



智能无人系统控制实践

第四章 载具运动建模与仿真

作者：戴训华 中南大学

主页：<https://faculty.csu.edu.cn/daixunhua>

邮箱：dai.xh@csu.edu.cn

平台官网：<http://rflysim.com>



ni 新型工业化·新制造·无人系统系列·RflySim系列

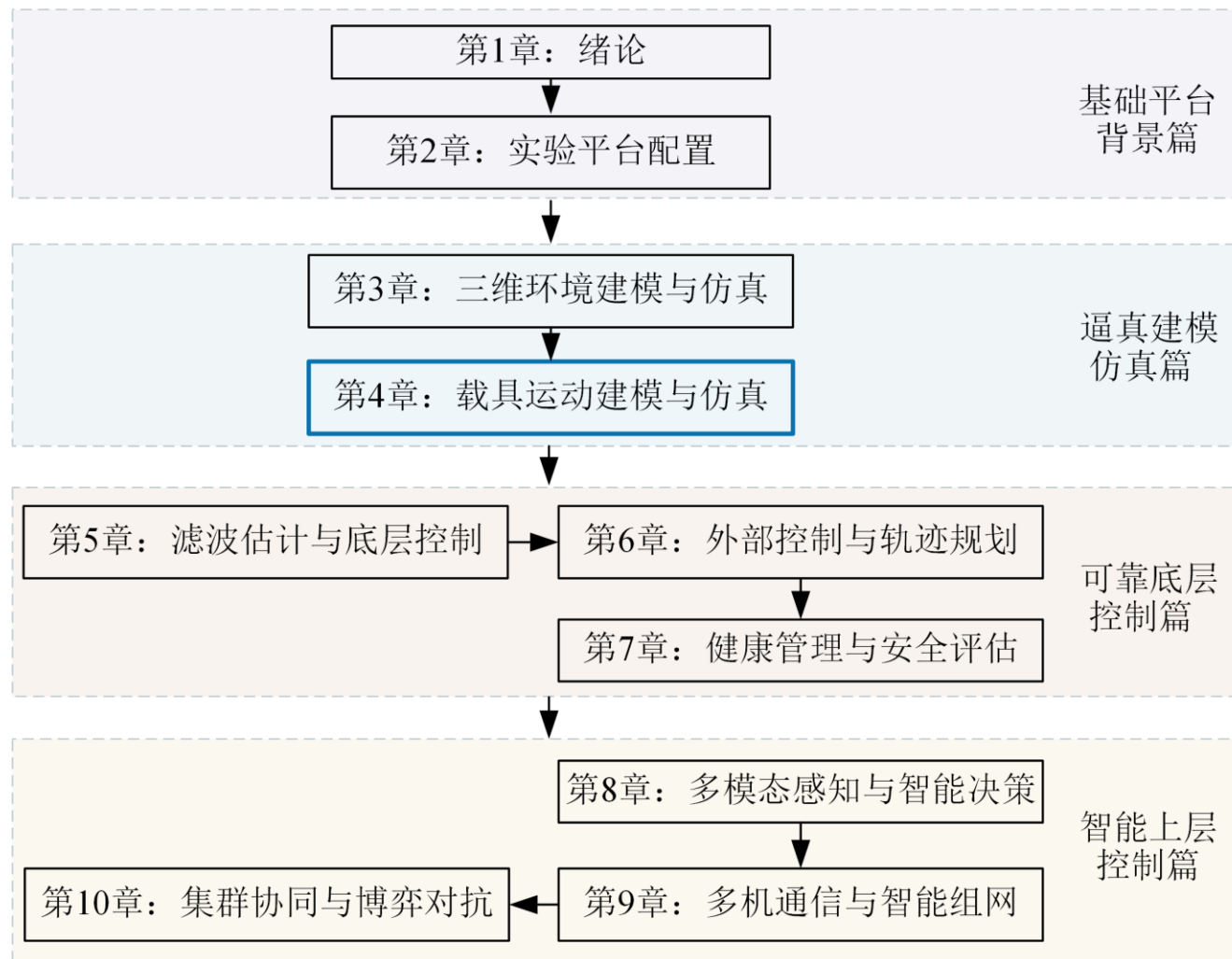
面向具身无人系统的建模、控制与仿真

智能无人系统 控制实践

戴训华/主编 全权 任雪峰/副主编



中国工信出版集团 电子工业出版社



教材：戴训华，全权，任雪峰. 智能无人系统控制实践[M]. 北京：电子工业出版社，2026.



4.1 运动建模基础与运动学



本章学习目标

学完第四章能够完成什么

- 1 能用坐标、状态和力学方程描述载具运动
- 2 能建立执行器、环境和传感器子模型
- 3 能实现模型，用软件开发工具包（SDK）配置、驱动与取数
- 4 能测量和辨识参数，用独立数据验证并迁移模型

把物理方程实现为模型，再用数据说明模型的适用范围。





4.1 运动建模基础与运动学



本章目录

模型框架、坐标与姿态运动学

第四章 载具运动建模与仿真

4.1 运动建模基础与运动学

- 4.2 刚体动力学与运动求解
- 4.3 动力单元、受力与观测建模
- 4.4 配平、线性化与动态系统基础
- 4.5 多旋翼模型逐步编程与仿真
- 4.6 参数测量与静态模型辨识
- 4.7 动态系统辨识、验证与模型修正
- 4.8 典型无人载具建模与扩展
- 4.9 建模工具、代码生成与模型部署
- 4.10 API与SDK建模接口
- 4.11 例程体系与综合实践
- 4.12 习题案例分析与课程设计

首单元教材：4.1.1.1-2、4.1.2.1-4
4.1.3.1-2；模型分类另见4.2.2.1

本节 5 个教学单元

4.1.1 建模方法与统一框架

教材对应：详见左栏下方首单元细目

4.1.2 坐标、旋转矩阵与欧拉角

教材对应：第4.1.4.1节（坐标、旋转矩阵与欧拉角）

4.1.3 四元数与表示转换

教材对应：第4.1.4.1节（四元数与姿态表示）

4.1.4 姿态运动学

教材对应：第4.1.4.1节（旋转运动学方程）

4.1.5 位置、安装点与坐标约定

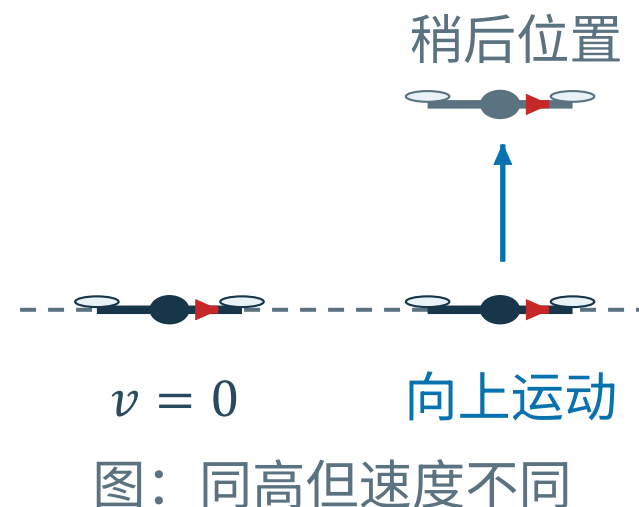
教材对应：第4.1.4.1节（位置运动学与坐标约定）



4.1.1 建模方法与统一框架：核心概念

运动模型把输入、状态与输出联系起来

- **模型与参数**：给定推力、初态及质量、惯量等参数 λ ，计算随后的位置、速度和姿态；轨迹是计算结果。
- **状态**：同高不代表同一状态。右图一架静止、一架上升，稍后的高度不同；预测必须保存速度等信息。
- **输入与输出**：输入 $\mathbf{u}$ 是给定的四桨推力；由状态 $\mathbf{x}$ 取得高度、姿态等输出 $\mathbf{y}$ ，测量还需观测模型。



$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}; \lambda), \quad \mathbf{y} = h(\mathbf{x}, \mathbf{u}; \lambda)$$

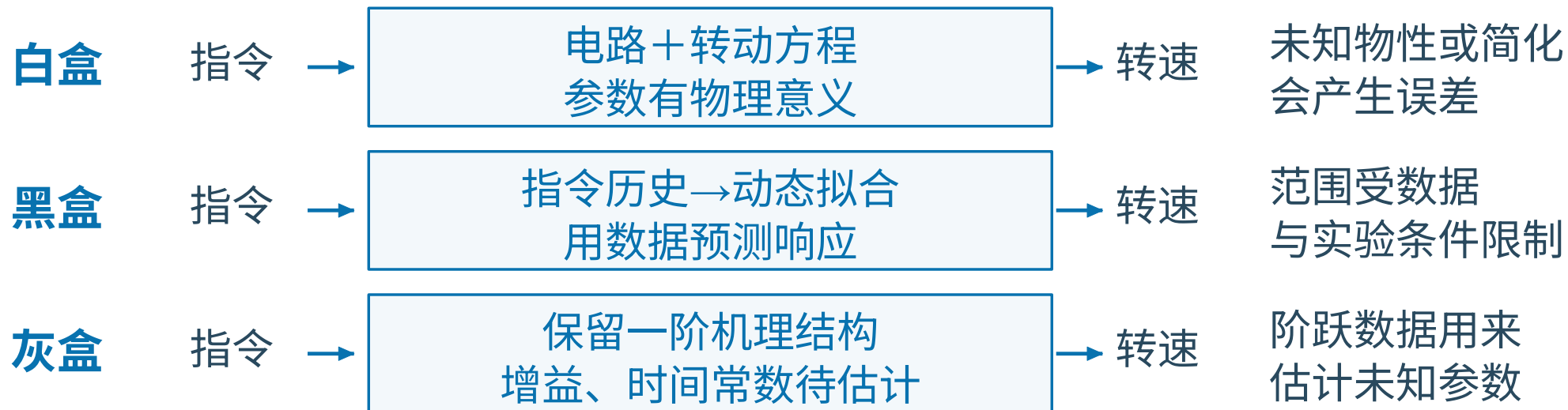
- **符号**：状态 $\mathbf{x}$ 上的点表示对时间求导； f 给出状态变化率， h 给出输出。

状态承接过去，输入推动变化，模型把二者联系到输出。

4.1 运动建模基础与运动学

4.1.1 建模方法与统一框架：系统模型类型

白盒、黑盒与灰盒怎样结合机理和数据



- **同一对象的选择：**已知结构、数据数量和目标工况共同决定方法。白盒、黑盒、灰盒说明模型来源，不构成从低到高的精度等级。

图：同一电机、相同输入输出、不同知识来源

建模方法决定知识与数据怎样结合，并不直接决定精度等级。

4.1 运动建模基础与运动学

4.1.1 建模方法与统一框架：任务与边界

画面回放、运动预测与闭环验证解决不同问题

- **几何与回放：**给定位置、姿态和时间，三维软件可以显示飞行；这条轨迹是预先提供的，尚未解释油门变化为什么会引起加速。
- **运动预测：**从执行器输入开始，计算转速、推力、合力合矩和刚体响应，位置与姿态成为模型输出，因而可以预测未事先规定的轨迹。
- **闭环验证：**控制器利用观测误差持续调整输入，实际运动由控制器、载具、环境和观测共同形成；闭环响应不能单独归因于机体模型。
- **本章分工：**本节用预先给定的推力研究载具响应，后续再接入执行器与控制系统；第五章展开控制器、滤波器与控制分配设计。

