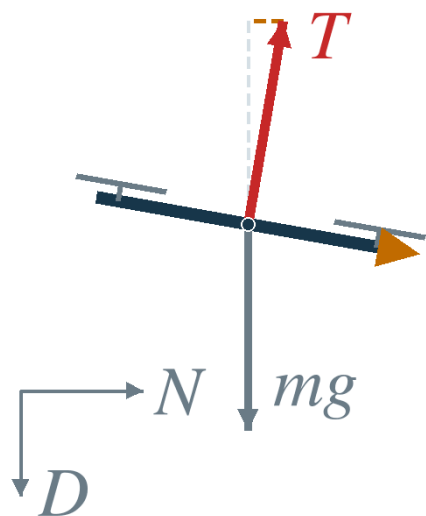
$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{ng,b} &= [0, 0, -T]^T, & \mathbf{F}_{ng,e} &= R \mathbf{F}_{ng,b} \\ a_N &= -\frac{T}{m} \sin \theta, & a_D &= g - \frac{T}{m} \cos \theta \end{aligned}$$

同一推力随姿态改变方向，因此同时影响水平运动和高度。

4.2 刚体动力学与运动求解

4.2.3 倾斜与三维动力学：瞬时受力扫描

推力保持19.6 N，下俯使北向与向下加速度增大



$$T = 19.6 \text{ N}$$

$$\theta = -10.0^\circ$$

机头下俯

$$a_N = +1.702 \text{ m/s}^2$$

$$a_D = +0.149 \text{ m/s}^2$$

瞬时加速度

向北
向下加速度

动图：下俯0至 -10° 的瞬时加速度（教学算例）

- **扫描条件：** $m = 2 \text{ kg}$ 、 $T = 19.6 \text{ N}$ ，俯仰角 θ 从0转到 -10° （机头下俯），每个角度只求瞬时加速度。

$$a_N = -\frac{T}{m} \sin \theta, \quad a_D = g - \frac{T}{m} \cos \theta$$

- **读图：** $\theta = -10^\circ$ 时，
 $a_N \approx +1.70 \text{ m/s}^2$ ，向北；
 $a_D \approx +0.149 \text{ m/s}^2$ ，向下。
 倾角越大，北向加速度越大，竖直推力越不足。

瞬时受力扫描说明方向变化，不代表已积分出飞行轨迹。

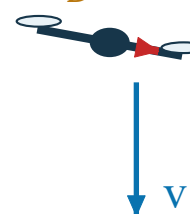
4.2.3 倾斜与三维动力学：高度保持的条件

倾斜时保持高度还需要满足速度条件

- **倾斜保高：**仍取 -0.18 rad 倾角。推力竖直分量等于重力时只消除竖直加速度，已有下降速度仍会保留。
- **制动条件：**先让向上分力大于重力，把下降速度减到零，再恢复平衡推力，才能保持高度。
- **水平耦合：**增推力也增大水平加速；位置目标需结合速度与姿态选择输入。

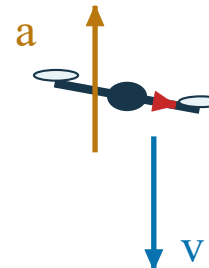
平衡力

$$a_D = 0$$



仍会下降

先制动



下降减速

图：平衡力不等于零速度

$$T \cos \theta = mg \quad \Rightarrow \quad T = \frac{mg}{\cos \theta} \approx 19.92 \text{ N} \quad (\theta = -0.18 \text{ rad})$$

维持高度同时要求竖直合力为零、竖直速度为零。

4.2.3 倾斜与三维动力学：机体子系统信号链

执行器、环境、受力与机身怎样连接

执行器 → 力与力矩 → 机身

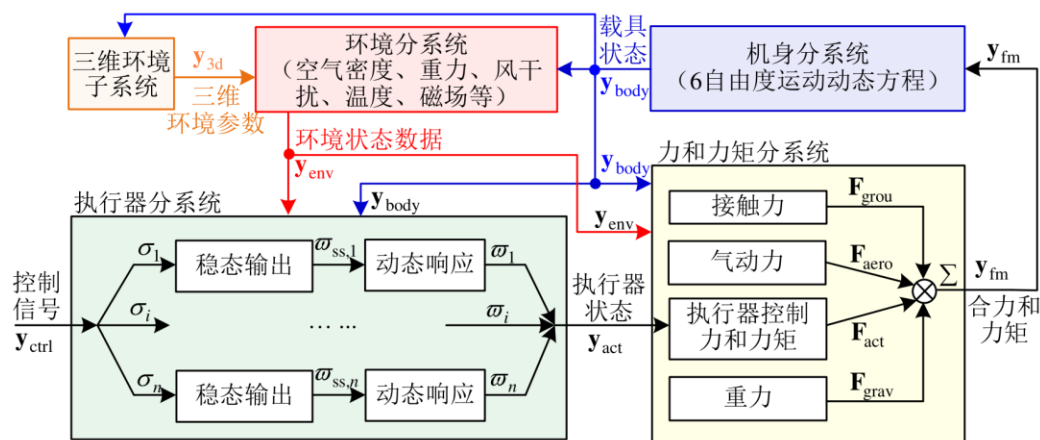


图4.8 机体子系统连接关系

- **执行器与环境：**执行器分系统由控制指令求实际转速；环境分系统由机身状态和三维环境子系统给出风、重力等环境量。
- **力和力矩分系统：**汇合执行器、环境与机身状态，算出推进力、气动力、接触力与重力的合力合矩。
- **机身与反馈：**机身分系统由合力合矩更新运动状态，再反馈给执行器、环境和受力计算。图中重力已并入总合力。

