本章目录

刚体动力学与运动求解

第四章 载具运动建模与仿真

4.1 运动建模基础与运动学
4.2 刚体动力学与运动求解
4.3 动力单元、受力与观测建模
4.4 配平、线性化与动态系统基础
4.5 多旋翼模型逐步编程与仿真
4.6 参数测量与静态模型辨识
4.7 动态系统辨识、验证与模型修正
4.8 典型无人载具建模与扩展
4.9 建模工具、代码生成与模型部署
4.10 API与SDK建模接口
4.11 例程体系与综合实践
4.12 习题案例分析与课程设计

本节 5 个教学单元

4.2.1 悬停与升降
教材对应：第4.1.4.1节（平移方程）

4.2.2 差动推力与转动
教材对应：第4.1.4.1节（转动方程）

4.2.3 倾斜与三维动力学
教材对应：第4.1.3.2节、第4.1.4.1节

4.2.4 连续方程与数值积分
前向欧拉、步长误差与数值稳定

4.2.5 解析核验与练习
用平衡、单轴转动与误差归因核验模型

本节导入

先算合力和合矩，再求刚体怎样运动

- **本节输入：**各桨推力及其关于质心的力矩先视为已知。主线参数：$m = 2\,\mathrm{kg}$、$g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$、力臂 $0.25\ \mathrm{m}$、$J_y = 0.05\,\mathrm{kg \cdot m^2}$，悬停推力19.6 N。
- **动力学输出：**牛顿方程求线加速度；欧拉动力学求角加速度，惯性和耦合项不能混用。
- **接回运动学：**线速度更新位置；机体角速度经课件4.1的姿态运动学更新四元数。课件4.5再把本节方程写成程序并逐步仿真。



图：四层运动模型

动力学把外力和力矩转换成状态变化率，运动学再累积成轨迹。

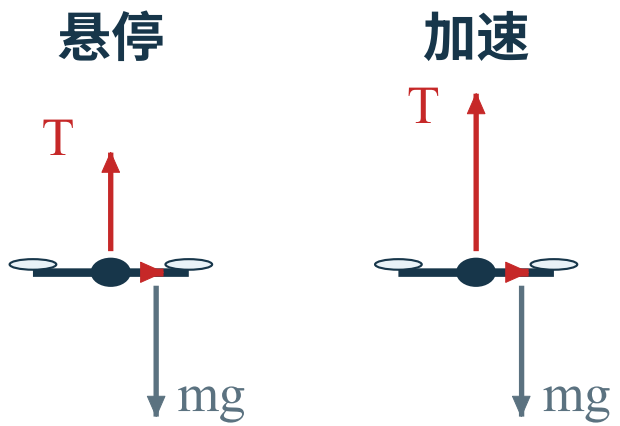
4.2.1 悬停与升降：力到加速度

竖直合力决定速度怎样变化

- **悬停条件：**四桨各4.9 N，$T = mg = 19.6\,\mathrm{N}$；姿态水平、合力矩为零，且速度与角速度都为零，才能保持原位。

- **变化率：**加速度表示速度每秒改变多少，位置导数表示位置每秒改变多少。点号表示时间导数，积分把变化率累积成状态。

- **增大推力：**四桨各5.4 N时，向上净力2 N。除以质量2 kg，得到$a_D = -1\,\mathrm{m/s^2}$（NED的D轴向下，向上为负）。



图：向上推力与向下重力

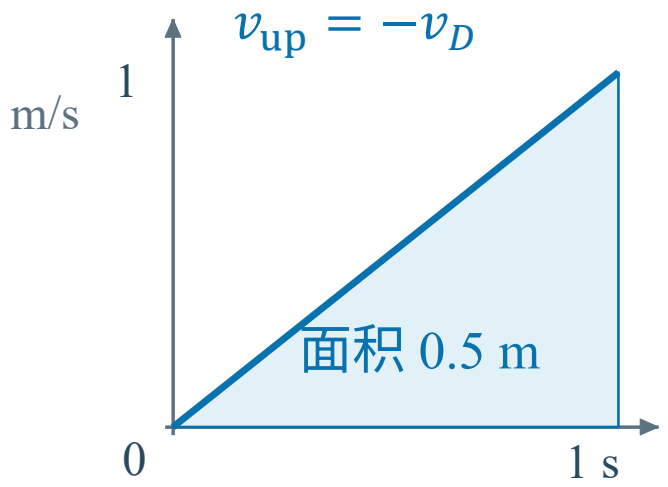
$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4, \qquad a_D = \dot{v}_D = g - \frac{T}{m}, \qquad \dot{z}_D = v_D$$

推力先改变加速度，速度的累计变化再改变高度。

4.2.1 悬停与升降：解析计算与曲线

恒定推力下，一秒钟会上升多少

- **本段从加速开始计时：** $z_D(0) = -1\,\mathrm{m}$、$v_D(0) = 0$；总推力21.6 N，故$a_D = -1\,\mathrm{m/s^2}$。
- **一秒终点：** $v_D = -1\,\mathrm{m/s}$、$z_D = -1.5\,\mathrm{m}$，即高度1.5 m、向上速度1 m/s。
- **位移来自累积：** 图中三角形面积0.5 m就是升高量。解析式仅用于恒加速度；数值结果应随步长缩小而接近它。



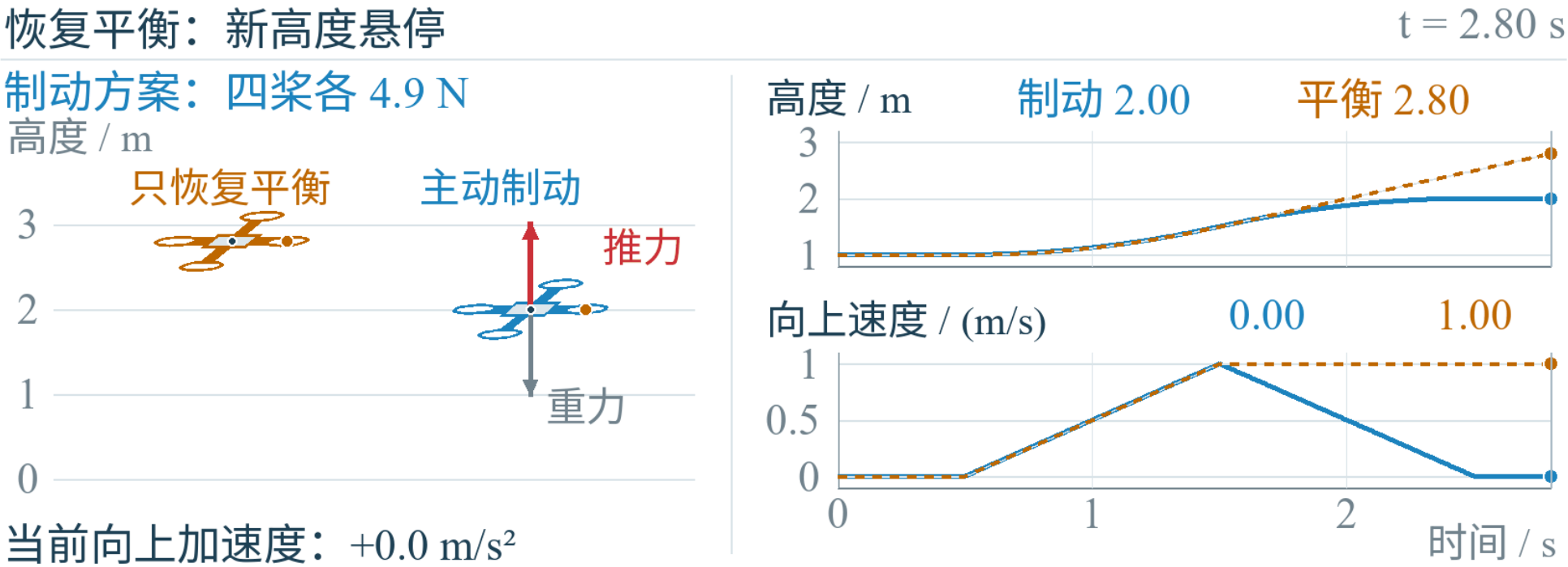
图：速度面积给出位移

$$v_D(t) = v_D(0) + a_D t, \qquad z_D(t) = z_D(0) + v_D(0)t + \frac{1}{2}a_D t^2$$

给定初态与加速度，可以计算任意时刻的速度和位置。

4.2.1 悬停与升降：运动与曲线

升高并停住需要先加速、再减速



图：本算例阻力为零；21.6 N加速、17.6 N制动，提前恢复19.6 N仍会上升。

恢复悬停推力只能消除加速度，停止上升还要先消除速度。

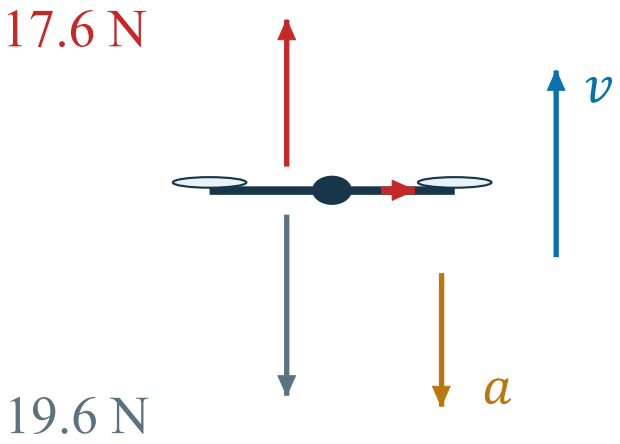
4.2.1 悬停与升降：状态与控制目标

停止上升时，高度和速度都要满足目标

- **承接加速段：**高度1.5 m、向上速度1 m/s。零阻力下恢复$T = 19.6\,\mathrm{N}$只能使合力为零，飞机仍继续上升。

- **制动输入：**本段重新计时。四桨各4.4 N，总推力17.6 N，$a_D = +1\,\mathrm{m/s^2}$；合力与当前速度反向，表示减速。

- 制动1 s仍升高0.5 m；速度归零后恢复19.6 N，停在高度2 m。质量或扰动变化需用状态反馈修正。



图：仍上升，但向下加速

$$v_{D,\mathrm{end}} = -1 + 1 \times 1 = 0\ \mathrm{m/s}, \qquad \Delta z_D = -1 \times 1 + \frac{1}{2} \times 1 \times 1^2 = -0.5\ \mathrm{m}$$