模型保留哪些动态，取决于它要回答的工程问题。

4.1 运动建模基础与运动学

4.1.1 建模方法与统一框架：运动结果预览

一架四旋翼的推力怎样变成运动

机身已回平：已有速度仍然保留

总推力 19.6 N 俯仰力矩 +0.00 N·m

高度 / m

3

2

1

0

俯仰角：+0.0°

北向位置 / m

0

2

4



高度 / m

2

1.5

1

向北位置 / m

4

2

0

0

2

4

时间 / s

t = 5.80 s

1.68

4.00

图：给定四桨推力，计算同一机体的升降、倾斜与平移。

运动模型根据输入和初态，逐步算出位置、速度和姿态。

4.1 运动建模基础与运动学

4.1.1 建模方法与统一框架：基于模型的设计

模型贯穿设计、实现与实物测试

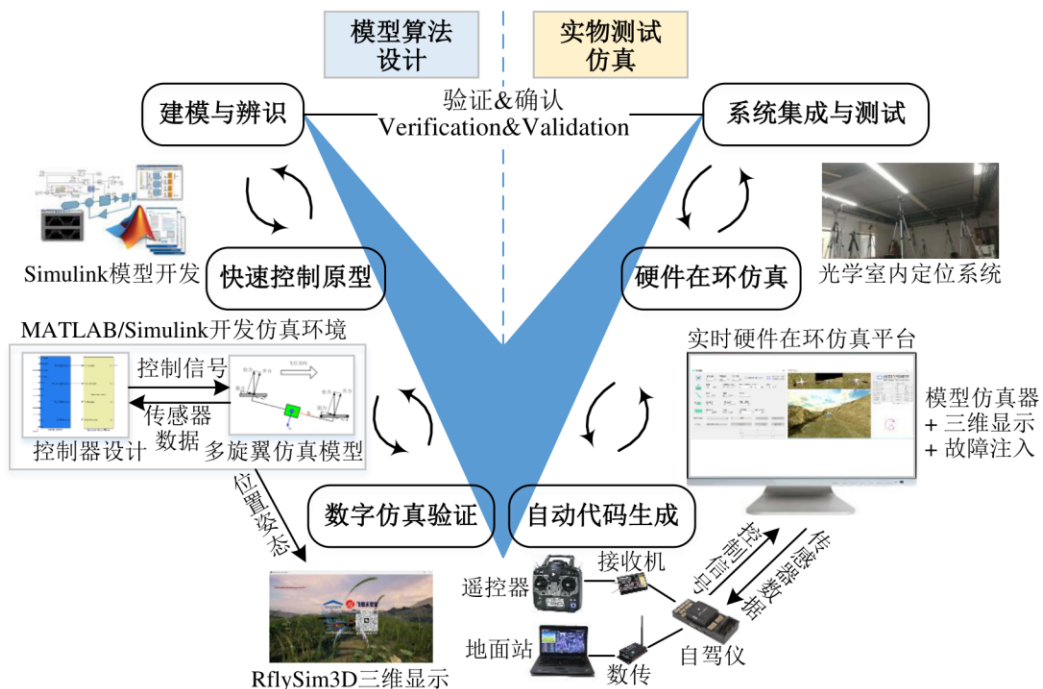


图4.1 RflySim工具链MBD流程框图

- **基于模型的设计 (MBD)：** 用模型串起设计到测试，偏差回头修正模型和参数。
- **左侧模型阶段：** 建模与辨识→快速控制原型→数字仿真验证。
- **右侧实物阶段：** 自动代码生成→硬件在环仿真→系统集成与测试；同一输入的测试偏差带回模型。

模型预测 → 同输入测试 → 偏差回溯

模型贯穿设计与测试，实物证据又反过来修正模型。

4.1 运动建模基础与运动学

4.1.1 建模方法与统一框架：系统拓扑分解与连接框架

统一系统结构怎样适用于不同载具

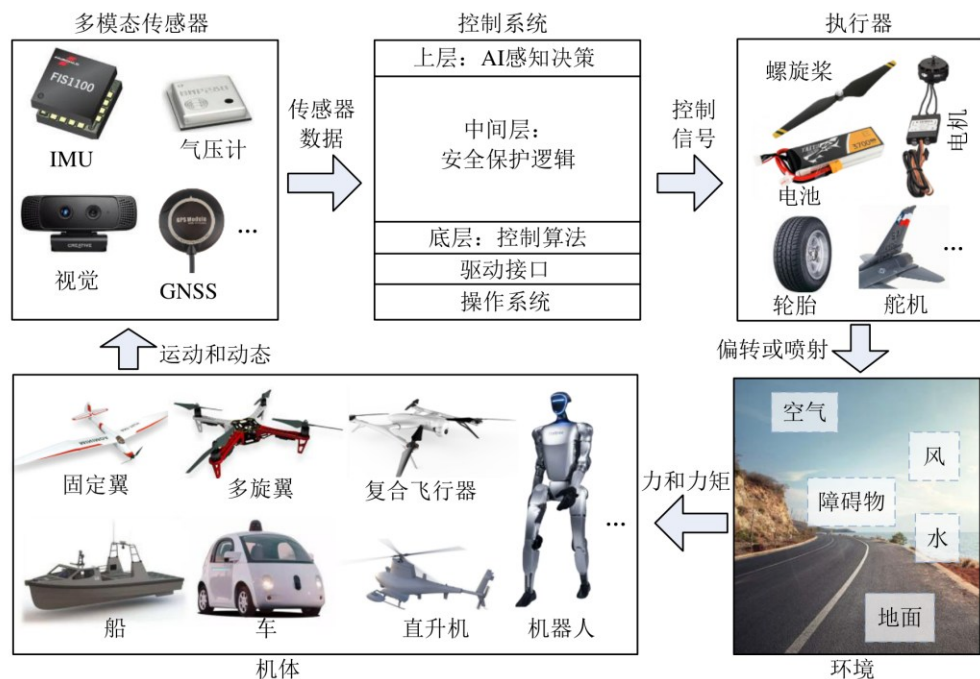


图4.2 不同无人载具的共同系统结构

统一框架统一子系统职责，载具差异落实到具体物理关系。

- **指令路径**：沿图4.2由控制系统走向执行器，指令先形成转速或转角，随后才转换成作用于机体的力。
- **反馈路径**：从机体运动回看环境与传感器；来流、接触和观测会随运动变化，使同一指令产生不同响应。
- **共性与差异**：飞机、车、船保留图中的子系统职责，但分别使用升力、轮胎力和水动力方程；决策与控制仍归控制系统。

4.1 运动建模基础与运动学

4.1.1 建模方法与统一框架：组件与等效刚体

实体拆分怎样变成数学模型及参数

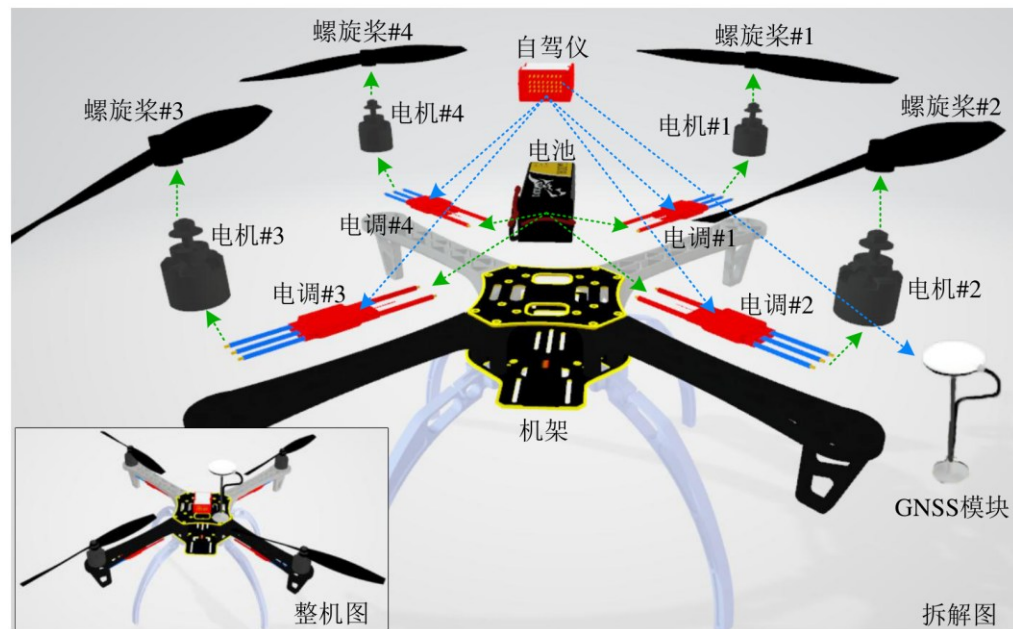


图4.4 多旋翼无人机实体组件
拓扑分解与连接

- **动力链：** 电池、电调、电机和螺旋桨按图连接，供电与指令共同决定转速和推力；连接关系就是组件的输入输出关系。
- **刚体等效：** 固定连接的机架、电池和载荷可合并为总质量、质心与惯量；安装位置决定力臂，有相对运动时再增加状态。
- **换电池例子：** 质量与安装位置改变惯性，电压与内阻改变动力输出；因此同一指令也可能产生不同运动。