执行器与环境产生作用，机身状态又参与下一次受力计算。

4.2 刚体动力学与运动求解

4.2.3 倾斜与三维动力学：图4.8局部放大（执行器与受力）

执行器把指令变成转速，四项力在求和点汇合

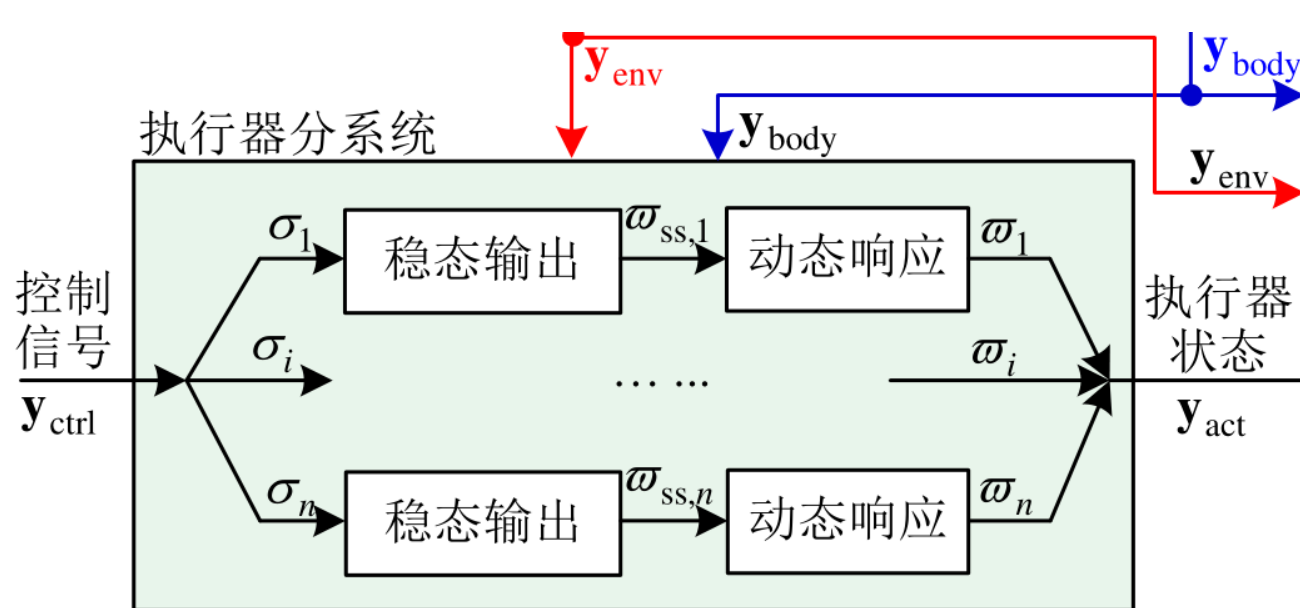


图4.8（局部）执行器分系统

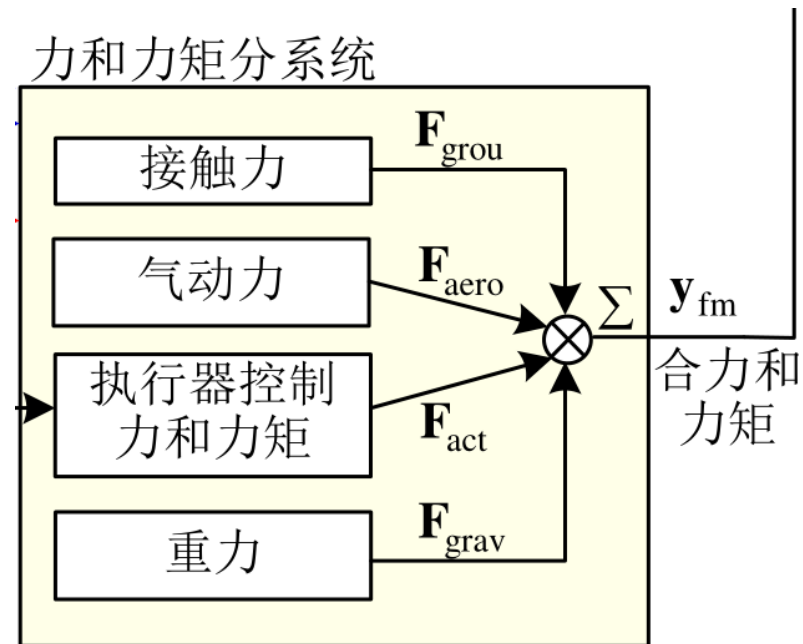


图4.8（局部）力和力矩分系统

- **读图：** σ_i 经“稳态输出→动态响应”得转速 ω_i ；四项力在 Σ 处相加，输出 y_{fm} 。

4.2 刚体动力学与运动求解

4.2.3 倾斜与三维动力学：图4.8局部放大（环境与反馈）

机身状态同时反馈给环境、执行器和受力计算

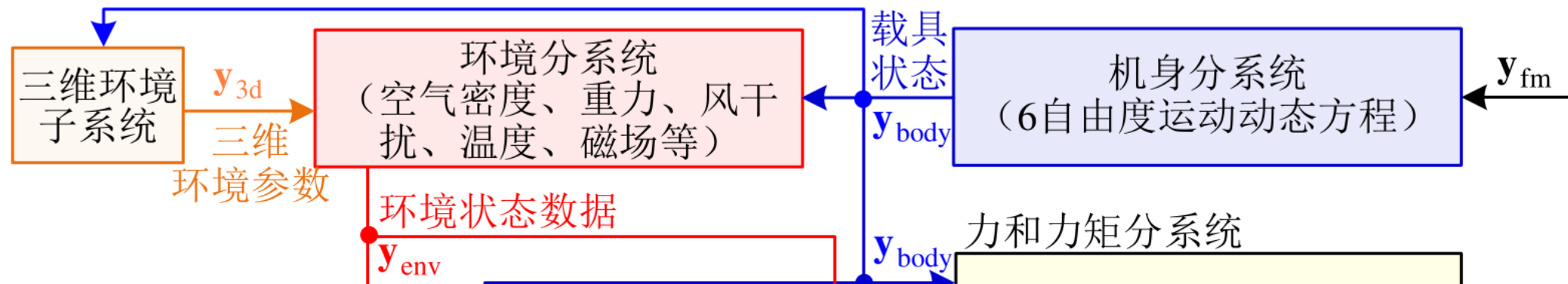


图4.8（局部）环境、三维环境与机身反馈

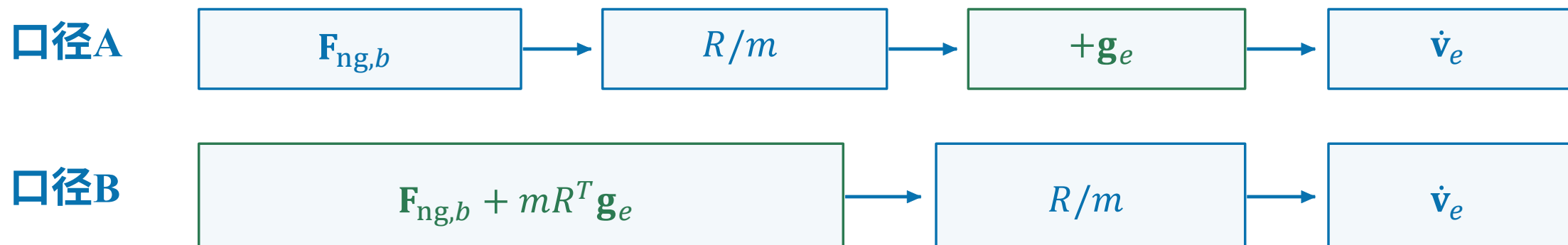
- **三维环境子系统：**输出三维环境参数 y_{3d} ，只送入环境分系统。
- **环境分系统：**由 y_{3d} 和载体状态 y_{body} 算出风、重力等环境状态数据 y_{env} ，送往执行器与受力计算。
- **机身分系统：**用合力合矩 y_{fm} 解6自由度运动方程，新的 y_{body} 送回其余三个分系统。

4.2 刚体动力学与运动求解

4.2.3 倾斜与三维动力学：重力口径的两条等价路径

同一份重力，可以放在受力端或加速度端

- **共同输入：**非重力合力包含推进、气动力（含阻力）与接触力。教材图4.8采用口径B（总力口径）；只有入门基准才把阻力取零。



图：同一重力、两个入口、相同结果

- **自由落体核对：**撤去全部非重力力，均得 $a_D = 9.8 \text{ m/s}^2$ 。若得19.6，通常重复计入重力；若得0，则可能漏加重力。

两条路径给出相同加速度，每条路径中重力只出现一次。

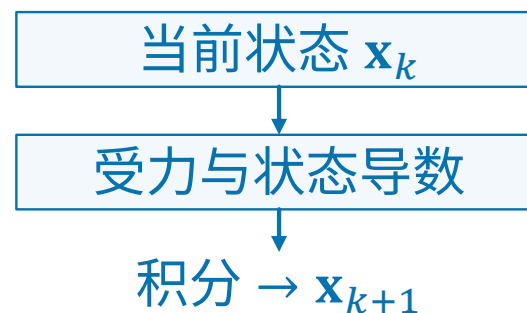
4.2 刚体动力学与运动求解

4.2.3 倾斜与三维动力学：六自由度状态模型

把运动学与动力学组成连续状态方程

- **适用条件：**局部NED视为惯性系，机体原点在质心，质量 m 与惯量 J 恒定。