运动模型预测响应，控制器根据目标与状态决定施加什么输入。

本章目录

刚体动力学与运动求解

第四章 载具运动建模与仿真

4.1 运动建模基础与运动学
4.2 刚体动力学与运动求解
4.3 动力单元、受力与观测建模
4.4 配平、线性化与动态系统基础
4.5 多旋翼模型逐步编程与仿真
4.6 参数测量与静态模型辨识
4.7 动态系统辨识、验证与模型修正
4.8 典型无人载具建模与扩展
4.9 建模工具、代码生成与模型部署
4.10 API与SDK建模接口
4.11 例程体系与综合实践
4.12 习题案例分析与课程设计

本节 5 个教学单元

4.2.1 悬停与升降
教材对应：第4.1.4.1节（平移方程）

4.2.2 差动推力与转动
教材对应：第4.1.4.1节（转动方程）

4.2.3 倾斜与三维动力学
教材对应：第4.1.3.2节、第4.1.4.1节

4.2.4 连续方程与数值积分
前向欧拉、步长误差与数值稳定

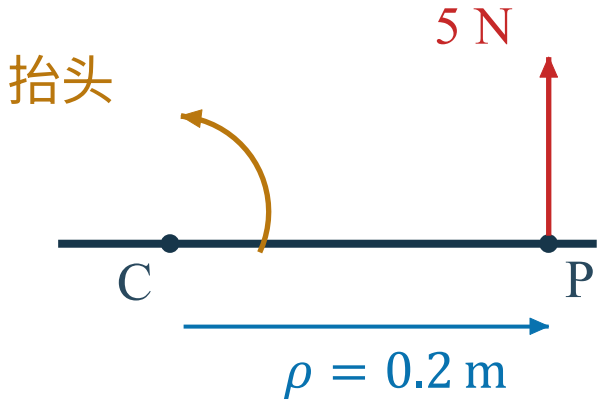
4.2.5 解析核验与练习
用平衡、单轴转动与误差归因核验模型

4.2.2 差动推力与转动：平移惯性与质心力矩

质量、质心和作用位置共同决定响应

- **质量与质心：** m 表征平移惯性，质心是质量加权的位置。机体原点取质心；几何中心、飞控安装点未必与它重合。

- **力矩：** 力臂ρ从质心指向施力点，用$\rho \times F$求矩，再加直接偶矩τ_i（如旋翼反扭矩）。力通过质心时仍使机体平移，但力臂矩为零。



图：质心与施力点

$$\mathbf{r}_C = \frac{1}{m}\int \mathbf{r}\,\mathrm{d}m, \qquad \mathbf{M}_b = \sum_i \boldsymbol{\rho}_{i,b} \times \mathbf{F}_{i,b} + \sum_i \boldsymbol{\tau}_{i,b}$$

- **叉乘算例：** 前方0.2 m处5 N向上力产生正俯仰（抬头）力矩。

$$[0.2,0,0]^{\mathrm{T}} \times [0,0,-5]^{\mathrm{T}} = [0,1,0]^{\mathrm{T}}\ \mathrm{N\,m}$$

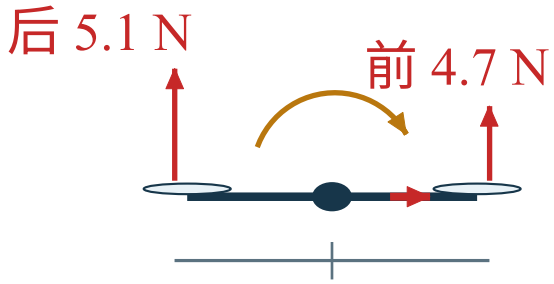
外力决定平移作用，施力点相对质心的位置还决定转动作用。

4.2.2 差动推力与转动：单轴转动计算

前后推力差怎样产生俯仰角

- 差动输入如图，左右桨各4.9 N。总推力19.6 N不变，前后力矩却不抵消，产生机头下俯的负俯仰力矩。

- **单轴前提：** $J_y = 0.05\,\mathrm{kg\,m^2}$，仅绕右轴转动。惯量对应平移中的质量，表示改变转动快慢的难易；此时俯仰角变化率等于该轴角速度，角加速度等于力矩除以惯量。



图：前弱后强，机头下俯

① 求力矩

$$M_y = l(T_{\mathrm{front}} - T_{\mathrm{rear}})$$
$$= 0.25 \times (4.7 - 5.1)$$
$$= -0.1\ \mathrm{N \cdot m}$$

→

② 求角加速度

$$\dot{\omega}_y = M_y / J_y$$
$$= -0.1/0.05 = -2\ \mathrm{rad/s^2}$$
单轴时$\dot{\theta} = \omega_y$

→

③ 加速再制动

负、正力矩各施加0.3 s

ω_y回到0，

$\theta = -0.18\ \mathrm{rad}$（约−10.3°）

力矩先改变角速度，角速度的积分再改变机体姿态。

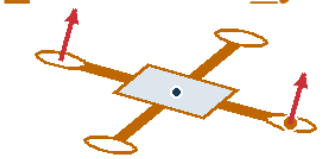
4.2.2 差动推力与转动：力矩到姿态

停止施加力矩，不会自动停止转动

撤矩仍转动；反向力矩可制动

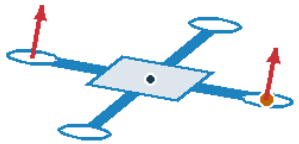
t = 3.60 s

A 撤去力矩 M_y = +0.00 N·m

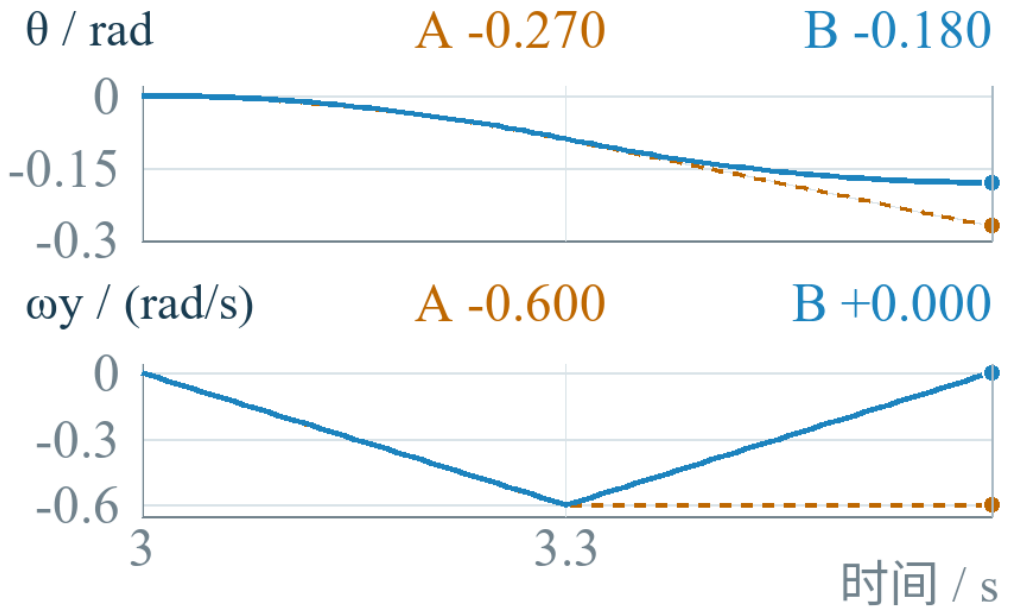


前 4.9 N 后 4.9 N

B 反向制动 M_y = +0.00 N·m



前 4.9 N 后 4.9 N



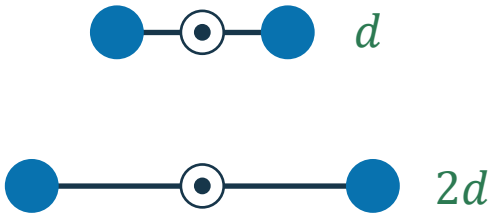
图：相同初态下，撤去力矩仍会转动；反向力矩使角速度归零。

保持某个倾角需要先把角速度减到零。

4.2.2 差动推力与转动：惯量、主轴与正定性

惯量矩阵记录质量分布，决定转动的难易

- **惯量的意义：** J由质量相对质心的分布决定，单位为$\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$。绕$x$轴时，质量离轴的垂直距离越大，$J_x$越大（质点离轴距离加倍，其惯量变为4倍）；同样力矩产生的角加速度越小。



图：等质量移远

$$J=\int\left[(\boldsymbol{\rho}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\rho})I-\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\rho}^{\mathsf{T}}\right]\mathrm{d}m,\quad J_{xx}=\int\left(\rho_y^2+\rho_z^2\right)\mathrm{d}m$$