实体连接给出模型接口，研究任务决定组件保留到多细。

4.1 运动建模基础与运动学

4.1.1 建模方法与统一框架：动力链部件

沿机臂读出动力链：电池、电调、电机与螺旋桨

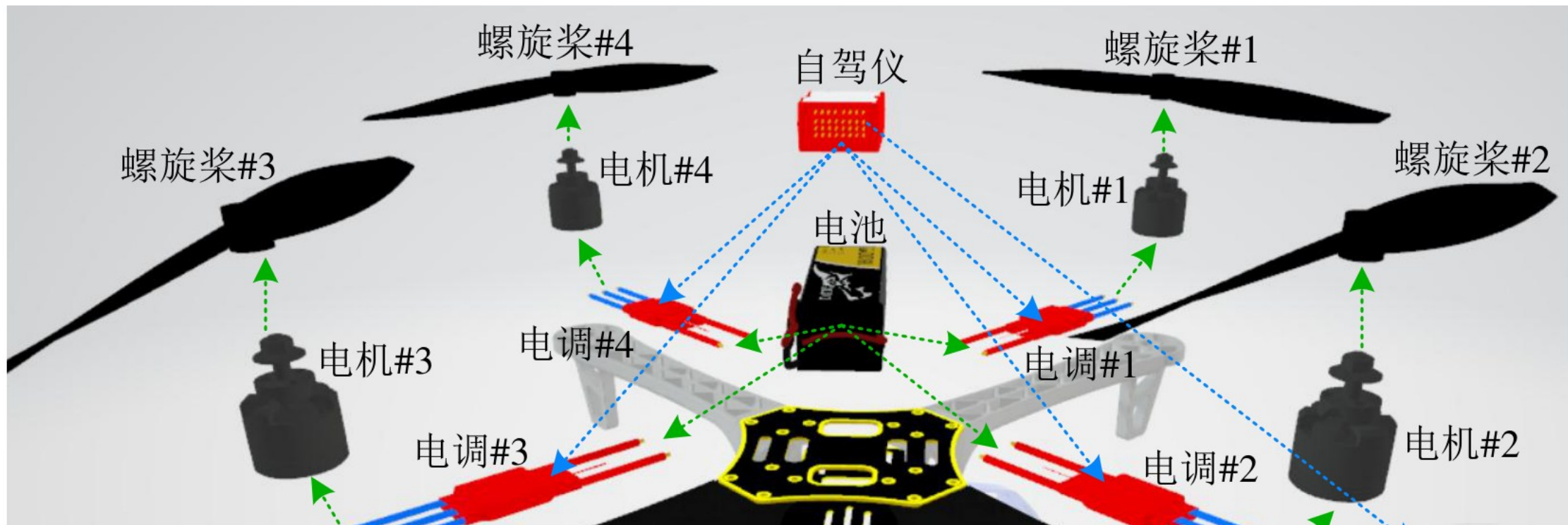


图4.4（局部放大）蓝色虚线：自驾仪发给电调的指令；绿色虚线：供电与动力传递

4.1 运动建模基础与运动学

4.1.1 建模方法与统一框架：组件标准化模型描述

运动、能耗与故障怎样在组件内耦合

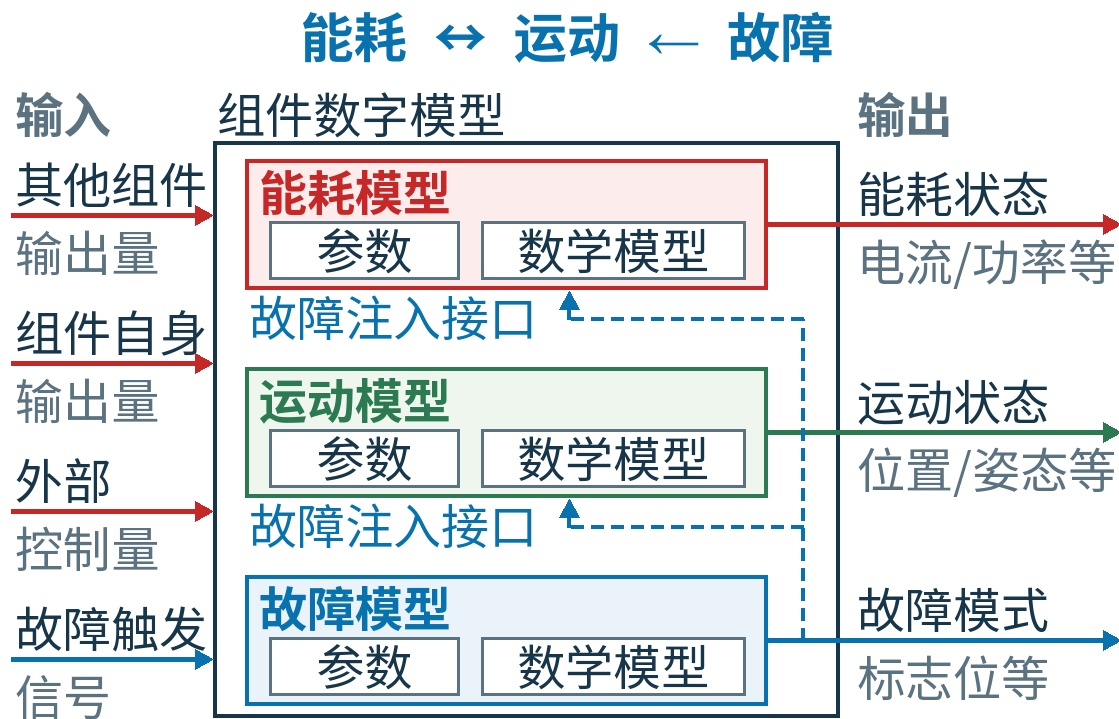


图4.5 组件标准化模型示例

- **运动与能耗：**运动模型计算转速或位姿，能耗模型计算电流、功率与能源状态；任务改变负载，供电又约束可用动力。
- **故障作用：**故障通过接口改变参数或作用关系。例如电机效率下降会降低推力，并改变维持同一运动所需的功率。
- **读图方法：**沿共享变量看耦合关系。电量消耗导致电压下降，进而改变运动响应；完整能源与寿命分析可继续扩展。

组件的运动、能耗和故障通过共同变量发生耦合。

4.1 运动建模基础与运动学

4.1.1 建模方法与统一框架：组件到整机

相同拓扑把三类组件模型装成不同整机模型

- 组件标准模型记录参数、输入输出、适用工况与验证数据；按机架、电池、电调、电机和桨的实际拓扑连接，才得到整机响应。
- 拓扑+能耗模型：把各部件的电流、功率与能源状态连接起来，回答续航和供电约束；换电池时不能只改质量。
- 拓扑+运动模型：把各桨作用、环境与刚体方程连接起来，预测状态并支撑控制仿真；本章重点展开这一条。
- 拓扑+故障模型：把效率降低或失效传到受力与能耗，形成测试工况。离线部件自检核对给定模型与数据，整机认证还需仿真与试验证据。

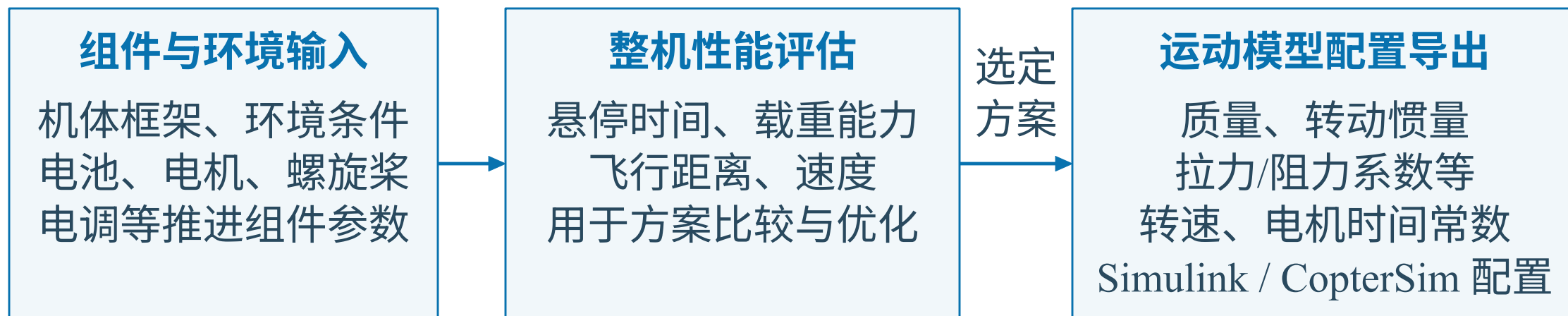
先保持组件接口和证据，再按问题装配所需的整机模型。

4.1 运动建模基础与运动学

4.1.1 建模方法与统一框架：FlyEval教材案例

FlyEval：组件选型、整机评估与参数导出

飞行评估（FlyEval）以标准组件数据库支撑整机设计。教材第4.1.2.3节。

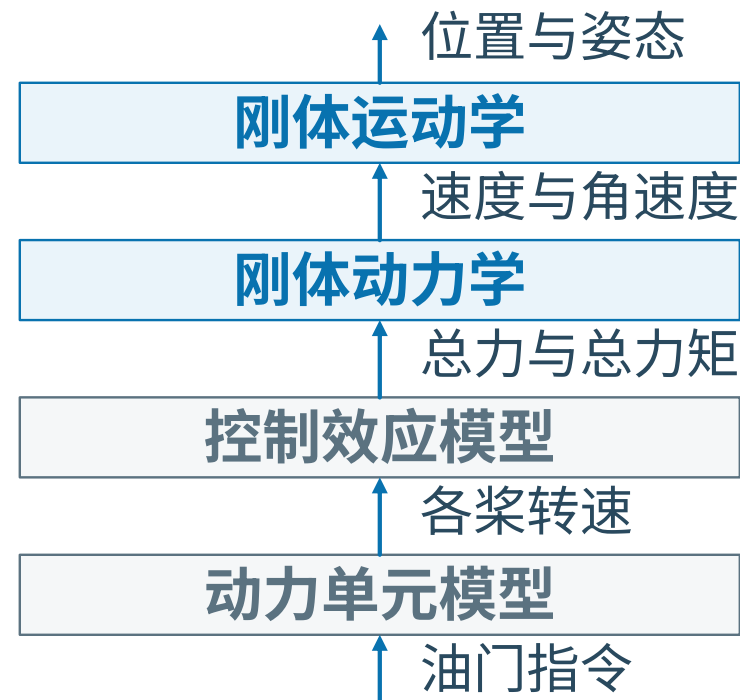


约束反选组件：给定期望悬停时间、任务载重、温度/海拔和电池参数，逆向求解并推荐满足性能阈值的组件组合，再做方案评估。

4.1.1 建模方法与统一框架：分层计算

用四层模型追踪油门怎样变成运动

- **动力单元：**油门决定电机的目标转速，转动惯量和电控使实际转速逐渐变化。
- **控制效应：**旋翼转速决定推力；安装位置和旋向决定关于质心的力矩。
- **刚体运动：**动力学求速度与角速度的变化；运动学用它们更新位置和姿态。



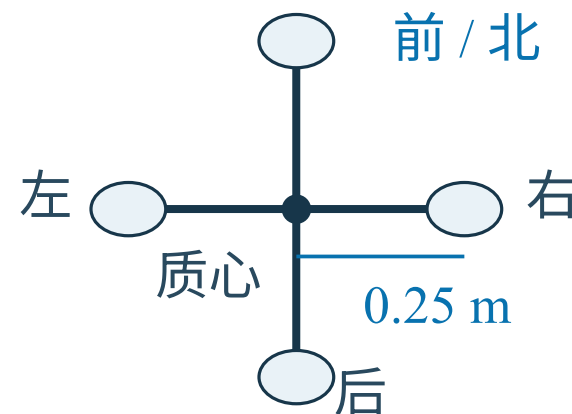
图：四层运动模型

从油门到位置的每一次转换，都需要一层可解释的模型。

4.1.1 建模方法与统一框架：参数与初始条件

贯穿案例的对象、参数与简化条件

- **对象与初态：**理想“+”构型四旋翼，机头朝北、机体水平；初高1 m，速度和角速度均为零，机体原点取质心。
- **教学参数：** $m = 2 \text{ kg}$ ， $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ ；旋翼力臂均为0.25 m，俯仰惯量 $J_y = 0.05 \text{ kg m}^2$ 。
- **输入与输出：**按前、右、后、左给定四桨推力，计算位置、速度、姿态和角速度。命令到推力的过程在4.3展开。
- **算例简化：**教材考虑阻力与旋转阻尼，本例为解析核验将其取零。机架为刚体，质量、惯量不变；不计旋翼响应与触地，对称输入只激励俯仰。
- **坐标：**原点在起点下方，北东地（NED）下为正； $z_D = -1 \text{ m}$ ， $H = -z_D = 1 \text{ m}$ 。