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}_e &= \mathbf{v}_e \\ \dot{\mathbf{v}}_e &= \mathbf{g}_e + R(\mathbf{q})\mathbf{F}_{\text{ng},b}/m \\ \dot{\mathbf{q}} &= 1/2 \mathbf{q} \otimes [0, \boldsymbol{\omega}_b^T]^T \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_b &= J^{-1}[\mathbf{M}_b - \boldsymbol{\omega}_b \times (J\boldsymbol{\omega}_b)]\end{aligned}$$



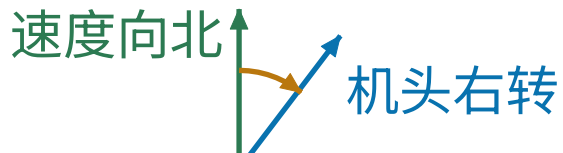
图：同一时刻统一求导

- **输入与导数：** $\mathbf{F}_{\text{ng},b}$ 汇总含阻力的非重力外力， $\mathbf{M}_b$ 汇总含旋转阻尼的质心外力矩； $R(\mathbf{q})$ 将机体分量转到地面。四组方程推进位置、速度、姿态和角速度。
- **状态数量：**刚体保存13个数，只有12个独立状态；执行器或传感器若另有动态，也按同一时刻求导并同步推进。

运动学连接状态，动力学给出加速度，子系统决定真实力与力矩。

4.2.3 倾斜与三维动力学：旋转坐标求导

机体系速度导数为什么多出一个叉乘项

- **乘积求导：** $\mathbf{v}_e = R\mathbf{v}_b$ 的分量和坐标轴都在变化；代入 $\dot{R} =$  速度向北
 $R[\boldsymbol{\omega}_b]_{\times}$ 后得到：

$$\dot{\mathbf{v}}_e = \dot{R}\mathbf{v}_b + R\dot{\mathbf{v}}_b = R(\boldsymbol{\omega}_b \times \mathbf{v}_b + \dot{\mathbf{v}}_b)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_b = \mathbf{F}_{\text{ng},b}/m + R^T \mathbf{g}_e - \boldsymbol{\omega}_b \times \mathbf{v}_b$$

- **物理意义：** 最后一项来自坐标转动，不是新增外力。地面速度恒定时，机体系的前向、侧向分量仍会变化。
- **瞬时检查：** 机体与NED暂时对齐，地面速度北向10 m/s，机体以1 rad/s右偏航，此时 $\dot{\mathbf{v}}_b = [0, -10, 0]^T \text{ m/s}^2$ 。