- **对称与主轴：** J为对称矩阵，有六个独立量；非对角项含$-\int\rho_x\rho_y\,\mathrm{d}m$等质量乘积。选在惯量主轴上可对角化，但机体轴未必与主轴重合。
- **物理约束：** 角动量$\mathbf{H}_b$与动能E_{rot}由下式给出。J正定保证非零转动有正动能；任一主惯量不得大于另外两项之和。

$$\mathbf{H}_b=J\boldsymbol{\omega}_b,\qquad E_{\mathrm{rot}}=1/2\,\boldsymbol{\omega}_b^{\mathsf{T}}J\boldsymbol{\omega}_b$$

惯量描述质量如何分布，决定角动量、转动能量与角加速度。

4.2.2 差动推力与转动：角动量定理

欧拉动力学为何含有角动量耦合项

- **建模前提：**机体系原点在质心，质量分布不变，J为常量。$\boldsymbol{\omega}_b = [p, q, r]^{\mathrm{T}}$分别是绕前、右、下轴的角速度；$\mathbf{M}_b$为对同一质心取矩的机体系力矩。
- **耦合项的来源：**角动量在地面惯性系中的变化等于外力矩。改用随机体旋转的坐标描述时，既有分量本身的变化，也有坐标轴转动带来的变化。

$$\mathbf{M}_b = J\dot{\boldsymbol{\omega}}_b + \boldsymbol{\omega}_b \times (J\boldsymbol{\omega}_b)$$

读式：角动量的两项变化　　$J\dot{\boldsymbol{\omega}}_b$：分量变化　　$\boldsymbol{\omega}_b \times (J\boldsymbol{\omega}_b)$：坐标旋转

- **主轴形式：**若J为对角阵，滚转方程仍含俯仰与偏航角速度的乘积；只有相关角速度为零或对应主惯量相等时，该耦合项才消失。内部转子的额外角动量需另行建模。

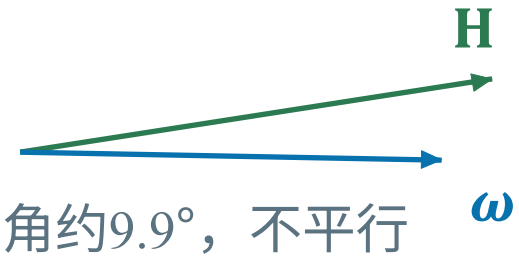
$$J_x\dot{p} = M_x + (J_y - J_z)qr$$

转动方程同时计算外力矩作用与旋转坐标中的角动量耦合。

4.2.2 差动推力与转动：惯性耦合算例

没有外力矩，机体角速度为何仍会改变

- **瞬时题设：** $J = \mathrm{diag}(0.02,0.03,0.04)\ \mathrm{kg\cdot m^2}$，$\boldsymbol{\omega} = [1,2,3]^{\mathsf{T}}\ \mathrm{rad/s}$，外力矩为零。主惯量不同，使角动量 $\mathbf{H} = J\boldsymbol{\omega}$ 与角速度不平行。



- **逐项计算：** $\mathbf{H} = [0.02,0.06,0.12]^{\mathsf{T}}$；$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H} = [0.06,-0.06,0.02]^{\mathsf{T}}\ \mathrm{N\cdot m}$。再逐轴除以惯量并取负：

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_b = -J^{-1}(\boldsymbol{\omega}_b \times J\boldsymbol{\omega}_b) = [-3,2,-0.5]^{\mathsf{T}}\ \mathrm{rad/s^2}$$

- **守恒量：** 惯性空间中的角动量不变，机体轴上的分量可以变化。转动动能为0.25 J，且 $\dot{E}_{\mathrm{rot}} = \boldsymbol{\omega}^{\mathsf{T}}\mathbf{M} = 0$。

$$E_{\mathrm{rot}} = 1/2\,(0.02 \times 1^2 + 0.03 \times 2^2 + 0.04 \times 3^2) = 0.25\,\mathrm{J}$$

无外力矩守恒的是惯性空间角动量，不是每个机体系角速度分量。

本章目录

刚体动力学与运动求解

第四章 载具运动建模与仿真

4.1 运动建模基础与运动学
4.2 刚体动力学与运动求解
4.3 动力单元、受力与观测建模
4.4 配平、线性化与动态系统基础
4.5 多旋翼模型逐步编程与仿真
4.6 参数测量与静态模型辨识
4.7 动态系统辨识、验证与模型修正
4.8 典型无人载具建模与扩展
4.9 建模工具、代码生成与模型部署
4.10 API与SDK建模接口
4.11 例程体系与综合实践
4.12 习题案例分析与课程设计

本节 5 个教学单元

4.2.1 悬停与升降
教材对应：第4.1.4.1节（平移方程）

4.2.2 差动推力与转动
教材对应：第4.1.4.1节（转动方程）

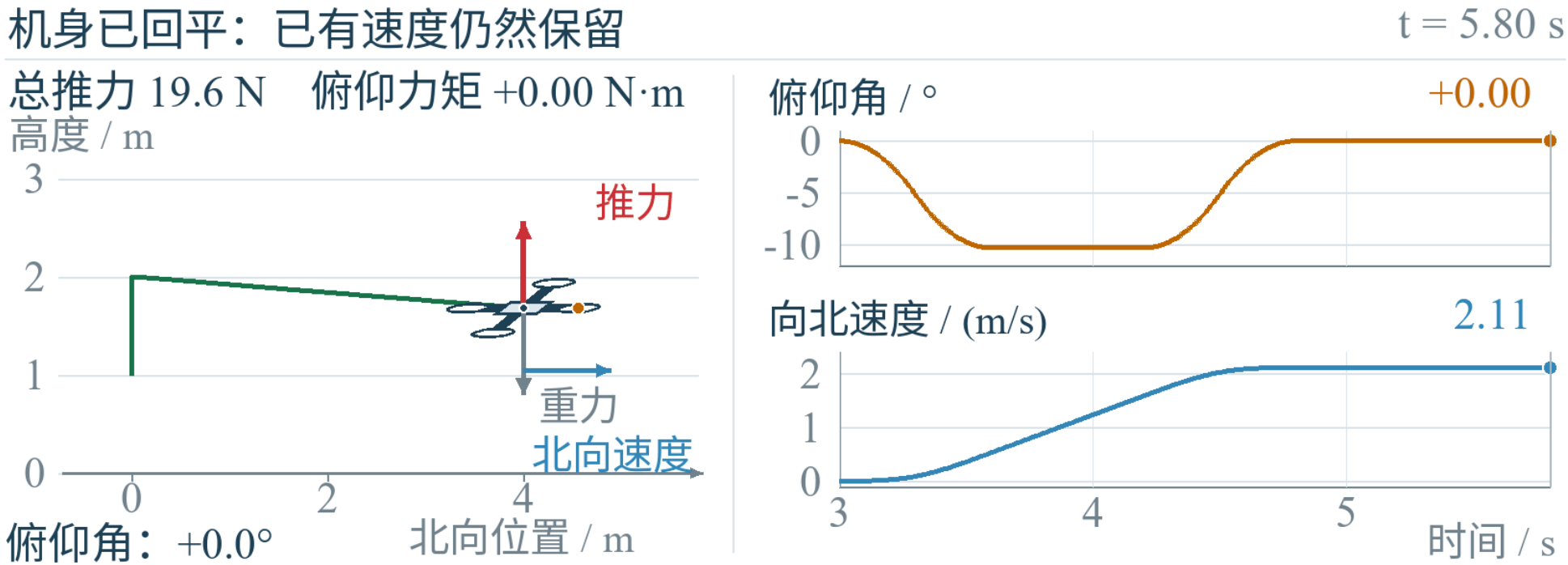
4.2.3 倾斜与三维动力学
教材对应：第4.1.3.2节、第4.1.4.1节

4.2.4 连续方程与数值积分
前向欧拉、步长误差与数值稳定

4.2.5 解析核验与练习
用平衡、单轴转动与误差归因核验模型

4.2.3 倾斜与三维动力学：运动现象

倾斜产生平移，回平以后仍会漂移



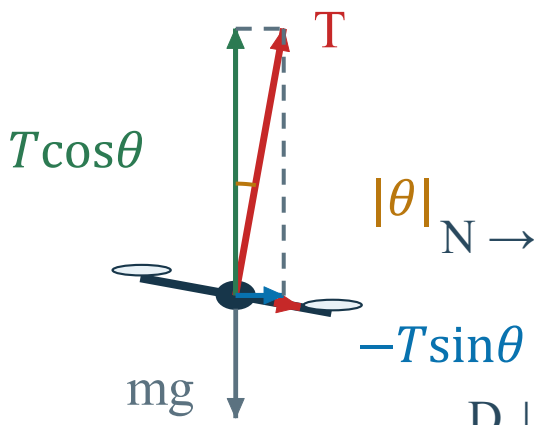
图：本算例阻力为零，回平后水平合力为零，飞机继续向北匀速漂移。

姿态决定推力方向，平移速度还取决于此前的受力过程。

4.2.3 倾斜与三维动力学：推力的坐标转换

机体推力怎样分解为地面方向的力

- **符号：** b/e为机体/地面，N/D为北/下；$F_{\mathrm{ng},b}$是本例仅含推力的非重力合力。R把机体方向转到地面。
- **俯仰平面：** 滚转、偏航为零。图中推力的两个分量再与向下重力合成；换坐标只改变表达，不增加推力。
- 代入19.6 N与−0.18 rad，北向加速度约1.75 m/s²，向下约0.158 m/s²，竖直推力已不足。