图：俯视构型与旋翼力臂

先确定对象和工况，再用模型预测指定输入下的响应。

4.1 运动建模基础与运动学

4.1.1 建模方法与统一框架：教学模型一步计算

给定推力时，先算加速度再更新状态

- 已知条件：垂直一维； $m=2\text{ kg}$ ， $g=9.8\text{ m/s}^2$ ， $T=21.6\text{ N}$ 。NED向下为正；初高1 m、初速0，步长0.01 s；本例不计电机动态、阻力、触地和控制。

$$a_D = g - \frac{T}{m} = 9.8 - \frac{21.6}{2} = -1\text{ m/s}^2$$

$$z_{D,k+1} = z_{D,k} + \Delta t v_{D,k} = -1 + 0.01 \times 0 = -1\text{ m}$$

$$v_{D,k+1} = v_{D,k} + \Delta t a_{D,k} = 0 + 0.01 \times (-1) = -0.01\text{ m/s}$$

- 同步更新：**位置式和速度式的右侧均取同一时刻的旧状态。
- 本步结果：**高度仍为1 m，速度为-0.01 m/s；下一步才改变位置。
- 模型范围：**只含竖直运动，是课堂练习一维升降例程的第一步。

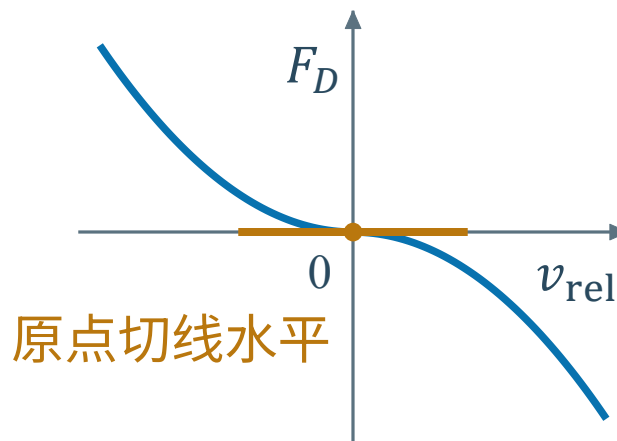
4.1.1 建模方法与统一框架：平方阻力的局部近似

无风悬停附近，平方阻力为何没有一阶贡献

- **工作点：**无风且静止悬停时，载具相对空气的速度为零。先用一维相对空气速度 v_{rel} 说明阻力关系。

$$F_D = -k v_{\text{rel}} |v_{\text{rel}}| \quad (k > 0)$$

- **平方关系：** k 为有限常数时，阻力大小与空速平方成正比。空速减半，阻力变为四分之一。



图：一维平方阻力示意

- **一阶近似：**用原点水平切线代替曲线，因此小空速扰动时可忽略该阻力。
- **适用边界：**线性气动阻力在零空速附近仍有一阶项，旋转阻尼在零角速度附近也可有一阶项；本算例把两者设为零。

零空速附近的平方阻力没有一阶项，其他气动作用仍需判断。



4.1 运动建模基础与运动学



本章目录

模型框架、坐标与姿态运动学

第四章 载具运动建模与仿真

4.1 运动建模基础与运动学

- 4.2 刚体动力学与运动求解
- 4.3 动力单元、受力与观测建模
- 4.4 配平、线性化与动态系统基础
- 4.5 多旋翼模型逐步编程与仿真
- 4.6 参数测量与静态模型辨识
- 4.7 动态系统辨识、验证与模型修正
- 4.8 典型无人载具建模与扩展
- 4.9 建模工具、代码生成与模型部署
- 4.10 API与SDK建模接口
- 4.11 例程体系与综合实践
- 4.12 习题案例分析与课程设计

首单元教材：4.1.1.1-2、4.1.2.1-4
4.1.3.1-2；模型分类另见4.2.2.1

本节 5 个教学单元

4.1.1 建模方法与统一框架

教材对应：详见左栏下方首单元细目

4.1.2 坐标、旋转矩阵与欧拉角

教材对应：第4.1.4.1节（坐标、旋转矩阵与欧拉角）

4.1.3 四元数与表示转换

教材对应：第4.1.4.1节（四元数与姿态表示）

4.1.4 姿态运动学

教材对应：第4.1.4.1节（旋转运动学方程）

4.1.5 位置、安装点与坐标约定

教材对应：第4.1.4.1节（位置运动学与坐标约定）



4.1 运动建模基础与运动学

4.1.2 坐标、旋转矩阵与欧拉角：轴向与原点

坐标向量要同时交代原点、轴向和单位

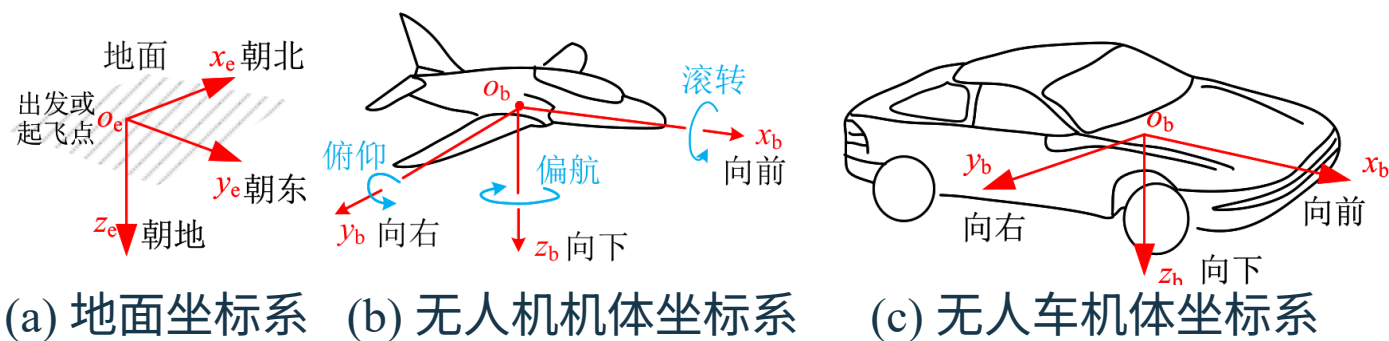


图1.9 地面坐标系与机体坐标系

- **机体系：**前右下（FRD）以质心为原点，随载具一起转动。飞机、车辆都可使用这套约定；机体前向仅在特定姿态下与北向重合。
- **前置：**图1.9取自教材第1章，课件1.4已介绍这两套坐标；本单元转为计算与核验。

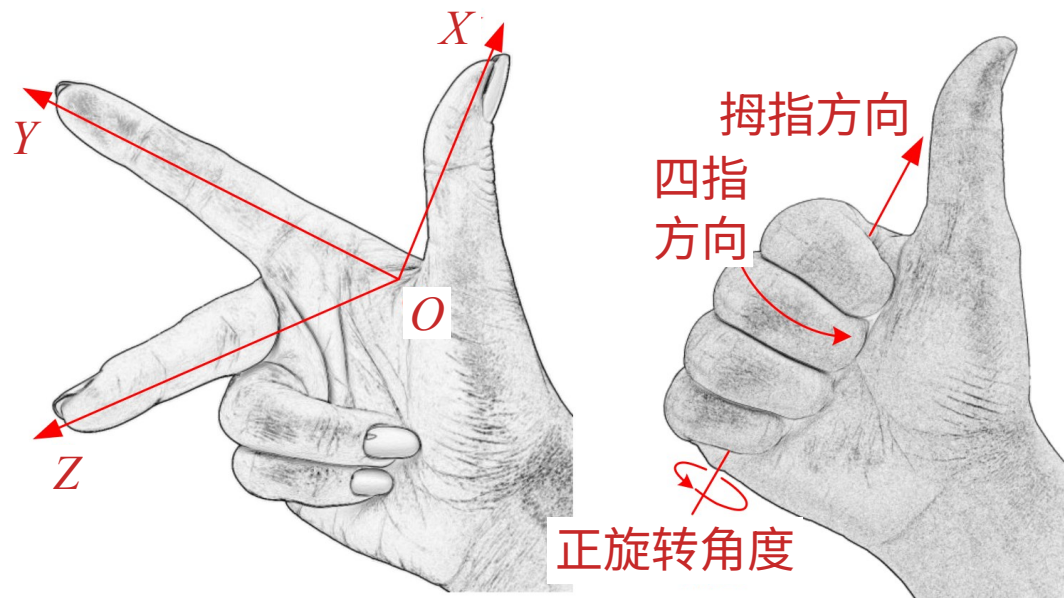
- **地面系：**北东地（NED）以指定参考点为原点，轴向为北、东、下。高于原点10 m，第三分量为-10 m。

- **尺度与单位：**局部地面系近似固定；地心地固系（ECEF）原点在地心。经纬度是角度，角度差不能直接当作米制位移。

4.1 运动建模基础与运动学

4.1.2 坐标、旋转矩阵与欧拉角：右手坐标

右手规则同时确定轴关系与正旋转



(a) 坐标轴

(b) 旋转正方向

图1.10 右手定则下的坐标轴与旋转正方向

- **右手轴系：**NED与FRD都是右手系：拇指、食指、中指依次指第一、二、三轴；拇指沿正轴时，四指弯曲方向为正转向。
- **姿态动作：**正滚转右侧下沉，正俯仰抬头；机头朝北时，正偏航转向东。
- **计算单位：**三角函数输入用弧度，度数须按下式换算。

$$\alpha_{\text{rad}} = \alpha_{\text{deg}} \frac{\pi}{180}$$

轴的正方向确定以后，正旋向由右手规则唯一确定。

4.1.2 坐标、旋转矩阵与欧拉角：向量运算先修

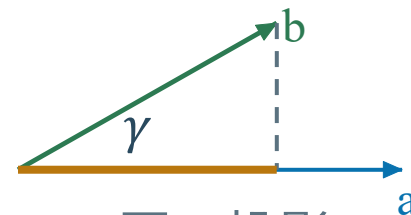
点乘与叉乘分别描述投影和有向面积

- **点乘**：结果是标量，表示投影关系； γ 为非零向量夹角。分量须在同一坐标系，垂直时为零、交换次序不变。

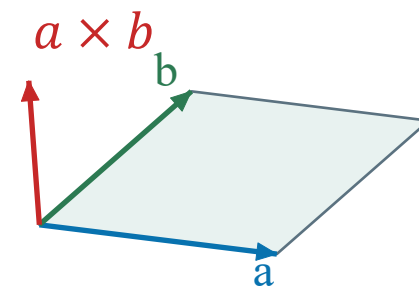
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \gamma$$

- **叉乘**：结果垂直于两向量平面，大小等于平行四边形面积，方向按右手规则；平行时为零、换序反向。前轴叉乘右轴得到下轴。

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z$$



图：投影



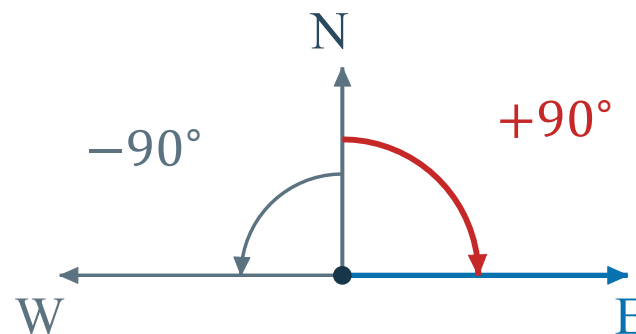
图：叉乘垂直于平面

点乘给出投影关系，叉乘给出右手方向与有向面积。

4.1.2 坐标、旋转矩阵与欧拉角：偏航矩阵与方向

偏航使水平机头由北向东转动

- 偏航绕下轴转动， R_z 第三列不变；北、东分量按正弦余弦组合，竖直分量保持不变。
- 方向核验：** $\psi = 90^\circ$ 将最初指北的前轴映到东； $\psi = -90^\circ$ 则映到西。正负角改变实际转向。
- 逆向辨析：** 转置对应相反偏航角。前向若映到西，说明变换方向用反，正交性本身不能检出。