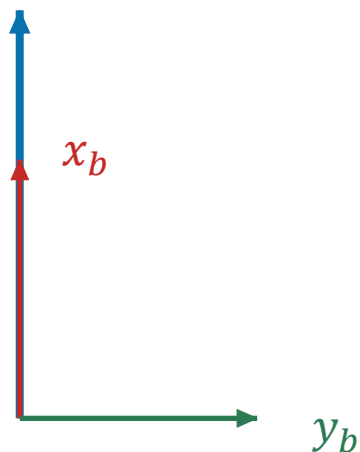
机体系分量的变化同时来自真实加速度与坐标轴转动。

4.2 刚体动力学与运动求解

4.2.3 倾斜与三维动力学：图解与核验

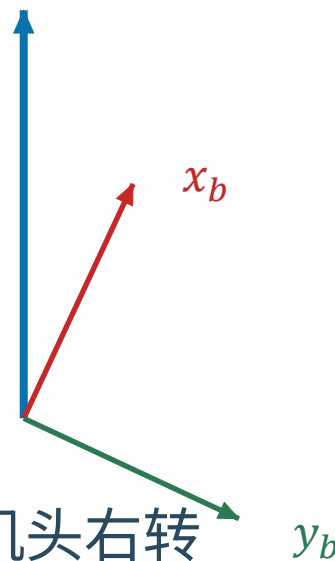
速度仍向北，机头右转后分量怎样变

北向速度 10 m/s



初始对齐

北向速度 10 m/s



稍后机头右转

初始瞬间： $\dot{\mathbf{v}}_e = 0$ ， $\dot{\mathbf{v}}_b = [0, -10, 0]^T \text{ m/s}^2$

图：固定地面速度与转动机体坐标轴

地面速度不变时，机体系分量仍会因坐标轴转动而变化。

4.2.3 倾斜与三维动力学：组合算例（地面系）

机头朝东的瞬时算例：先求地面系导数

- **瞬时算例：** $m = 2 \text{ kg}$, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$,
 $J = \text{diag}(0.02, 0.03, 0.04) \text{ kg}\cdot\text{m}^2$; 水平朝东, $\mathbf{v}_b = [2, 0, 0]^T \text{ m/s}$,
 $\boldsymbol{\omega}_b = [0, 0, 1]^T \text{ rad/s}$.
- **输入：** $\mathbf{F}_{\text{ng},b} = [2, 0, -19.6]^T \text{ N}$, $\mathbf{M}_b = [0, 0, 0.08]^T \text{ N}\cdot\text{m}$ 。竖直力抵消重力，前向力成为东向力。

速度向东



前向力 2 N



$$R = R_z(90^\circ) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **姿态：** 偏航 90° ，机体前向指向东、右向指向南； R 把机体分量转到NED。

$$\dot{\mathbf{r}}_e = R\mathbf{v}_b = [0, 2, 0]^T \text{ m/s}, \quad \dot{\mathbf{v}}_e = \mathbf{g}_e + R\mathbf{F}_{\text{ng},b}/m = [0, 1, 0]^T \text{ m/s}^2$$

- **结论：** 地面系中飞机以 2 m/s 向东运动，并以 1 m/s^2 向东加速，竖直合力为零。

4.2 刚体动力学与运动求解

4.2.3 倾斜与三维动力学：组合算例（机体系）

同一瞬间的机体系速度、角速度与姿态导数

• **同一瞬时算例：** $J = \text{diag}(0.02, 0.03, 0.04) \text{ kg} \cdot \text{m}^2$,

$\mathbf{v}_b = [2, 0, 0]^T \text{ m/s}$, $\boldsymbol{\omega}_b = [0, 0, 1]^T \text{ rad/s}$;

$\mathbf{F}_{\text{ng},b} = [2, 0, -19.6]^T \text{ N}$, $\mathbf{M}_b = [0, 0, 0.08]^T \text{ N} \cdot \text{m}$.

$$\boldsymbol{\omega}_b \times \mathbf{v}_b = [0, 2, 0]^T \text{ m/s}^2, \quad \boldsymbol{\omega}_b \times (J\boldsymbol{\omega}_b) = \mathbf{0}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_b &= \mathbf{F}_{\text{ng},b}/m + R^T \mathbf{g}_e - \boldsymbol{\omega}_b \times \mathbf{v}_b \\ &= [1, 0, -9.8]^T + [0, 0, 9.8]^T - [0, 2, 0]^T = [1, -2, 0]^T \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_b = J^{-1}[\mathbf{M}_b - \boldsymbol{\omega}_b \times (J\boldsymbol{\omega}_b)] = [0, 0, 2]^T \text{ rad/s}^2$$

• **姿态：** 令 $c = \sqrt{2}/2$, $\mathbf{q} = [c, 0, 0, c]^T$, $\dot{\mathbf{q}} = [-c/2, 0, 0, c/2]^T \text{ s}^{-1}$ 。以上均为同一瞬间；负侧向导数来自坐标转动。