图：同一推力的正交分解

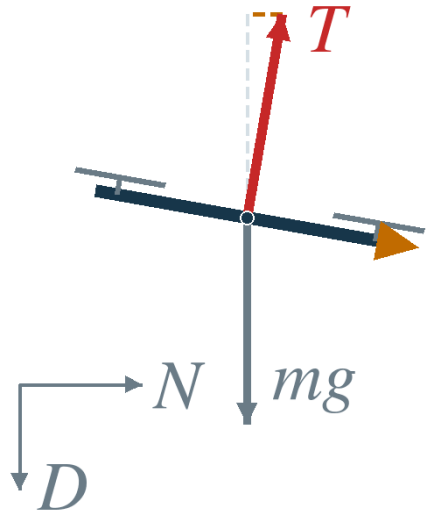
$$\mathbf{F}_{ng,b} = [0,0,-T]^{\mathrm{T}}, \qquad \mathbf{F}_{ng,e} = R\mathbf{F}_{ng,b}$$

$$a_N = -\frac{T}{m}\sin\theta, \qquad a_D = g - \frac{T}{m}\cos\theta$$

同一推力随姿态改变方向，因此同时影响水平运动和高度。

4.2.3 倾斜与三维动力学：瞬时受力扫描

推力保持19.6 N，下俯使北向与向下加速度增大



$T = 19.6\ \mathrm{N}$

$\theta = -10.0^\circ$

机头下俯

$a_N = +1.702\ \mathrm{m/s^2}$

$a_D = +0.149\ \mathrm{m/s^2}$

瞬时加速度

向北

向下加速度

动图：下俯0至−10°的瞬时加速度（教学算例）

- **扫描条件：** $m = 2\ \mathrm{kg}$、$T = 19.6\ \mathrm{N}$，俯仰角θ从0转到−10°（机头下俯），每个角度只求瞬时加速度。

$$a_N = -\frac{T}{m}\sin\theta, \quad a_D = g - \frac{T}{m}\cos\theta$$

- **读图：** $\theta = -10^\circ$时，

$a_N \approx +1.70\ \mathrm{m/s^2}$，向北；

$a_D \approx +0.149\ \mathrm{m/s^2}$，向下。

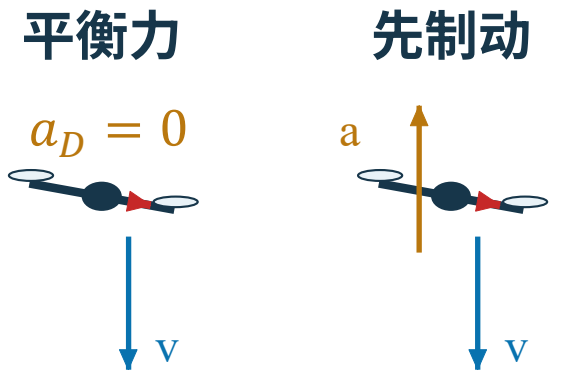
倾角越大，北向加速度越大，竖直推力越不足。

瞬时受力扫描说明方向变化，不代表已积分出飞行轨迹。

4.2.3 倾斜与三维动力学：高度保持的条件

倾斜时保持高度还需要满足速度条件

- **倾斜保高：**仍取−0.18 rad倾角。推力竖直分量等于重力时只消除竖直加速度，已有下降速度仍会保留。
- **制动条件：**先让向上分力大于重力，把下降速度减到零，再恢复平衡推力，才能保持高度。
- **水平耦合：**增推力也增大水平加速；位置目标需结合速度与姿态选择输入。



图：平衡力不等于零速度

$$T\cos\theta = mg \quad \Rightarrow \quad T = \frac{mg}{\cos\theta} \approx 19.92\ \text{N} \quad (\theta = -0.18\ \text{rad})$$

维持高度同时要求竖直合力为零、竖直速度为零。

4.2.3 倾斜与三维动力学：机体子系统信号链

执行器、环境、受力与机身怎样连接

执行器 → 力与力矩 → 机身

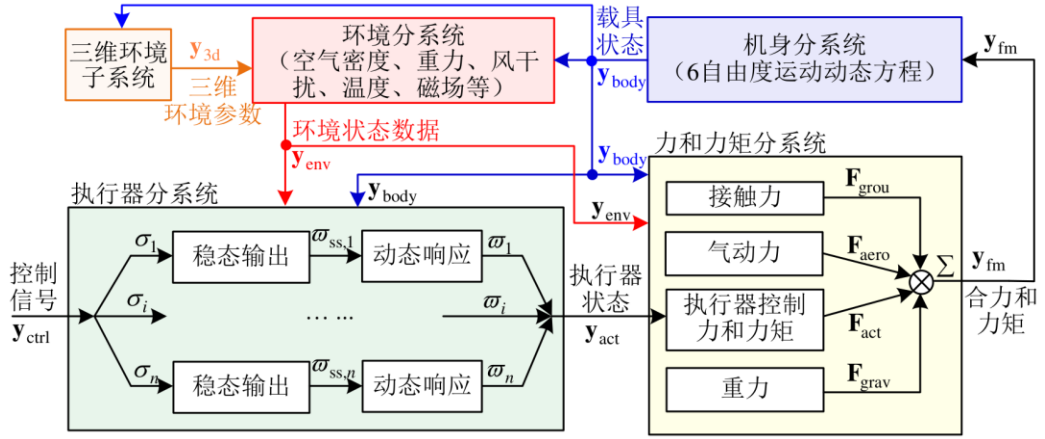


图4.8 机体子系统连接关系

- **执行器与环境：**执行器分系统由控制指令求实际转速；环境分系统由机身状态和三维环境子系统给出风、重力等环境量。
- **力和力矩分系统：**汇合执行器、环境与机身状态，算出推进力、气动力、接触力与重力的合力合矩。
- **机身与反馈：**机身分系统由合力合矩更新运动状态，再反馈给执行器、环境和受力计算。图中重力已并入总合力。