D 入纸面

图：俯视正偏航转向东

$$R_z(\psi) = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_z(90^\circ)\mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y$$

正偏航沿下轴右手方向转动，使朝北的机头向东转。

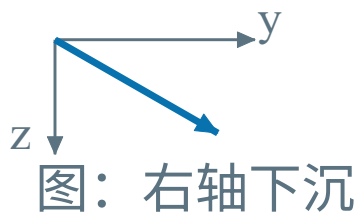
4.1 运动建模基础与运动学

4.1.2 坐标、旋转矩阵与欧拉角：单轴旋转

滚转与俯仰矩阵从平面旋转得到

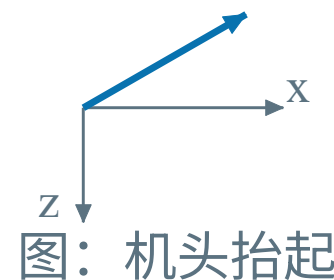
- **共同结构：**绕某轴旋转时，这根轴保持不变，另外两个方向按平面旋转组合；对角项为余弦，交叉项的正负由右手方向决定。

- **滚转：** R_x 保留前轴；右轴正转后出现正下向分量，右侧机臂下沉。



$$R_x(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix},$$

- **俯仰：** R_y 保留右轴；前轴正转后下向分量为负，即机头抬起。



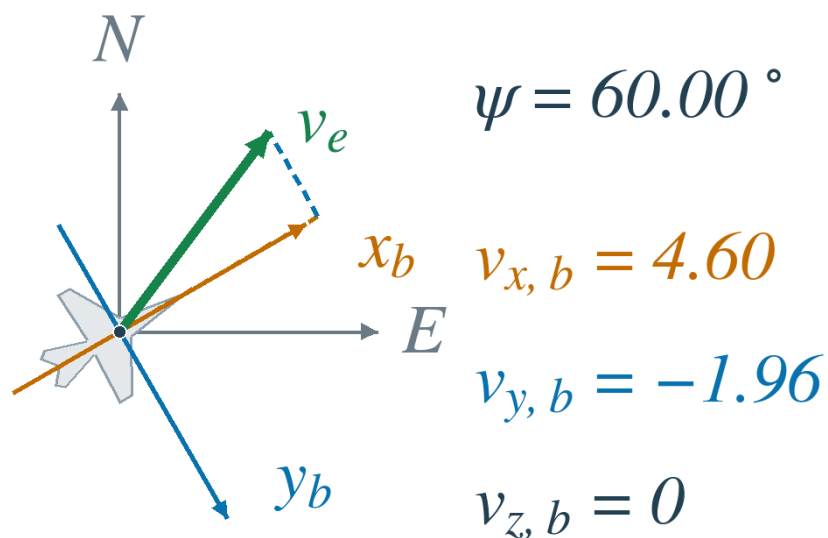
$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

单轴矩阵的符号，可以用右手旋向与一个单位轴共同检查。

4.1 运动建模基础与运动学

4.1.2 坐标、旋转矩阵与欧拉角：机体到地面

旋转矩阵的列给出机体三根轴的方向



$$\|v_e\| = \|v_b\| = 5 \text{ m/s}$$

图：固定速度的坐标分量（动画）

- **读图条件：** 机体偏航 $0^\circ \rightarrow 60^\circ$ ，地面速度 $v_e = [4, 3, 0]^T \text{ m/s}$ 固定；变化的是机体系分量，其平方和保持25。
- **逆变换：** R^T 将地面速度换成机体分量，再乘 R 返回原向量。 R 的三列是机体前、右、下轴的地面方向。
- **共同用途：** 速度和力都用 R 换坐标。合力须先统一坐标再相加。

$$a_e = R a_b, \quad R = [\hat{x}_{b,e} \quad \hat{y}_{b,e} \quad \hat{z}_{b,e}]$$

机体到地面的旋转矩阵，由机体三轴在地面系中的方向组成。

4.1 运动建模基础与运动学

4.1.2 坐标、旋转矩阵与欧拉角：向量变换的算例

同一姿态矩阵可以转换速度、推力和其他向量

- **统一作用：** R 把机体分量转到地面，速度与力共用同一套方向关系；换坐标本身不改变速度，也不增加推力。
- **理论算例：**机头朝东。机体前向5 m/s变成东向5 m/s；前向2 N、向上10 N的力变成东向2 N、向上10 N。
- **相加条件：**重力、推力先统一坐标再相加。力的模长仍为 $\sqrt{104}$ N，单位与速度不同。

N ↑ 机头朝东 →
速度 5 m/s

水平力 2 N

向上10 N不变

图：同向映射，物理量不同

$$R = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_e = (0, 5, 0)^T \text{ m/s}, \quad \mathbf{F}_e = (0, 2, -10)^T \text{ N}$$

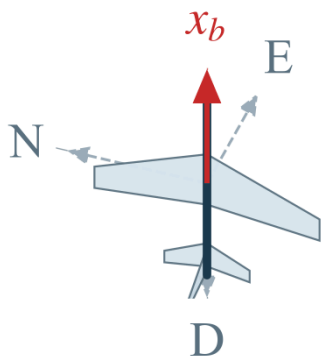
合力计算之前先统一坐标，姿态矩阵同时适用于速度与力。

4.1 运动建模基础与运动学

4.1.2 坐标、旋转矩阵与欧拉角：旋转不可交换

相同的两个角度，交换次序会产生不同姿态

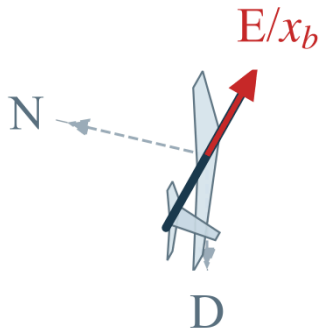
$$R_z(\alpha)R_y(\beta)$$



机头 $x_b = -D$

$$\alpha = 90^\circ, \quad \beta = 90^\circ$$

$$R_y(\alpha)R_z(\beta)$$



机头 $x_b = E$

图：旋转次序影响姿态（动画）

- **内禀过程：**左图先绕初始 z 轴、再绕当前 y 轴；右图先绕初始 y 轴、再绕当前 z 轴，两次都转 90° 。
- **读图：**第二次转轴已随第一次改变，左侧机头最终向上，右侧朝东。
- **公式关系：** R 将机体分量转到地面；按列向量计算时，矩阵从右向左作用。

$$R_z(90^\circ)R_y(90^\circ)\mathbf{e}_x = -\mathbf{e}_z$$

$$R_y(90^\circ)R_z(90^\circ)\mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y$$

不同轴的旋转不能随意交换次序，多轴算例才能检出顺序错误。

4.1 运动建模基础与运动学

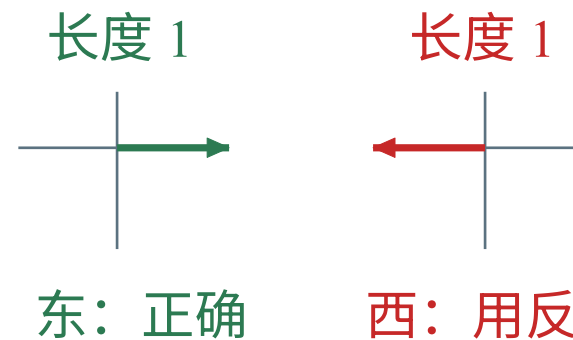
4.1.2 坐标、旋转矩阵与欧拉角：正交性与逆变换

合法的旋转矩阵还要用在正确方向上

- **几何约束：**机体三轴两两垂直且长度为1，故 $R^T R = I$ ； $\det R = 1$ 保持右手方向并排除镜像。

$$R^T R = I, \quad \det R = 1, \quad R^{-1} = R^T, \quad \mathbf{a}_b = R^T \mathbf{a}_e, \quad \|\mathbf{a}_e\| = \|\mathbf{a}_b\|$$

- **逆变换：**正交矩阵的逆等于转置。地面分量左乘 R^T 恢复机体分量，向量长度不变。
- **方向辨析：** R 与 R^T 都能通过正交和往返检查；已知机头朝东时，前向必须映到东。右图两个结果都长1，只有一个方向正确。



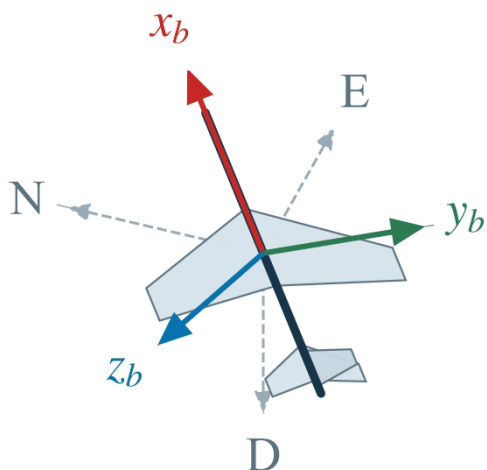
图：长度相同，方向可错

正交性检查矩阵是否合法，已知方向检查变换是否用对。

4.1 运动建模基础与运动学

4.1.2 坐标、旋转矩阵与欧拉角：Z-Y-X约定

三个欧拉角必须连同旋转顺序一起定义



三步完成

1. 偏航 $\psi = 45.0^\circ$
当前 z_b
2. 俯仰 $\theta = 30.0^\circ$
当前 y_b
3. 滚转 $\phi = 20.0^\circ$
当前 x_b

- **旋转约定：**依次绕当前下轴偏航 ψ 、当前右轴俯仰 θ 、当前前轴滚转 ϕ ，称为内禀 ZYX。
- **图中演示：**偏航 45° 、俯仰 30° 、滚转 20° ；后两次的转轴已随前一次转动。
- **读式方法：**正向取右手规则， R 将机体分量转到地面；列向量运算时最右矩阵先作用。

$$R = R_z(\psi)R_y(\theta)R_x(\phi)$$

图：按当前机体轴依次旋转（动画）

欧拉角只有与旋转顺序、正方向和变换方向一起给出才完整。

4.1 运动建模基础与运动学

4.1.2 坐标、旋转矩阵与欧拉角：Z-Y-X完整公式

完整姿态矩阵可以逐列解释

- **公式来源：**将三个单轴矩阵按 $R_z R_y R_x$ 相乘，得到机体到地面的完整方向映射；记号 $c_\alpha = \cos\alpha$ ， $s_\alpha = \sin\alpha$ ，均取完整角度（不取半角）。

机头方向

$$R = \begin{bmatrix} c_\psi c_\theta & c_\psi s_\theta s_\phi - s_\psi c_\phi & c_\psi s_\theta c_\phi + s_\psi s_\phi \\ s_\psi c_\theta & s_\psi s_\theta s_\phi + c_\psi c_\phi & s_\psi s_\theta c_\phi - c_\psi s_\phi \\ -s_\theta & c_\theta s_\phi & c_\theta c_\phi \end{bmatrix} \rightarrow \text{下向投影}$$