速度向东



前向力 2 N



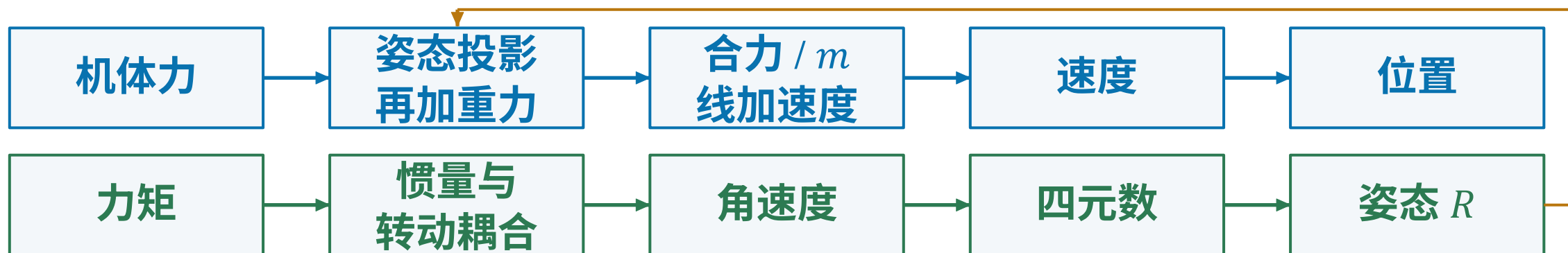
同一运动在两个坐标系中分量不同，但转换后的物理结果必须一致。

4.2 刚体动力学与运动求解

4.2.3 倾斜与三维动力学：耦合链回顾

把“姿态、受力、运动”连成一条可计算链

姿态决定力的空间方向



图：运动学与动力学的两条耦合链

- **统一口径：** R 把 FRD 分量转入 NED；重力只计一次。机体系速度求导与非球形惯量转动保留各自耦合项。
- **实现与验证：** 初态、参数、输入和积分法共同决定轨迹；解析算例查基本响应，步长对比查数值误差，实测数据判断模型精度。

先统一坐标和物理口径，再用完整方程与可解释算例建立模型。



4.2 刚体动力学与运动求解



本章目录

刚体动力学与运动求解

第四章 载具运动建模与仿真

4.1 运动建模基础与运动学

4.2 刚体动力学与运动求解

4.3 动力单元、受力与观测建模

4.4 配平、线性化与动态系统基础

4.5 多旋翼模型逐步编程与仿真

4.6 参数测量与静态模型辨识

4.7 动态系统辨识、验证与模型修正

4.8 典型无人载具建模与扩展

4.9 建模工具、代码生成与模型部署

4.10 API与SDK建模接口

4.11 例程体系与综合实践

4.12 习题案例分析与课程设计

本节 5 个教学单元

4.2.1 悬停与升降

教材对应：第4.1.4.1节（平移方程）

4.2.2 差动推力与转动

教材对应：第4.1.4.1节（转动方程）

4.2.3 倾斜与三维动力学

教材对应：第4.1.3.2节、第4.1.4.1节

4.2.4 连续方程与数值积分

前向欧拉、步长误差与数值稳定

4.2.5 解析核验与练习

用平衡、单轴转动与误差归因核验模型



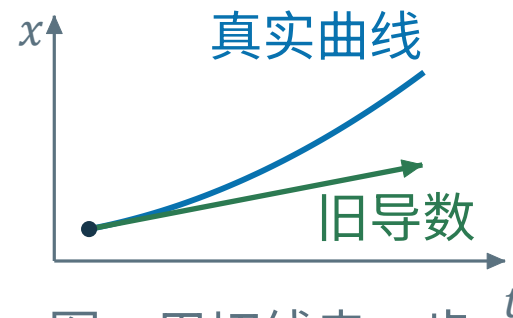
4.2.4 连续方程与数值积分：前向欧拉方法

连续方程怎样变成离散时刻的计算

- **离散计算：**计算机按步长 h 保存状态；相邻时刻间的连续变化由状态导数确定，再用积分公式近似推进。

$$\mathbf{x}(t+h) = \mathbf{x}(t) + \int_t^{t+h} f(\mathbf{x}(\tau), \tau) d\tau$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + hf(\mathbf{x}_k, t_k), \quad t_k = kh$$



图：用切线走一步

- **同步更新：**先用同一时刻的全部旧状态计算，再一次性写入新状态。若先更新速度，再用新速度更新位置，就改变了前向欧拉算法，其误差也不同。
- **误差来源：**对足够光滑的方程，欧拉单步局部误差为 $O(h^2)$ ，固定时间内累计误差通常为 $O(h)$ 。减小步长可改善近似，但不能补救坐标方向、参数单位或受力方程错误。

离散算法近似连续积分；更新时刻和步长共同决定数值误差。

4.2 刚体动力学与运动求解

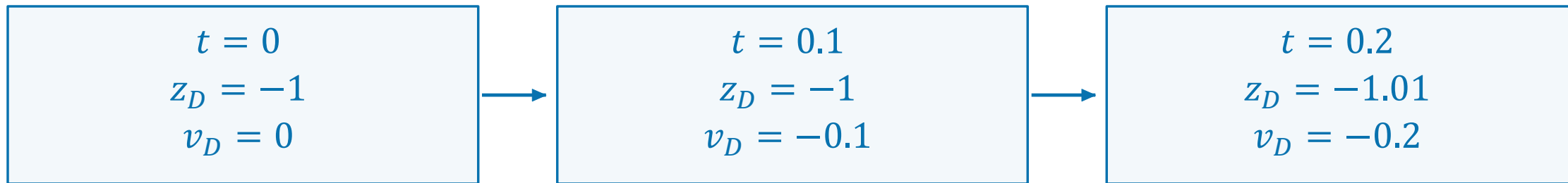
4.2.4 连续方程与数值积分：手算两步

一次状态更新怎样变成一段运动

- **计算条件：**升降段开始时 $z_D = -1$ m、 $v_D = 0$ ，总推力21.6 N，故 $a_D = -1$ m/s²。取步长 $\Delta t = 0.1$ s，用前向欧拉计算。

$$z_{D,k+1} = z_{D,k} + \Delta t v_{D,k}, \quad v_{D,k+1} = v_{D,k} + \Delta t a_{D,k}$$