执行器与环境产生作用，机身状态又参与下一次受力计算。

4.2.3 倾斜与三维动力学：图4.8局部放大（执行器与受力）

执行器把指令变成转速，四项力在求和点汇合

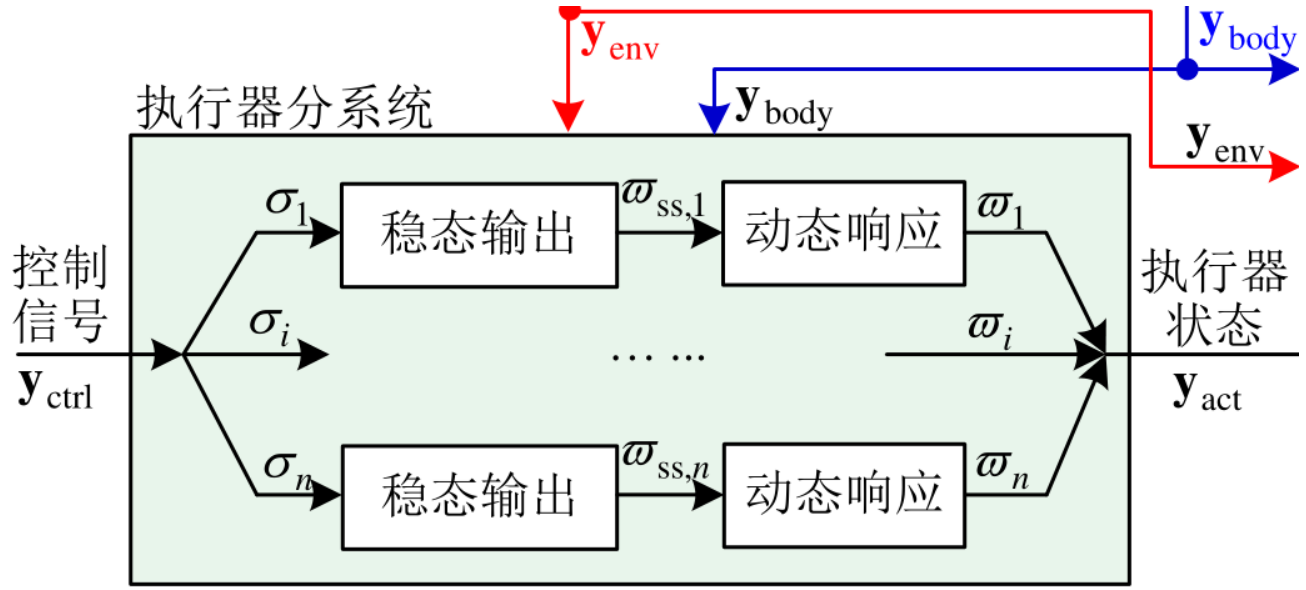


图4.8（局部）执行器分系统

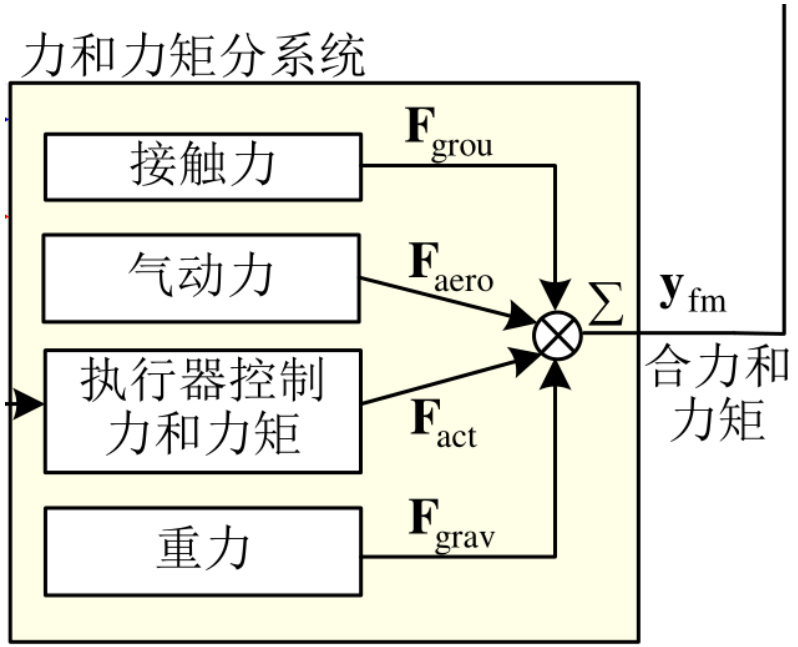


图4.8（局部）力和力矩分系统

- **读图：** σ_i经“稳态输出→动态响应”得转速ϖ_i；四项力在Σ处相加，输出$\mathbf{y}_{\mathrm{fm}}$。

4.2.3 倾斜与三维动力学：图4.8局部放大（环境与反馈）

机身状态同时反馈给环境、执行器和受力计算

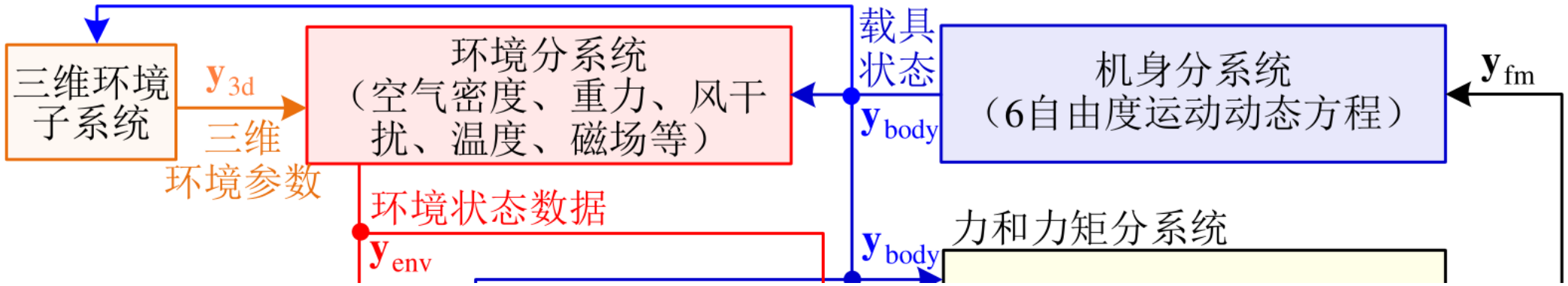


图4.8（局部）环境、三维环境与机身反馈

- **三维环境子系统：**输出三维环境参数$\mathbf{y}_{3d}$，只送入环境分系统。
- **环境分系统：**由$\mathbf{y}_{3d}$和载具状态$\mathbf{y}_{body}$算出风、重力等环境状态数据$\mathbf{y}_{env}$，送往执行器与受力计算。
- **机身分系统：**用合力合矩$\mathbf{y}_{fm}$解6自由度运动方程，新的$\mathbf{y}_{body}$送回其余三个分系统。

4.2.3 倾斜与三维动力学：重力口径的两条等价路径

同一份重力，可以放在受力端或加速度端

- **共同输入：**非重力合力包含推进、气动力（含阻力）与接触力。教材图4.8采用口径B（总力口径）；只有入门基准才把阻力取零。

口径A

$$\mathbf{F}_{\mathrm{ng},b} \longrightarrow R/m \longrightarrow +\mathbf{g}_e \longrightarrow \dot{\mathbf{v}}_e$$

口径B

$$\mathbf{F}_{\mathrm{ng},b} + mR^T\mathbf{g}_e \longrightarrow R/m \longrightarrow \dot{\mathbf{v}}_e$$

图：同一重力、两个入口、相同结果

- **自由落体核对：**撤去全部非重力力，均得 $a_D = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$。若得19.6，通常重复计入重力；若得0，则可能漏加重力。

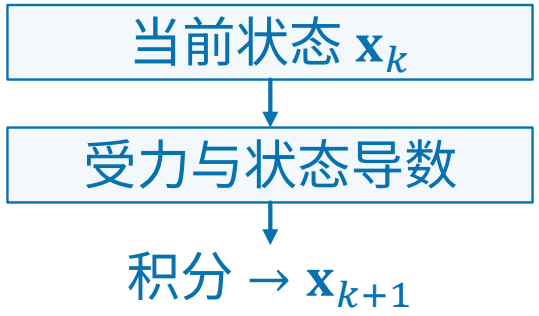
两条路径给出相同加速度，每条路径中重力只出现一次。

4.2.3 倾斜与三维动力学：六自由度状态模型

把运动学与动力学组成连续状态方程

- **适用条件：**局部NED视为惯性系，机体原点在质心，质量m与惯量J恒定。

$$\dot{\mathbf{r}}_e = \mathbf{v}_e$$
$$\dot{\mathbf{v}}_e = \mathbf{g}_e + R(\mathbf{q})\mathbf{F}_{\mathrm{ng,b}}/m$$
$$\dot{\mathbf{q}} = 1/2\,\mathbf{q} \otimes [0, \boldsymbol{\omega}_b^{\mathsf{T}}]^{\mathsf{T}}$$
$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_b = J^{-1}[\mathbf{M}_b - \boldsymbol{\omega}_b \times (J\boldsymbol{\omega}_b)]$$



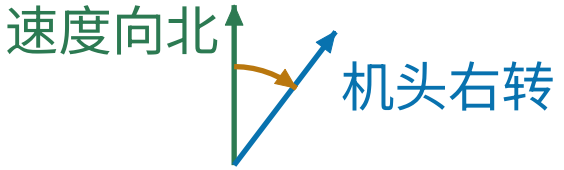
图：同一时刻统一求导

- **输入与导数：**$\mathbf{F}_{\mathrm{ng},b}$汇总含阻力的非重力外力，$\mathbf{M}_b$汇总含旋转阻尼的质心外力矩；$R(\mathbf{q})$将机体分量转到地面。四组方程推进位置、速度、姿态和角速度。
- **状态数量：**刚体保存13个数，只有12个独立状态；执行器或传感器若另有动态，也按同一时刻求导并同步推进。

运动学连接状态，动力学给出加速度，子系统决定真实力与力矩。

4.2.3 倾斜与三维动力学：旋转坐标求导

机体系速度导数为什么多出一个叉乘项



- **乘积求导：** $\mathbf{v}_e = R\mathbf{v}_b$ 的分量和坐标轴都在变化；代入 $\dot{R} = R[\boldsymbol{\omega}_b]_\times$ 后得到：

$$\dot{\mathbf{v}}_e = \dot{R}\mathbf{v}_b + R\dot{\mathbf{v}}_b = R(\boldsymbol{\omega}_b \times \mathbf{v}_b + \dot{\mathbf{v}}_b)$$

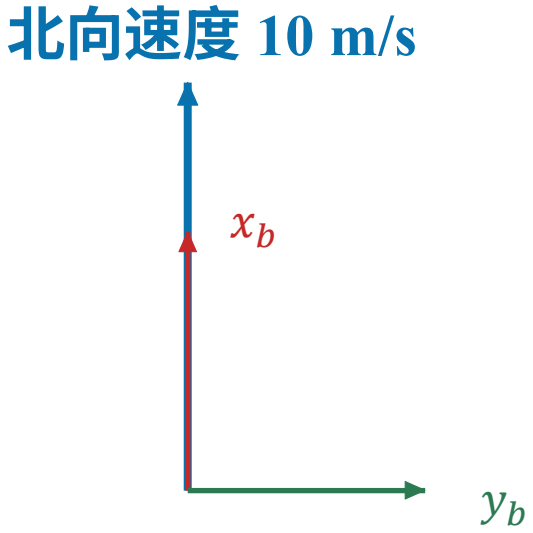
$$\dot{\mathbf{v}}_b = \mathbf{F}_{\mathrm{ng},b}/m + R^{\mathsf{T}}\mathbf{g}_e - \boldsymbol{\omega}_b \times \mathbf{v}_b$$

- **物理意义：** 最后一项来自坐标转动，不是新增外力。地面速度恒定时，机体系的前向、侧向分量仍会变化。
- **瞬时检查：** 机体与NED暂时对齐，地面速度北向10 m/s，机体以1 rad/s右偏航，此时 $\dot{\mathbf{v}}_b = [0, -10, 0]^{\mathsf{T}}\ \mathrm{m/s^2}$。

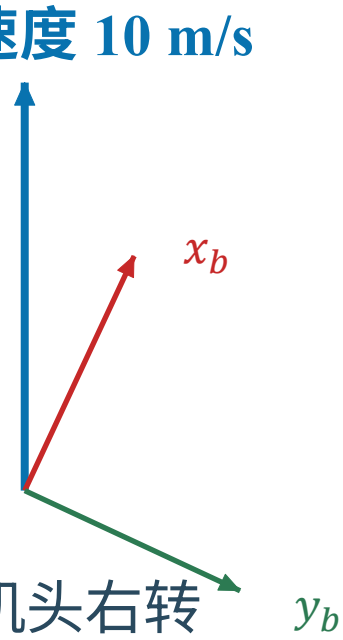
机体系分量的变化同时来自真实加速度与坐标轴转动。

4.2.3 倾斜与三维动力学：图解与核验

速度仍向北，机头右转后分量怎样变



初始对齐



稍后机头右转

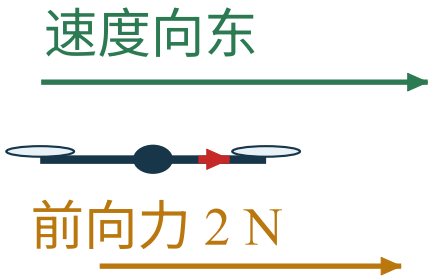
初始瞬间：$\dot{\mathbf{v}}_e = 0$，$\dot{\mathbf{v}}_b = [0, -10, 0]^T$ m/s²