图：按列与行读矩阵

- **第一列：**表示机头前向，因此只含偏航和俯仰；绕机头自身滚转不会改变机头方向，但会改变右轴和下轴。
- **第三行：**给出三个机体轴的下向分量； $-\sin\theta$ 保留正俯仰抬头的符号。零姿态得到单位矩阵，纯偏航时得到前述 $R_z(\psi)$ 。

4.1 运动建模基础与运动学

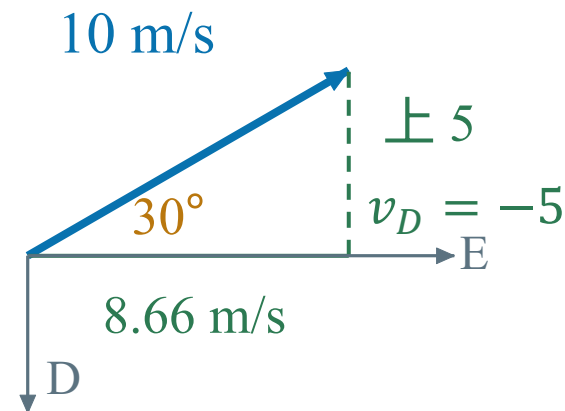
4.1.2 坐标、旋转矩阵与欧拉角：完整计算

双角度算例把姿态与速度方向连起来

- **题设：** $\phi = 0, \theta = 30^\circ, \psi = 90^\circ$ ，机头朝东并抬起 30° ；
已知质心对地速度沿机头 10 m/s 。

$$R = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_e = R \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5\sqrt{3} \\ -5 \end{bmatrix} \text{ m/s}$$

- **速度分解：** 东向 $5\sqrt{3} \approx 8.66 \text{ m/s}$ 、向上 5 m/s ；速度模长仍为 10 m/s 。
- **物理边界：** 速度沿机头是本题的已知条件；姿态只转换分量，真实速度仍由初值与动力学决定。



图：朝东抬头的速度投影

双角度算例同时检查机头方向、竖直符号与速度长度。

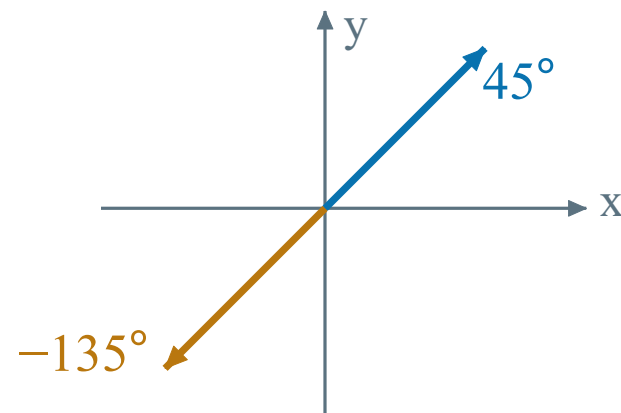
4.1.2 坐标、旋转矩阵与欧拉角：逆变换与象限

从旋转矩阵恢复欧拉角需要限定取值区间

- **俯仰主值：**由 $R_{31} = -\sin\theta$ 取反正弦；限制 $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ ，才能在非奇异区间恢复与 Z-Y-X 定义一致的一组角。

$$\theta = \arcsin(-R_{31}), \quad \phi = \text{atan2}(R_{32}, R_{33}), \quad \psi = \text{atan2}(R_{21}, R_{11})$$

- **象限信息：**图中两箭头的y/x都为1，方向却相差180°；
 atan2 同时保留x、y的符号。
- **适用边界：**俯仰区间不含 $\pm 90^\circ$ 端点；近端点时欧拉角对误差敏感，同一旋转还存在周期等价角。



图：比值相同，象限不同

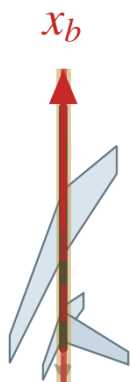
先固定角度区间，再由矩阵分量恢复欧拉角。

4.1 运动建模基础与运动学

4.1.2 坐标、旋转矩阵与欧拉角：俯仰奇异

欧拉奇异是表示方法失去独立性

轴线共线，正向相反



$$x_b = -D$$

D

偏航轴 D

滚转轴 x_b

$$\psi = 30.00^\circ$$

$$\theta = 90.00^\circ$$

$$\phi = 30.00^\circ$$

$$\text{轴线角 } 0.00^\circ$$

姿态不变

$$R(0^\circ, 90^\circ, 0^\circ) = R(30^\circ, 90^\circ, 30^\circ)$$

图：俯仰90°时两转轴共线（动画）

- **奇异位置：**俯仰 $\theta = \pm 90^\circ$ 时，滚转与偏航失去独立区分能力。姿态仍在，失去唯一性的是三角度坐标。
- **读动图：**赭黄线为偏航轴，红虚线为滚转轴；俯仰90°时两轴共线但正向相反，两角同增30°，机体不动。

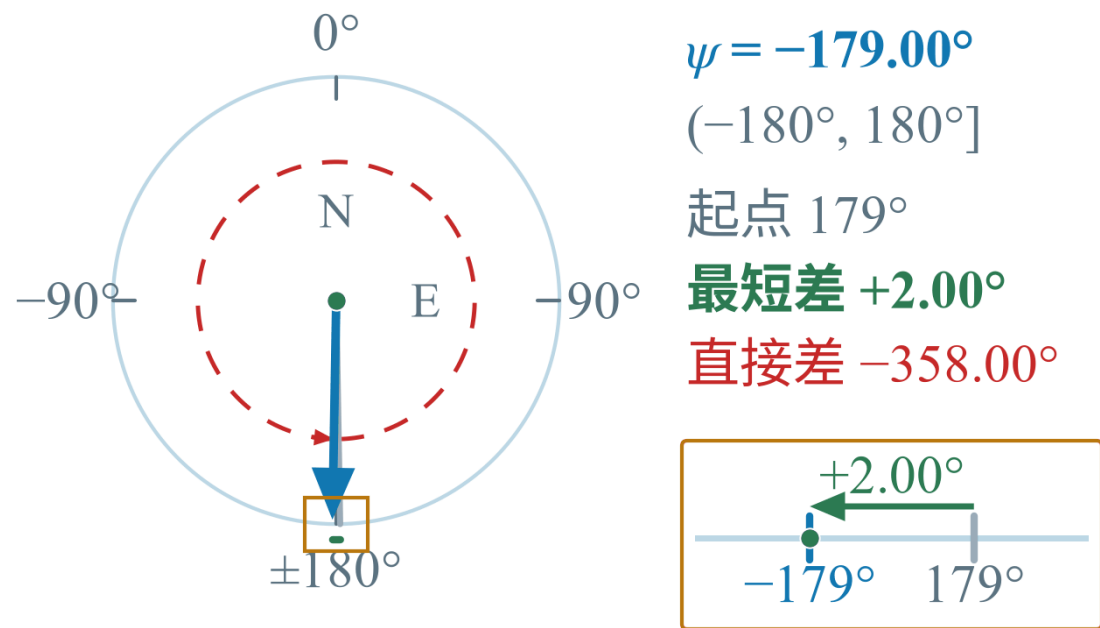
$$R(0^\circ, 90^\circ, 0^\circ) = R(30^\circ, 90^\circ, 30^\circ)$$
- **计算：**邻近此处角度可能剧变，宜改用单位四元数或旋转矩阵连续求解。

欧拉奇异来自表示方法，飞机的物理姿态并未消失。

4.1 运动建模基础与运动学

4.1.2 坐标、旋转矩阵与欧拉角：周期角与最短差角

角度换区间与欧拉奇异是不同问题



- **周期表示：** 偏航显示在 $\pm 180^\circ$ 区间，越界时数值换号，真实方向仍可连续变化。
- **读图：** 179° 到 -179° 是正转 2° ，直接相减得 -358° 。
- **计算含义：** atan2由正弦、余弦取最短有符号差角；换区间不是欧拉奇异。

$$\Delta\psi = \text{atan2}(\sin d, \cos d)$$

$$d = \psi_2 - \psi_1$$

图：连续转向时偏航读数跨界（动画）

角度差要按周期计算，显示数值的跳变可能只是换区间。



4.1 运动建模基础与运动学



本章目录

模型框架、坐标与姿态运动学

第四章 载具运动建模与仿真

4.1 运动建模基础与运动学

- 4.2 刚体动力学与运动求解
- 4.3 动力单元、受力与观测建模
- 4.4 配平、线性化与动态系统基础
- 4.5 多旋翼模型逐步编程与仿真
- 4.6 参数测量与静态模型辨识
- 4.7 动态系统辨识、验证与模型修正
- 4.8 典型无人载具建模与扩展
- 4.9 建模工具、代码生成与模型部署
- 4.10 API与SDK建模接口
- 4.11 例程体系与综合实践
- 4.12 习题案例分析与课程设计

首单元教材：4.1.1.1-2、4.1.2.1-4
4.1.3.1-2；模型分类另见4.2.2.1

本节 5 个教学单元

4.1.1 建模方法与统一框架

教材对应：详见左栏下方首单元细目

4.1.2 坐标、旋转矩阵与欧拉角

教材对应：第4.1.4.1节（坐标、旋转矩阵与欧拉角）

4.1.3 四元数与表示转换

教材对应：第4.1.4.1节（四元数与姿态表示）

4.1.4 姿态运动学

教材对应：第4.1.4.1节（旋转运动学方程）

4.1.5 位置、安装点与坐标约定

教材对应：第4.1.4.1节（位置运动学与坐标约定）



4.1 运动建模基础与运动学

4.1.3 四元数与表示转换：从表示走向运动学

三种姿态表达在同一模型中分工协作

欧拉角 (ϕ, θ, ψ)

- 3个角，直观易读
- 设定初姿态与显示
- 开篇动图俯仰约 -10.3°
- 俯仰 $\pm 90^\circ$ 附近奇异

旋转矩阵 R

- 9个元素
- 正交且行列式为1
- 直接变换速度与推力
- 仍只有3个自由度

单位四元数 q

- 4个分量，单位范数
- q 与 $-q$ 同一姿态
- 连续积分无欧拉奇异
- 乘法次序须统一

欧拉角初姿态

四元数 q

旋转矩阵 R

地面系推力/速度

欧拉角显示

图：同一姿态的保存、运算与显示

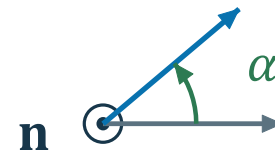
用欧拉角读姿态，用矩阵换坐标，用单位四元数承接姿态计算。

4.1 运动建模基础与运动学

4.1.3 四元数与表示转换：轴角与单位约束

单位四元数把旋转轴和半角写成四个分量

- **固定约定：** Hamilton 四元数标量在前， $\mathbf{q} = [q_0, q_1, q_2, q_3]^T$ ，与 R 一样描述机体到地面的姿态。



图：旋转轴与转角

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_0 \\ \mathbf{q}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha/2) \\ \mathbf{n} \sin(\alpha/2) \end{bmatrix}, \quad \|\mathbf{n}\| = 1, \quad q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$$

- **轴角含义：** $\mathbf{n}$ 为单位旋转轴， α 为右手转角；标量取半角余弦，向量沿 $\mathbf{n}$ 分配半角正弦。
- **单位约束：** 四分量仅含三个独立自由度，零旋转为 $[1, 0, 0, 0]^T$ 。单位四元数可跨欧拉奇异位置连续表示姿态，乘法仍须有序。