两个递推式都先读同一份旧状态，再同时写回。

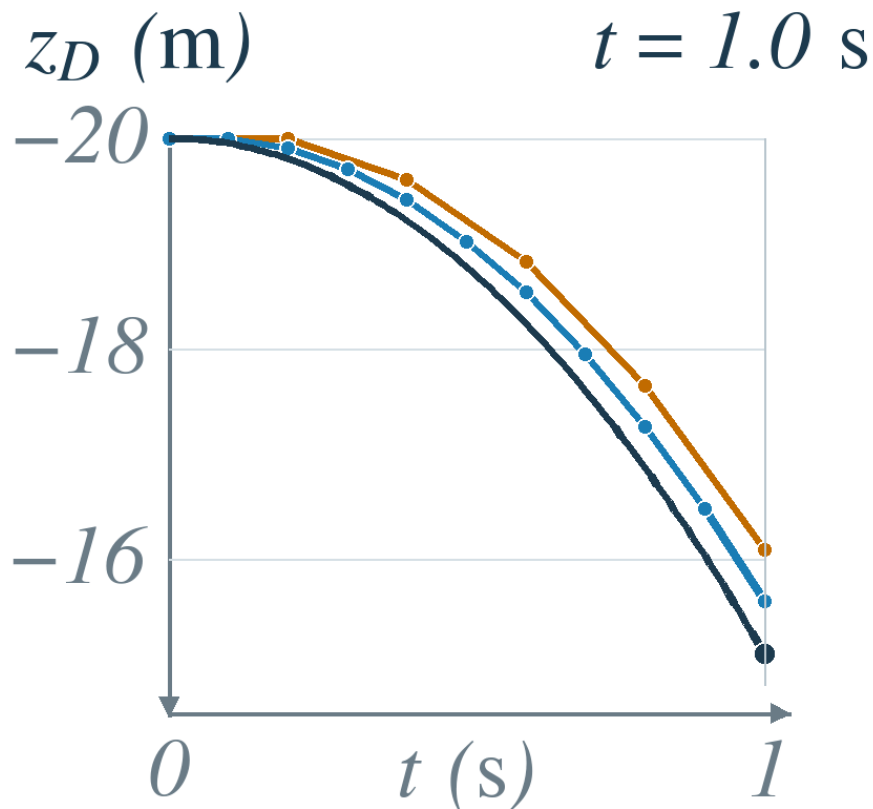


图：首步用旧速度0，数值位置未变；连续解已升0.005 m。

- **一秒核对：** $h = 0.1$ s时升高0.45 m， $h = 0.01$ s时升高0.495 m，解析值为0.5 m。两种步长速度终点相同，位置误差随步长减小。

4.2.4 连续方程与数值积分：解析解与步长误差

自由落体：速度算对了，位置误差随步长减半



解析解
-15.10

$h = 0.1$
-15.59

$h = 0.2$
-16.08

1 s 终点比较

步长	位置 / m	少下落 / m
解析解	-15.10	0
0.1 s	-15.59	0.49
0.2 s	-16.08	0.98

速度终点均为 9.8 m/s

恒加速时速度采样值准确；
位置用旧速度推进，
因而少下落：

$$z_E(t) - z(t) = -4.9 t h$$

动图：从 -20 m 自由下落，解析解与两种步长

4.2 刚体动力学与运动求解

4.2.4 连续方程与数值积分：姿态积分误差

四元数归一化只恢复约束，不会消除转角误差

- **计算设置：** $\mathbf{q}(0) = [1, 0, 0, 0]^T$ ，恒定 $\boldsymbol{\omega}_b = [0, 0, \pi/2]^T \text{ rad/s}$ ，以 $h = 0.1 \text{ s}$ 前向欧拉积分 1 s。未归一化的四元数范数增至 1.031225，已不满足姿态表示的单位约束。

$$\tilde{\mathbf{q}}_{k+1} = \mathbf{q}_k + h/2 \mathbf{q}_k \otimes [0, \boldsymbol{\omega}_b^T]^T, \quad \mathbf{q}_{k+1} = \tilde{\mathbf{q}}_{k+1} / \|\tilde{\mathbf{q}}_{k+1}\|$$

- **归一化效果：** 每步除以范数可恢复单位长度；末步偏航 89.815627° ，比解析 90° 少 0.184373° 。转角误差来自离散积分，仍受步长影响。
- **改进方法：** 恒定机体角速度时，可用单位四元数表示一步有限转角，准确推进姿态；构造式见课件 4.1 「单轴旋转与有限增量」 页，时变角速度仍须近似。