图：固定地面速度与转动机体坐标轴

地面速度不变时，机体系分量仍会因坐标轴转动而变化。

4.2.3 倾斜与三维动力学：组合算例（地面系）

机头朝东的瞬时算例：先求地面系导数



- **瞬时算例：** $m = 2\,\mathrm{kg}$，$g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$，$J = \mathrm{diag}(0.02,0.03,0.04)\ \mathrm{kg\cdot m^2}$；水平朝东，$\mathbf{v}_b = [2,0,0]^{\mathrm{T}}\ \mathrm{m/s}$，$\boldsymbol{\omega}_b = [0,0,1]^{\mathrm{T}}\ \mathrm{rad/s}$。
- **输入：** $\mathbf{F}_{\mathrm{ng},b} = [2,0,-19.6]^{\mathrm{T}}\ \mathrm{N}$，$\mathbf{M}_b = [0,0,0.08]^{\mathrm{T}}\ \mathrm{N\cdot m}$。竖直力抵消重力，前向力成为东向力。

$$R = R_z(90^\circ) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

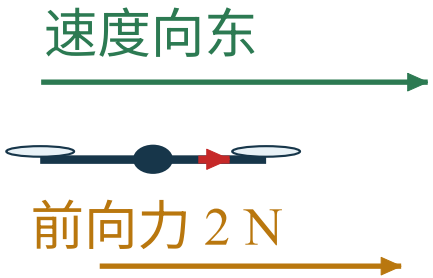
- **姿态：** 偏航90°，机体前向指向东、右向指向南；R把机体分量转到NED。

$$\dot{\mathbf{r}}_e = R\mathbf{v}_b = [0,2,0]^{\mathrm{T}}\ \mathrm{m/s}, \quad \dot{\mathbf{v}}_e = \mathbf{g}_e + R\mathbf{F}_{\mathrm{ng},b}/m = [0,1,0]^{\mathrm{T}}\ \mathrm{m/s^2}$$

- **结论：** 地面系中飞机以2 m/s向东运动，并以1 m/s²向东加速，竖直合力为零。

4.2.3 倾斜与三维动力学：组合算例（机体系）

同一瞬间的机体系速度、角速度与姿态导数



- **同一瞬时算例：** $J=\mathrm{diag}(0.02,0.03,0.04)\ \mathrm{kg\cdot m^2}$，
  $\mathbf{v}_b=[2,0,0]^{\mathrm{T}}\ \mathrm{m/s}$，$\boldsymbol{\omega}_b=[0,0,1]^{\mathrm{T}}\ \mathrm{rad/s}$；
  $\mathbf{F}_{\mathrm{ng},b}=[2,0,-19.6]^{\mathrm{T}}\ \mathrm{N}$，$\mathbf{M}_b=[0,0,0.08]^{\mathrm{T}}\ \mathrm{N\cdot m}$。

$$\boldsymbol{\omega}_b\times\mathbf{v}_b=[0,2,0]^{\mathrm{T}}\ \mathrm{m/s^2},\quad \boldsymbol{\omega}_b\times(J\boldsymbol{\omega}_b)=\mathbf{0}$$

$$\dot{\mathbf{v}}_b=\mathbf{F}_{\mathrm{ng},b}/m+R^{\mathrm{T}}\mathbf{g}_e-\boldsymbol{\omega}_b\times\mathbf{v}_b$$

$$=[1,0,-9.8]^{\mathrm{T}}+[0,0,9.8]^{\mathrm{T}}-[0,2,0]^{\mathrm{T}}=[1,-2,0]^{\mathrm{T}}\ \mathrm{m/s^2}$$

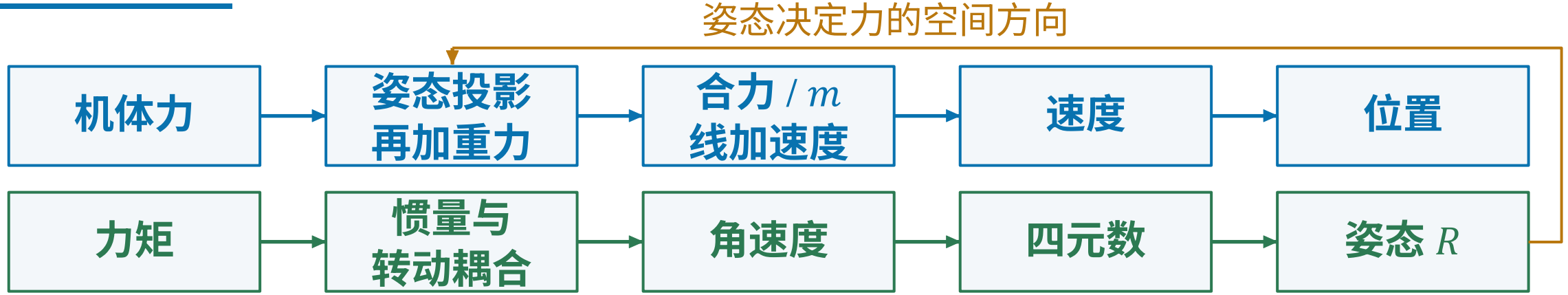
$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_b=J^{-1}[\mathbf{M}_b-\boldsymbol{\omega}_b\times(J\boldsymbol{\omega}_b)]=[0,0,2]^{\mathrm{T}}\ \mathrm{rad/s^2}$$

- **姿态：** 令 $c=\sqrt{2}/2$，$\mathbf{q}=[c,0,0,c]^{\mathrm{T}}$，$\dot{\mathbf{q}}=[-c/2,0,0,c/2]^{\mathrm{T}}\ \mathrm{s^{-1}}$。以上均为同一瞬间；负侧向导数来自坐标转动。

同一运动在两个坐标系中分量不同，但转换后的物理结果必须一致。

4.2.3 倾斜与三维动力学：耦合链回顾

把“姿态、受力、运动”连成一条可计算链



图：运动学与动力学的两条耦合链

- **统一口径：** R把FRD分量转入NED；重力只计一次。机体系速度求导与非球形惯量转动保留各自耦合项。
- **实现与验证：** 初态、参数、输入和积分法共同决定轨迹；解析算例查基本响应，步长对比查数值误差，实测数据判断模型精度。

先统一坐标和物理口径，再用完整方程与可解释算例建立模型。

本章目录

刚体动力学与运动求解

第四章 载具运动建模与仿真

4.1 运动建模基础与运动学
4.2 刚体动力学与运动求解
4.3 动力单元、受力与观测建模
4.4 配平、线性化与动态系统基础
4.5 多旋翼模型逐步编程与仿真
4.6 参数测量与静态模型辨识
4.7 动态系统辨识、验证与模型修正
4.8 典型无人载具建模与扩展
4.9 建模工具、代码生成与模型部署
4.10 API与SDK建模接口
4.11 例程体系与综合实践
4.12 习题案例分析与课程设计

本节 5 个教学单元

4.2.1 悬停与升降
教材对应：第4.1.4.1节（平移方程）

4.2.2 差动推力与转动
教材对应：第4.1.4.1节（转动方程）

4.2.3 倾斜与三维动力学
教材对应：第4.1.3.2节、第4.1.4.1节

4.2.4 连续方程与数值积分
前向欧拉、步长误差与数值稳定

4.2.5 解析核验与练习
用平衡、单轴转动与误差归因核验模型

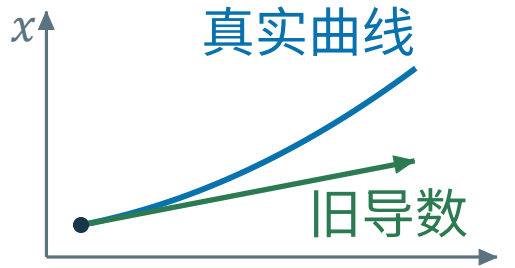
4.2.4 连续方程与数值积分：前向欧拉方法

连续方程怎样变成离散时刻的计算

- **离散计算：**计算机按步长h保存状态；相邻时刻间的连续变化由状态导数确定，再用积分公式近似推进。

$$\mathbf{x}(t+h) = \mathbf{x}(t) + \int_{t}^{t+h} f\left(\mathbf{x}(\tau), \tau\right) \mathrm{d}\tau$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + hf(\mathbf{x}_k, t_k), \qquad t_k = kh$$



图：用切线走一步

- **同步更新：**先用同一时刻的全部旧状态计算，再一次性写入新状态。若先更新速度，再用新速度更新位置，就改变了前向欧拉算法，其误差也不同。
- **误差来源：**对足够光滑的方程，欧拉单步局部误差为$\mathcal{O}(h^2)$，固定时间内累计误差通常为 $\mathcal{O}(h)$ 。减小步长可改善近似，但不能补救坐标方向、参数单位或受力方程错误。

离散算法近似连续积分；更新时刻和步长共同决定数值误差。

4.2.4 连续方程与数值积分：手算两步

一次状态更新怎样变成一段运动

- **计算条件：**升降段开始时$z_D = -1\,\mathrm{m}$、$v_D = 0$，总推力21.6 N，故$a_D = -1\,\mathrm{m/s^2}$。取步长$\Delta t = 0.1\,\mathrm{s}$，用前向欧拉计算。

$$z_{D,k+1} = z_{D,k} + \Delta t\, v_{D,k}, \qquad v_{D,k+1} = v_{D,k} + \Delta t\, a_{D,k}$$