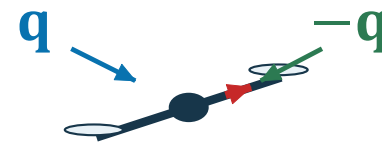
单位四元数用四个受约束的分量表示三个姿态自由度。

4.1 运动建模基础与运动学

4.1.3 四元数与表示转换：四元数约束与连续性

正负等价与归一化分别解决什么问题

- **两组数、一个姿态：** $\mathbf{q}$ 与 $-\mathbf{q}$ 表示同一空间朝向；插值或比较相邻四元数时，应先处理这种正负等价，不能把整体变号当成突然旋转。



图：正负等价

$$R(\mathbf{q}) = R(-\mathbf{q}), \quad \mathbf{q}_{\text{unit}} = \mathbf{q}_{\text{raw}} / \|\mathbf{q}_{\text{raw}}\| \quad (\|\mathbf{q}_{\text{raw}}\| > 0), \quad (1, 0, 0, 1)^T \mapsto (1, 0, 0, 1)^T / \sqrt{2}$$

- **恢复单位长度：**非零四元数可除以范数；零四元数无法归一化，也不能表示姿态。理论算例 $[1, 0, 0, 1]^T$ 归一化后表示正偏航 90° 。
- **处理边界：**归一化只恢复约束，不纠正坐标方向、乘法次序或转角误差。比较姿态时须考虑正负等价，不能直接用四分量之差判断。

四元数整体变号不改变姿态，归一化只恢复长度约束。

4.1 运动建模基础与运动学

4.1.3 四元数与表示转换：四元数乘法

Hamilton 乘法把点乘、叉乘与标量组合起来

- **分量记号：** p_0 、 q_0 为标量， $\mathbf{p}_v$ 、 $\mathbf{q}_v$ 为三维向量； $\otimes$ 表示 Hamilton 乘法，并非四个分量逐项相乘。

$$\mathbf{p} \otimes \mathbf{q} = \begin{bmatrix} p_0 q_0 - \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{q}_v \\ p_0 \mathbf{q}_v + q_0 \mathbf{p}_v + \mathbf{p}_v \times \mathbf{q}_v \end{bmatrix}$$

- **计算结构：** 标量项是两个标量的乘积减去点乘；向量项是两项标量与向量的乘积，再加 $\mathbf{p}_v \times \mathbf{q}_v$ 。
- **组合顺序：** 叉乘换序反向，因此一般 $\mathbf{p} \otimes \mathbf{q} \neq \mathbf{q} \otimes \mathbf{p}$ 。单位四元数的有序乘积表示旋转组合，次序与对应旋转矩阵一致。

Hamilton 乘法同时组合标量、点乘和叉乘，顺序参与决定结果。

4.1.3 四元数与表示转换：旋转作用与逆

共轭夹乘给出与矩阵一致的向量旋转

- **纯向量四元数**：把 $\mathbf{a}$ 写成 $[0, a_x, a_y, a_z]^T$ ，标量补零作为运算容器； $\mathbf{a}$ 本身不必是单位向量。

$$\mathbf{a}_e = \mathbf{q} \otimes \mathbf{a}_b \otimes \mathbf{q}^*, \quad \mathbf{q}^* = (q_0, -q_1, -q_2, -q_3)^T = \mathbf{q}^{-1} (\|\mathbf{q}\| = 1)$$

- **旋转约定**： $\mathbf{q}$ 在左、 $\mathbf{q}^*$ 在右夹乘，输出同一向量的地面分量，与 $\mathbf{a}_e = R\mathbf{a}_b$ 等价。

- **共轭与逆**：单位 $\mathbf{q}$ 的共轭才等于逆；交换夹乘两侧可反向变换，向量长度保持不变。



$$\mathbf{a}_b = [1, 0, 0]^T$$

$$\mathbf{a}_e = [0, 1, 0]^T$$

图：同一向量，两种分量

主动旋转的夹乘顺序与机体到地面的变换方向保持一致。

4.1 运动建模基础与运动学

4.1.3 四元数与表示转换：四元数到矩阵

四元数展开为完整旋转矩阵

- **公式来源：**展开 $\mathbf{q} \otimes [0, \mathbf{a}_b] \otimes \mathbf{q}^*$ ，收集 $\mathbf{a}_b$ 的三个分量系数即得 $R(\mathbf{q})$ ，方向为机体到地面。

$$R(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 1 - 2(q_2^2 + q_3^2) & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 1 - 2(q_1^2 + q_3^2) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & 1 - 2(q_1^2 + q_2^2) \end{bmatrix}$$

- **成立条件：**该式已使用 $q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$ ；范数漂移时直接代入，矩阵可能不再正交。
- **读式与用途：**平方项给出同轴投影，交叉项组合不同轴；零旋转 $[1, 0, 0, 0]^T$ 得单位矩阵。速度、推力与观测方向均用这同一变换。

四元数与旋转矩阵是同一姿态的两种表达，变换方向必须相同。

4.1 运动建模基础与运动学

4.1.3 四元数与表示转换：欧拉角到四元数

欧拉角按既定次序组合成四元数

- **组合原则：**三个单轴四元数按 $\mathbf{q} = \mathbf{q}_z(\psi) \otimes \mathbf{q}_y(\theta) \otimes \mathbf{q}_x(\phi)$ 相乘，顺序对应 $R_z R_y R_x$ 。

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} C_\psi C_\theta C_\phi + S_\psi S_\theta S_\phi \\ C_\psi C_\theta S_\phi - S_\psi S_\theta C_\phi \\ C_\psi S_\theta C_\phi + S_\psi C_\theta S_\phi \\ S_\psi C_\theta C_\phi - C_\psi S_\theta S_\phi \end{bmatrix}$$

- **半角记号：** $C_\alpha = \cos(\alpha/2)$ 、 $S_\alpha = \sin(\alpha/2)$ ；四行依次为 q_0 、 q_1 、 q_2 、 q_3 。
- **使用方式：**欧拉角便于设置初始朝向，再转成四元数保存。三个角全零时得到 $[1, 0, 0, 0]^T$ ；误用整角函数会产生错误姿态。

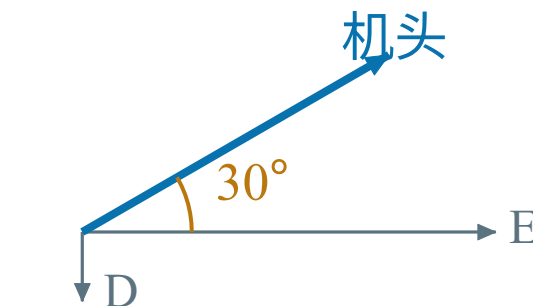
半角正弦与余弦按既定乘法次序组成完整四元数。

4.1.3 四元数与表示转换：代入计算

同一双角度姿态得到怎样的四元数

- **继续理论算例：** $\phi = 0$ 、 $\theta = 30^\circ$ 、 $\psi = 90^\circ$ ，因此半角是 0 、 15° 、 45° ；代入完整半角公式得到下式。

$$\mathbf{q} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \sqrt{3} + 1 \\ -(\sqrt{3} - 1) \\ \sqrt{3} - 1 \\ \sqrt{3} + 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.683013 \\ -0.183013 \\ 0.183013 \\ 0.683013 \end{bmatrix}$$



图：同一朝东抬头姿态

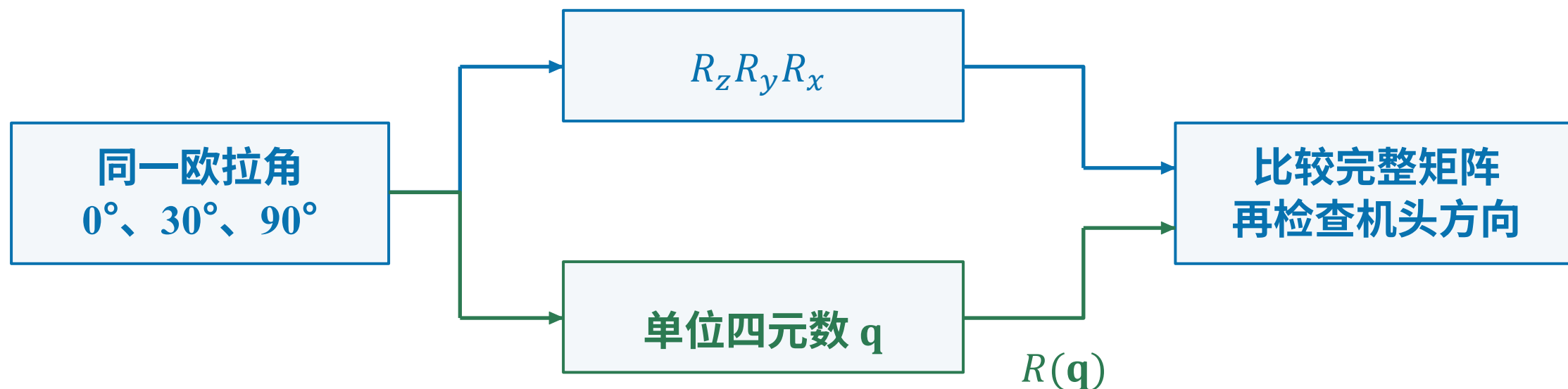
- **数值含义：** 第一项是标量，后三项是向量； q_1 为负、 q_2 为正来自乘法次序。精确根式的平方和为一，小数仅作近似。
- **几何含义：** 机头朝东且抬起 30° ；后续转回矩阵，核验它与欧拉角表达一致。

两个非零角度共同检验半角代入与四元数乘法次序。

4.1 运动建模基础与运动学

4.1.3 四元数与表示转换：图解与核验

同一输入，沿两条路径计算同一姿态



范数与正交性检查“是否合法”；矩阵与方向检查“是否同一姿态”。

图：姿态转换函数的两路交叉核算

完整矩阵相等且物理方向一致，才能说明姿态约定匹配。

4.1 运动建模基础与运动学

4.1.3 四元数与表示转换：代入计算

由欧拉角与四元数交叉核验同一姿态

- **同一题设：** $\phi = 0$ 、 $\theta = 30^\circ$ 、 $\psi = 90^\circ$ ，机头朝东并抬起 30° 。将半角 0° 、 15° 、 45° 代入得到：

$$\mathbf{q} = 1/4 [\sqrt{3} + 1, -(\sqrt{3} - 1), \sqrt{3} - 1, \sqrt{3} + 1]^\top \quad \text{欧拉角} \rightarrow R_z R_y R_x$$

$$\mathbf{q} \approx [0.683013, -0.183013, 0.183013, 0.683013]^\top \quad \text{欧拉角} \rightarrow \mathbf{q} \rightarrow R$$

$$R(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} = R_z(90^\circ)R_y(30^\circ)R_x(0)$$