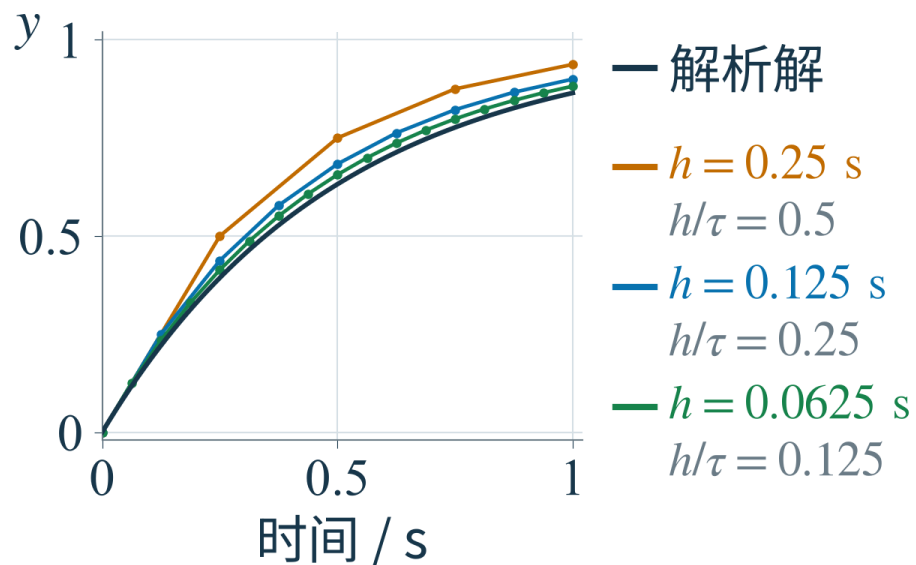


图：偏航角局部放大

单位范数保证四元数合法，姿态精度还取决于积分方法与步长。

4.2.4 连续方程与数值积分：动态响应精度

一阶环节：步长应怎样对应模型的时间尺度



图：步长与一阶响应精度（教学算例）

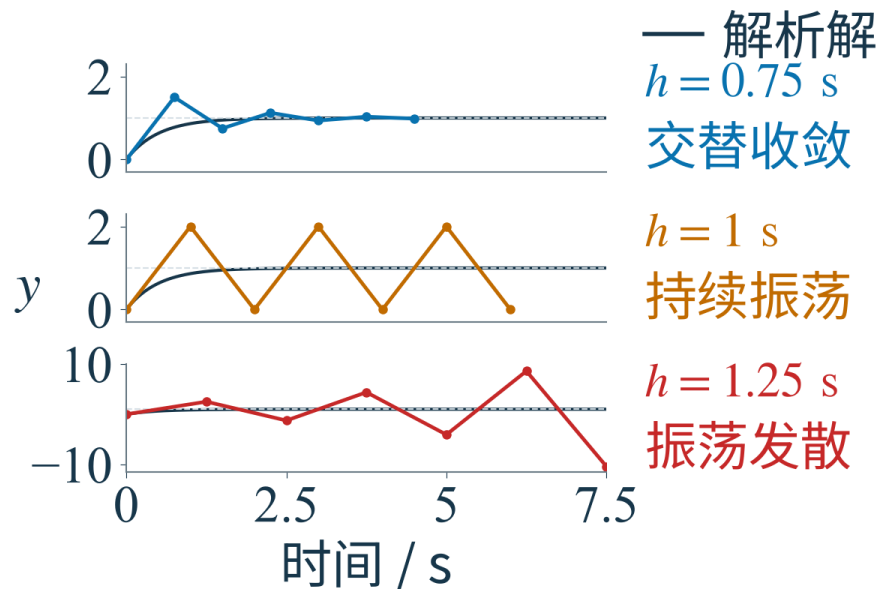
- **条件：** $\tau \dot{y} + y = u$, $\tau = 0.5$ s, 初值0, 输入阶跃至1; 时间常数决定响应快慢。
- **读图：** 1 s时解析值为0.8647; 步长0.25、0.125、0.0625 s的欧拉值依次为0.9375、0.8999、0.8819。
- **选步长：** 误差依次为0.073、0.035、0.017, 约与步长成正比。稳定只需 $h < 2\tau$, 精度再按允许误差反推步长。

$$y_{k+1} = y_k + (h/\tau)(1 - y_k), \quad y(t) = 1 - e^{-t/\tau}$$

模型时间尺度决定“变化有多快”，允许误差决定步长需要多小。

4.2.4 连续方程与数值积分：欧拉法稳定范围

物理系统稳定，数值递推也可能振荡发散



图：欧拉递推的三种响应（教学算例）

- **误差机制：**初值0、单位阶跃下，令 $e_k = y_k - 1$ ，每步误差乘 $1 - h/\tau$ ；绝对值小于1才衰减，故 $0 < h < 2\tau$ 。
- **读图：**取 $\tau = 0.5 \text{ s}$ ，三种步长对应误差乘数 -0.5 、 -1 、 -1.5 ，分别交替收敛、持续振荡和发散；各小图纵轴量程不同。
- **物理解释：**连续解单调稳定；振荡来自数值递推。稳定只是底线，还需按允许误差选步长。

$$e_{k+1} = (1 - h/\tau)e_k, \quad |1 - h/\tau| < 1$$

积分步长会引入数值振荡；数值稳定也不等于精度足够。



4.2 刚体动力学与运动求解



本章目录

刚体动力学与运动求解

第四章 载具运动建模与仿真

4.1 运动建模基础与运动学

4.2 刚体动力学与运动求解

4.3 动力单元、受力与观测建模

4.4 配平、线性化与动态系统基础

4.5 多旋翼模型逐步编程与仿真

4.6 参数测量与静态模型辨识

4.7 动态系统辨识、验证与模型修正

4.8 典型无人载具建模与扩展

4.9 建模工具、代码生成与模型部署

4.10 API与SDK建模接口

4.11 例程体系与综合实践

4.12 习题案例分析与课程设计

本节 5 个教学单元

4.2.1 悬停与升降

教材对应：第4.1.4.1节（平移方程）

4.2.2 差动推力与转动

教材对应：第4.1.4.1节（转动方程）

4.2.3 倾斜与三维动力学

教材对应：第4.1.3.2节、第4.1.4.1节

4.2.4 连续方程与数值积分

前向欧拉、步长误差与数值稳定

4.2.5 解析核验与练习

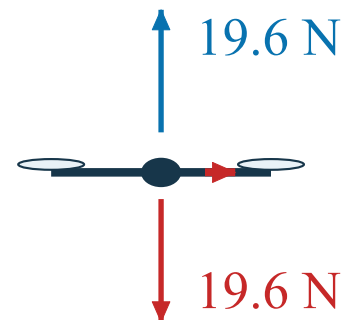
用平衡、单轴转动与误差归因核验模型



4.2.5 解析核验与练习：零导数与恒力矩

平衡与单轴转动给出两组可手算基准

- **平衡基准：** $m = 2 \text{ kg}$ 、 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ ，初始水平静止、角速度为零。向上19.6 N且合力矩为零时，全部状态导数为零。
- **扰动：** 推力增加0.4 N，得 $a_D = -0.2 \text{ m/s}^2$ 。平衡点导数为零，不代表受扰后能返回。
- **单轴基准：** 另设 $J_x = 0.02 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 、 $M_x = 0.04 \text{ N} \cdot \text{m}$ ，初角与角速度均为零。只绕一个主轴转动时，耦合项消失。



$$\dot{p} = 2 \text{ rad/s}^2, \quad p(0.5) = 1 \text{ rad/s}, \quad \phi(0.5) = 0.25 \text{ rad}$$