两个递推式都先读同一份旧状态，再同时写回。

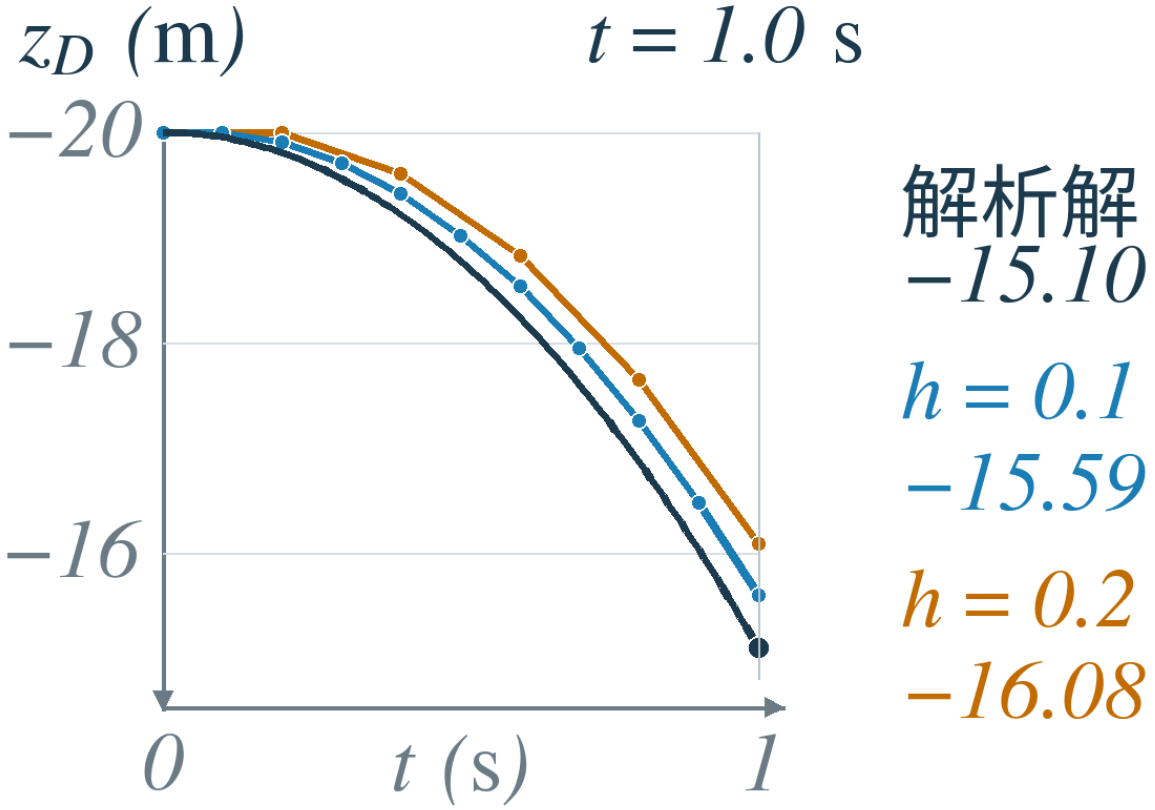
$t = 0$	→	$t = 0.1$	→	$t = 0.2$
$z_D = -1$		$z_D = -1$		$z_D = -1.01$
$v_D = 0$		$v_D = -0.1$		$v_D = -0.2$

图：首步用旧速度0，数值位置未变；连续解已升0.005 m。

- **一秒核对：**$h = 0.1\,\mathrm{s}$时升高0.45 m，$h = 0.01\,\mathrm{s}$时升高0.495 m，解析值为0.5 m。两种步长速度终点相同，位置误差随步长减小。

4.2.4 连续方程与数值积分：解析解与步长误差

自由落体：速度算对了，位置误差随步长减半



动图：从−20 m自由下落，解析解与两种步长

1 s终点比较

步长	位置 / m	少下落 / m
解析解	−15.10	0
0.1 s	−15.59	0.49
0.2 s	−16.08	0.98

速度终点均为9.8 m/s

恒加速时速度采样值准确；
位置用旧速度推进，
因而少下落：

$$z_E(t) - z(t) = -4.9\,t\,h$$

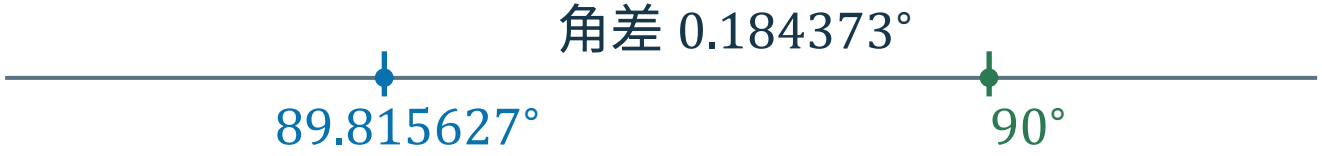
4.2.4 连续方程与数值积分：姿态积分误差

四元数归一化只恢复约束，不会消除转角误差

- **计算设置：** $\mathbf{q}(0)=[1,0,0,0]^{\mathrm{T}}$，恒定$\boldsymbol{\omega}_b=[0,0,\pi/2]^{\mathrm{T}}\,\mathrm{rad/s}$，以$h=0.1\,\mathrm{s}$前向欧拉积分1 s。未归一化的四元数范数增至1.031225，已不满足姿态表示的单位约束。

$$\tilde{\mathbf{q}}_{k+1}=\mathbf{q}_k+h/2\,\mathbf{q}_k\otimes[0,\boldsymbol{\omega}_b^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},\quad \mathbf{q}_{k+1}=\tilde{\mathbf{q}}_{k+1}/\|\tilde{\mathbf{q}}_{k+1}\|$$

- **归一化效果：** 每步除以范数可恢复单位长度；末步偏航89.815627°，比解析90°少0.184373°。转角误差来自离散积分，仍受步长影响。
- **改进方法：** 恒定机体角速度时，可用单位四元数表示一步有限转角，准确推进姿态；构造式见课件4.1「单轴旋转与有限增量」页，时变角速度仍须近似。

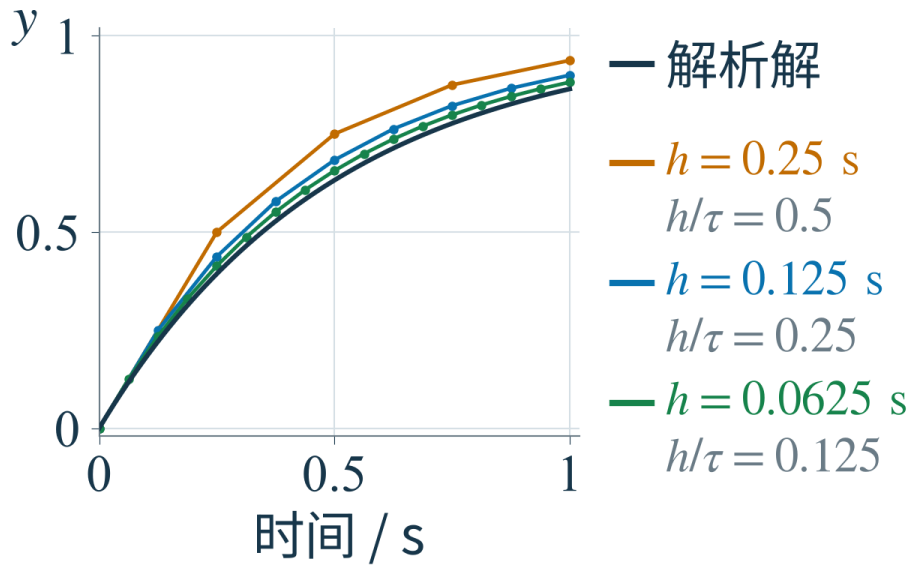


图：偏航角局部放大

单位范数保证四元数合法，姿态精度还取决于积分方法与步长。

4.2.4 连续方程与数值积分：动态响应精度

一阶环节：步长应怎样对应模型的时间尺度



图：步长与一阶响应精度（教学算例）

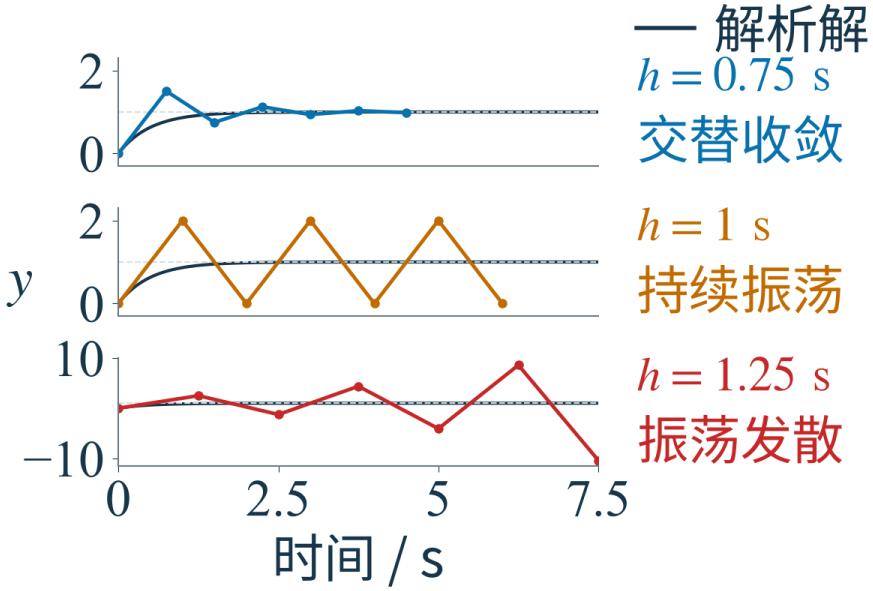
- **条件：** $\tau\dot{y} + y = u$，$\tau = 0.5\,\mathrm{s}$，初值0，输入阶跃至1；时间常数决定响应快慢。
- **读图：** 1 s时解析值为0.8647；步长0.25、0.125、0.0625 s的欧拉值依次为0.9375、0.8999、0.8819。
- **选步长：** 误差依次为0.073、0.035、0.017，约与步长成正比。稳定只需$h < 2\tau$，精度再按允许误差反推步长。

$$y_{k+1} = y_k + (h/\tau)(1 - y_k), \qquad y(t) = 1 - e^{-t/\tau}$$

模型时间尺度决定“变化有多快”，允许误差决定步长需要多小。

4.2.4 连续方程与数值积分：欧拉法稳定范围

物理系统稳定，数值递推也可能振荡发散



图：欧拉递推的三种响应（教学算例）

- **误差机制：**初值0、单位阶跃下，令$e_k = y_k - 1$，每步误差乘$1 - h/\tau$；绝对值小于1才衰减，故$0 < h < 2\tau$。
- **读图：**取$\tau = 0.5\,\mathrm{s}$，三种步长对应误差乘数-0.5、-1、-1.5，分别交替收敛、持续振荡和发散；各小图纵轴量程不同。
- **物理解释：**连续解单调稳定；振荡来自数值递推。稳定只是底线，还需按允许误差选步长。

$$e_{k+1} = (1 - h/\tau)e_k, \qquad |1 - h/\tau| < 1$$

积分步长会引入数值振荡；数值稳定也不等于精度足够。

本章目录

刚体动力学与运动求解

第四章 载具运动建模与仿真

4.1 运动建模基础与运动学
4.2 刚体动力学与运动求解
4.3 动力单元、受力与观测建模
4.4 配平、线性化与动态系统基础
4.5 多旋翼模型逐步编程与仿真
4.6 参数测量与静态模型辨识
4.7 动态系统辨识、验证与模型修正
4.8 典型无人载具建模与扩展
4.9 建模工具、代码生成与模型部署
4.10 API与SDK建模接口
4.11 例程体系与综合实践
4.12 习题案例分析与课程设计

本节 5 个教学单元

4.2.1 悬停与升降
教材对应：第4.1.4.1节（平移方程）

4.2.2 差动推力与转动
教材对应：第4.1.4.1节（转动方程）

4.2.3 倾斜与三维动力学
教材对应：第4.1.3.2节、第4.1.4.1节

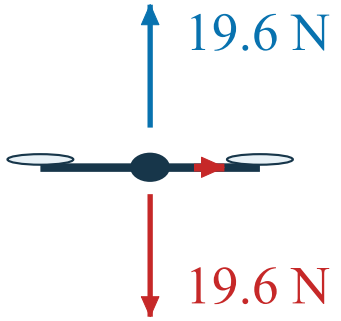
4.2.4 连续方程与数值积分
前向欧拉、步长误差与数值稳定

4.2.5 解析核验与练习
用平衡、单轴转动与误差归因核验模型

4.2.5 解析核验与练习：零导数与恒力矩

平衡与单轴转动给出两组可手算基准

- **平衡基准：** $m = 2\,\mathrm{kg}$、$g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$，初始水平静止、角速度为零。向上19.6 N且合力矩为零时，全部状态导数为零。
- **扰动：** 推力增加0.4 N，得 $a_D = -0.2\,\mathrm{m/s^2}$ 。平衡点导数为零，不代表受扰后能返回。
- **单轴基准：** 另设 $J_x = 0.02\,\mathrm{kg\cdot m^2}$、$M_x = 0.04\,\mathrm{N\cdot m}$，初角与角速度均为零。只绕一个主轴转动时，耦合项消失。



$$\dot{p} = 2\,\mathrm{rad/s^2}, \quad p(0.5) = 1\,\mathrm{rad/s}, \quad \phi(0.5) = 0.25\,\mathrm{rad}$$

- **练习：** 推力改为18 N时如何运动？把惯量和力矩同时乘1.5，单轴响应为何不变？

先用能手算的平衡与单轴情形，确认符号、单位和基本响应。

4.2.5 解析核验与练习：误差的物理归因

怎样从结果判断错误来自方程还是积分

- **方向与单位：**自由落体向上加速，说明NED符号或重力方向有误；19.6 m/s²常见于重力重复。将度每秒误作弧度每秒会引入约57.3倍误差，缩小步长无法修复。
- **数值误差：**同一解析算例的终点误差随步长减半近似减半，符合欧拉法的一阶收敛。若误差不减，应继续区分方程、输入时刻、参考解和浮点精度的影响。
- **模型误差：**准确积分不能弥补漏掉的阻力、错误质量或执行器动态。比较实测轨迹时，应统一输入、参数和时间，再判断差异来自哪一层。



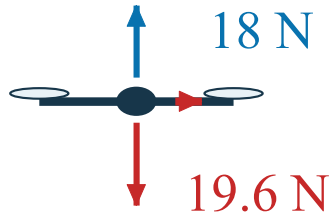
图：先物理、再数值、后实测；本节算例均为离线数值计算

先用物理方向和解析答案定位问题，再讨论积分精度与模型逼真度。

4.2.5 解析核验与练习：练习参考要点

参考要点：推力不足与惯量、力矩同比放大

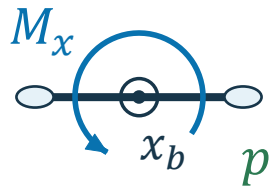
- **第1问：**水平静止载具质量2 kg，$g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$，仅有向上18 N推力和重力。推力比重力少1.6 N，所以向下加速：



图：平移与单轴转动

$$a_D = 9.8 - 18/2 = 0.8\ \mathrm{m/s^2}$$

- **第2问（同乘1.5）：**$J_x = 0.03\,\mathrm{kg\cdot m^2}$、$M_x = 0.06\,\mathrm{N\cdot m}$，仅绕$x$主轴，从静止开始；0.5 s后结果与原题相同：



$$\dot{p} = 0.06/0.03 = 2\ \mathrm{rad/s^2}, \quad p(0.5) = 1\ \mathrm{rad/s}, \quad \phi(0.5) = 0.25\ \mathrm{rad}$$

- **关键判断：**角加速度由比值决定，$\dot{p} = M_x/J_x$；两者同乘1.5后比值仍为2，同一初态下响应不变。该结论只适用于单轴主惯量转动。

响应方向先看净作用，响应大小再由质量或惯量决定。

课堂练习

用新数据检验倾斜受力、四元数一步与步长选择

- **练习1（倾斜受力）**：$m = 2\ \mathrm{kg}$、$T = 20\ \mathrm{N}$，机头下俯$\theta = -0.2\ \mathrm{rad}$，滚转与偏航为零。求北向与地向加速度，并判断竖直合力的方向。
- **练习2（四元数一步）**：$\mathbf{q}(0) = [1,0,0,0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\omega}_b = [0,0,1]^{\mathrm{T}}\ \mathrm{rad/s}$，取$h = 0.2\ \mathrm{s}$用前向欧拉走一步。写出$\mathbf{q}_1$和归一化后的偏航角，并与解析值$0.2\ \mathrm{rad}$比较。
- **练习3（选步长）**：一阶环节$\tau = 0.2\ \mathrm{s}$，步长h分别取0.05、0.3、$0.5\ \mathrm{s}$。求每步误差乘数，判断哪种单调收敛、交替收敛或发散。
- **提示**：角度一律用弧度；四元数标量在前，增量按$(h/2)\,\mathbf{q} \otimes [0, \boldsymbol{\omega}_b^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$计算；一阶环节的误差乘数为$1 - h/\tau$。

参考要点

倾斜受力、四元数一步与步长选择的参考要点

- **练习1：** $a_N = -10\sin(-0.2) = +1.987\ \mathrm{m/s^2}$（向北）；
  $a_D = 9.8 - 10\cos 0.2 \approx -0.0007\ \mathrm{m/s^2}$；
  竖直分量略大于重力，合力微小向上；高度变化还取决于竖直速度。

- **练习2：** $\mathbf{q}_1 = [1,0,0,0.1]^{\mathrm{T}}$，范数1.00499，归一化得$[0.99504,0,0,0.09950]^{\mathrm{T}}$；
  偏航$2\arctan 0.1 = 0.19934$ rad，比0.2 rad少0.00066 rad（约0.038°）。

- **练习3：** 乘数依次为0.75、−0.5、−1.5：0.05 s单调收敛，0.3 s交替收敛，0.5 s发散。
  稳定要求$h < 2\tau = 0.4$ s，精度还要按允许误差继续缩小h。

本节小结

从受力到状态推进，再用解析算例分开核验

- **本节方法：**合力除以质量得线加速度，合力矩经欧拉动力学得角加速度；R把机体力转到NED；四组状态方程在同一时刻求导，再用前向欧拉推进。
- **关键判断：**平衡不等于零速度；零外力矩时机体角速度仍可变化；四元数归一化不保证转角准确；数值稳定不保证精度足够。
- **易错点：**NED的D轴向下，向上取负；重力在口径A或口径B中只计一次；度与弧度不能混用；同一步内先读全部旧状态，再一起写新状态。
- **衔接：**课件4.3把“各桨推力已知”换成动力单元与受力模型；课件4.5把本节四组方程写成程序，并用这里的解析值核对。

先统一坐标与重力口径，再用解析算例和步长对比分开检查模型与积分。