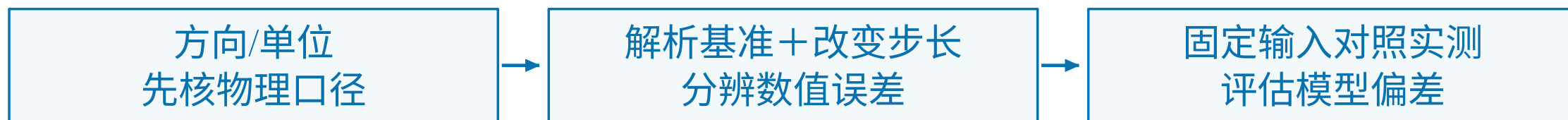
- **练习：** 推力改为18 N时如何运动？把惯量和力矩同时乘1.5，单轴响应为何不变？

先用能手算的平衡与单轴情形，确认符号、单位和基本响应。

4.2.5 解析核验与练习：误差的物理归因

怎样从结果判断错误来自方程还是积分

- **方向与单位：**自由落体向上加速，说明NED符号或重力方向有误； 19.6 m/s^2 常见于重力重复。将度每秒误作弧度每秒会引入约57.3倍误差，缩小步长无法修复。
- **数值误差：**同一解析算例的终点误差随步长减半近似减半，符合欧拉法的一阶收敛。若误差不减，应继续区分方程、输入时刻、参考解和浮点精度的影响。
- **模型误差：**准确积分不能弥补漏掉的阻力、错误质量或执行器动态。比较实测轨迹时，应统一输入、参数和时间，再判断差异来自哪一层。



图：先物理、再数值、后实测；本节算例均为离线数值计算

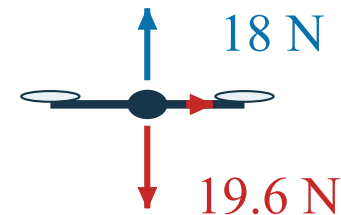
先用物理方向和解析答案定位问题，再讨论积分精度与模型逼真度。

4.2.5 解析核验与练习：练习参考要点

参考要点：推力不足与惯量、力矩同比放大

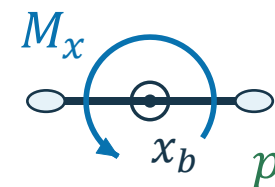
- **第1问：**水平静止载具质量2 kg， $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ ，仅有向上18 N推力和重力。推力比重力少1.6 N，所以向下加速：

$$a_D = 9.8 - 18/2 = 0.8 \text{ m/s}^2$$



图：平移与单轴转动

- **第2问（同乘1.5）：** $J_x = 0.03 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 、 $M_x = 0.06 \text{ N} \cdot \text{m}$ ，仅绕 x 主轴，从静止开始；0.5 s后结果与原题相同：



$$\dot{p} = 0.06/0.03 = 2 \text{ rad/s}^2, \quad p(0.5) = 1 \text{ rad/s}, \quad \phi(0.5) = 0.25 \text{ rad}$$

- **关键判断：**角加速度由比值决定， $\dot{p} = M_x/J_x$ ；两者同乘1.5后比值仍为2，同一初态下响应不变。该结论只适用于单轴主惯量转动。

响应方向先看净作用，响应大小再由质量或惯量决定。

课堂练习

用新数据检验倾斜受力、四元数一步与步长选择

- **练习1（倾斜受力）**： $m = 2 \text{ kg}$ 、 $T = 20 \text{ N}$ ，机头下俯 $\theta = -0.2 \text{ rad}$ ，滚转与偏航为零。求北向与地向加速度，并判断竖直合力的方向。
- **练习2（四元数一步）**： $\mathbf{q}(0) = [1, 0, 0, 0]^T$ ， $\boldsymbol{\omega}_b = [0, 0, 1]^T \text{ rad/s}$ ，取 $h = 0.2 \text{ s}$ 用前向欧拉走一步。写出 $\mathbf{q}_1$ 和归一化后的偏航角，并与解析值 0.2 rad 比较。
- **练习3（选步长）**：一阶环节 $\tau = 0.2 \text{ s}$ ，步长 h 分别取 0.05 、 0.3 、 0.5 s 。求每步误差乘数，判断哪种单调收敛、交替收敛或发散。
- **提示**：角度一律用弧度；四元数标量在前，增量按 $(h/2) \mathbf{q} \otimes [0, \boldsymbol{\omega}_b^T]^T$ 计算；一阶环节的误差乘数为 $1 - h/\tau$ 。

参考要点

倾斜受力、四元数一步与步长选择的参考要点

- **练习1:** $a_N = -10 \sin(-0.2) = +1.987 \text{ m/s}^2$ (向北) ;
 $a_D = 9.8 - 10 \cos 0.2 \approx -0.0007 \text{ m/s}^2$;
竖直分量略大于重力, 合力微小向上; 高度变化还取决于竖直速度。
- **练习2:** $\mathbf{q}_1 = [1, 0, 0, 0.1]^T$, 范数1.00499, 归一化得 $[0.99504, 0, 0, 0.09950]^T$;
偏航 $2 \arctan 0.1 = 0.19934 \text{ rad}$, 比0.2 rad少0.00066 rad (约0.038°) 。
- **练习3:** 乘数依次为0.75、-0.5、-1.5: 0.05 s单调收敛, 0.3 s交替收敛, 0.5 s发散。
稳定要求 $h < 2\tau = 0.4 \text{ s}$, 精度还要按允许误差继续缩小 h 。

本节小结

从受力到状态推进，再用解析算例分开核验

- **本节方法：**合力除以质量得线加速度，合力矩经欧拉动力学得角加速度； R 把机体力转到NED；四组状态方程在同一时刻求导，再用前向欧拉推进。
- **关键判断：**平衡不等于零速度；零外力矩时机体角速度仍可变化；四元数归一化不保证转角准确；数值稳定不保证精度足够。
- **易错点：**NED的D轴向下，向上取负；重力在口径A或口径B中只计一次；度与弧度不能混用；同一步内先读全部旧状态，再一起写新状态。
- **衔接：**课件4.3把“各桨推力已知”换成动力单元与受力模型；课件4.5把本节四组方程写成程序，并用这里的解析值核对。

先统一坐标与重力口径，再用解析算例和步长对比分开检查模型与积分。