- **交叉核验：** 范数、正交性检查是否合法；两路矩阵相等且前轴方向一致，才说明约定匹配。前向10 m/s映成东向8.66、向上5 m/s。



4.1 运动建模基础与运动学



本章目录

模型框架、坐标与姿态运动学

第四章 载具运动建模与仿真

4.1 运动建模基础与运动学

- 4.2 刚体动力学与运动求解
- 4.3 动力单元、受力与观测建模
- 4.4 配平、线性化与动态系统基础
- 4.5 多旋翼模型逐步编程与仿真
- 4.6 参数测量与静态模型辨识
- 4.7 动态系统辨识、验证与模型修正
- 4.8 典型无人载具建模与扩展
- 4.9 建模工具、代码生成与模型部署
- 4.10 API与SDK建模接口
- 4.11 例程体系与综合实践
- 4.12 习题案例分析与课程设计

首单元教材：4.1.1.1-2、4.1.2.1-4
4.1.3.1-2；模型分类另见4.2.2.1

本节 5 个教学单元

4.1.1 建模方法与统一框架

教材对应：详见左栏下方首单元细目

4.1.2 坐标、旋转矩阵与欧拉角

教材对应：第4.1.4.1节（坐标、旋转矩阵与欧拉角）

4.1.3 四元数与表示转换

教材对应：第4.1.4.1节（四元数与姿态表示）

4.1.4 姿态运动学

教材对应：第4.1.4.1节（旋转运动学方程）

4.1.5 位置、安装点与坐标约定

教材对应：第4.1.4.1节（位置运动学与坐标约定）



4.1 运动建模基础与运动学

4.1.4 姿态运动学：旋转轴与角率映射

机体角速度为什么不等于欧拉角率

- **物理含义：** p, q, r 是绕当前机体前、右、下三轴的角速度分量；滚转 ϕ 、俯仰 θ 、偏航 ψ 则按 ZYX 次序描述姿态，三次旋转所依据的轴并不全是最终机体轴。
- **映射原因：** 各欧拉角率先投影到同一机体系，再相加形成实际角速度。反向求解得到下式，矩阵随当前姿态变化，陀螺输出因此不能直接逐分量积分为欧拉角。

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin\phi \tan\theta & \cos\phi \tan\theta \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi / \cos\theta & \cos\phi / \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

- **适用条件：** 角度以弧度进入计算， $\cos\theta$ 必须非零；当滚转和俯仰都很小时，映射才近似单位阵，单轴水平算例不能证明一般姿态下也能直接对应。

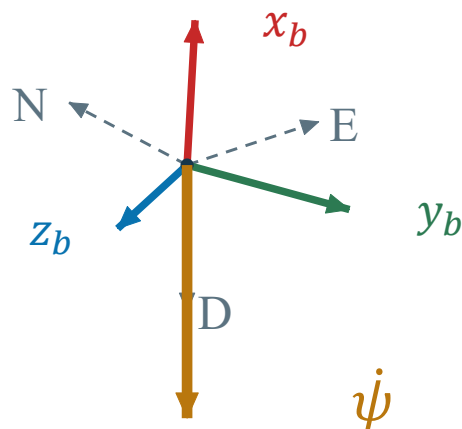
欧拉角率是姿态参数的变化，必须由实际角速度经过几何映射得到。

4.1 运动建模基础与运动学

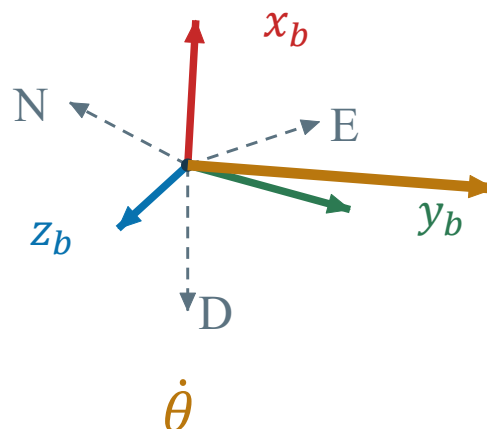
4.1.4 姿态运动学：图解与核验

欧拉角率的转轴与陀螺机体轴不同

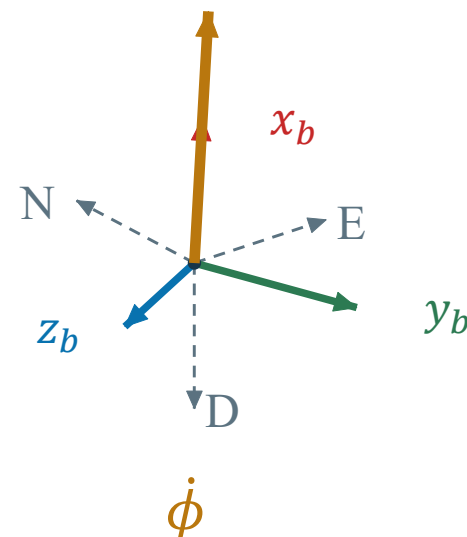
偏航率：地面下轴



俯仰率：中间右轴



滚转率：最终前轴



图例：■ 欧拉转轴

■ ■ ■ 最终机体前、右、下轴

■ NED (灰色虚线)

图：ZYX欧拉角率的三根瞬时转轴

先统一各转动分量的坐标轴，再合成实际角速度。

4.1 运动建模基础与运动学

4.1.4 姿态运动学：欧拉角率算例与奇异性

同一角速度，在水平与倾斜姿态下怎样变化

- **统一题设：**机体角速度取 $[p, q, r] = [0, 0, 1]$ rad/s。水平姿态 $\phi = \theta = 0$ 时，三个角率为 $[0, 0, 1]$ rad/s；这只是映射恰好退化为单位阵的特例。
- **倾斜计算：**改为 $\phi = 30^\circ$ 、 $\theta = 60^\circ$ ，逐行代入得滚转角率1.5、俯仰角率-0.5、偏航角率1.732051 rad/s；三个欧拉角同时变化，实际角速度仍只沿机体下轴。

$$\dot{\phi} = \cos 30^\circ \tan 60^\circ = 1.5, \quad \dot{\theta} = -\sin 30^\circ = -0.5$$

$$\dot{\psi} = \cos 30^\circ / \cos 60^\circ = 1.732051 \text{ rad/s}$$

- **奇异解释：** θ 接近 $\pm 90^\circ$ 时，正切和余弦分母使角率表示敏感甚至无定义，机体并不因此产生无限角速度。大姿态运动宜用四元数积分，再按需输出欧拉角。

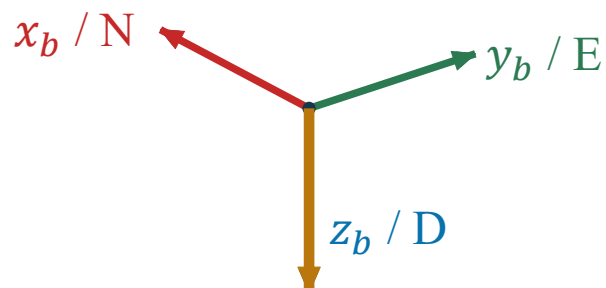
倾斜算例能揭示直接积分 p, q, r 的错误，奇异性属于姿态表示。

4.1 运动建模基础与运动学

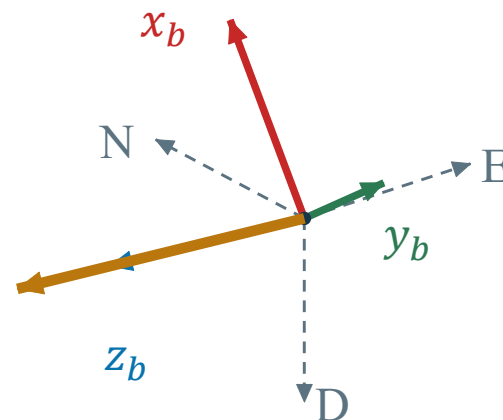
4.1.4 姿态运动学：图解与核验

同一个机体系输入，对应不同的欧拉角率

水平： $\phi = 0, \theta = 0$



倾斜： $\phi = 30^\circ, \theta = 60^\circ$



两侧输入均为 $[p, q, r] = [0, 0, 1] \text{ rad/s}$

$$[\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}] = [0, 0, 1]$$

$$[\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}] = [1.5, -0.5, 1.732]$$

图：沿各自机体下轴的同角速度分量

相同的 p 、 q 、 r ，经过随姿态变化的映射得到不同欧拉角率。

4.1 运动建模基础与运动学

4.1.4 姿态运动学：同输入的连续转动

保持相同机体角速度，欧拉角率仍随姿态变化

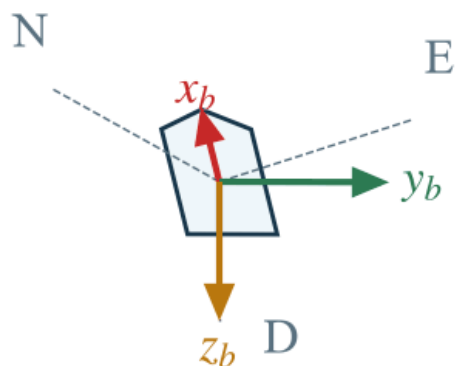
全程结果

$t = 0.600 \text{ s}$

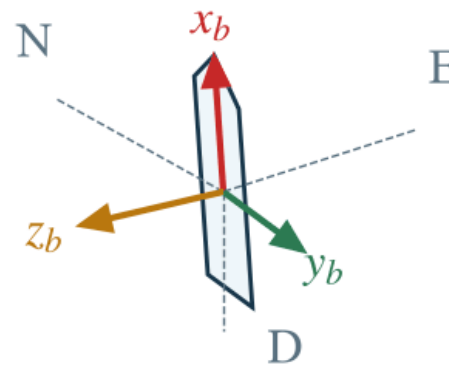
机体系输入均为 $[p, q, r] = [0, 0, 1] \text{ rad/s}$

A: $\phi_0 = 0^\circ, \theta_0 = 0^\circ$

B: $\phi_0 = 30^\circ, \theta_0 = 60^\circ$



当前欧拉角率
 $\dot{\phi} = 0.000 \text{ rad/s}$
 $\dot{\theta} = 0.000 \text{ rad/s}$
 $\dot{\psi} = 1.000 \text{ rad/s}$



当前欧拉角率
 $\dot{\phi} = 0.370 \text{ rad/s}$
 $\dot{\theta} = -0.849 \text{ rad/s}$
 $\dot{\psi} = 0.645 \text{ rad/s}$

初始角率 $[0.0, 0.0, 1.000] \text{ rad/s}$

初始角率 $[1.5, -0.5, 1.732] \text{ rad/s}$

图：两种初态沿各自机体下轴转动，欧拉角率按当前姿态重算

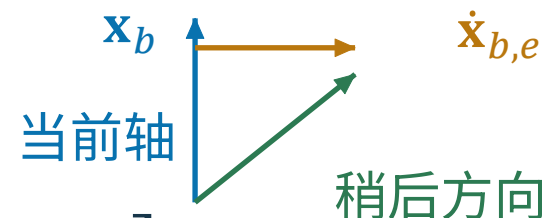
相同的 p 、 q 、 r ，经过随姿态变化的映射得到不同欧拉角率。

4.1 运动建模基础与运动学

4.1.4 姿态运动学：叉乘矩阵与姿态微分

旋转矩阵的导数来自机体轴的转动

- **几何来源：**机体固定轴随角速度转动，瞬时导数等于角速度叉乘该轴。右图正偏航使前轴导数沿当前右轴。



$$\dot{R} = R[\omega_b]_{\times}, \quad [\omega_b]_{\times} = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix}$$

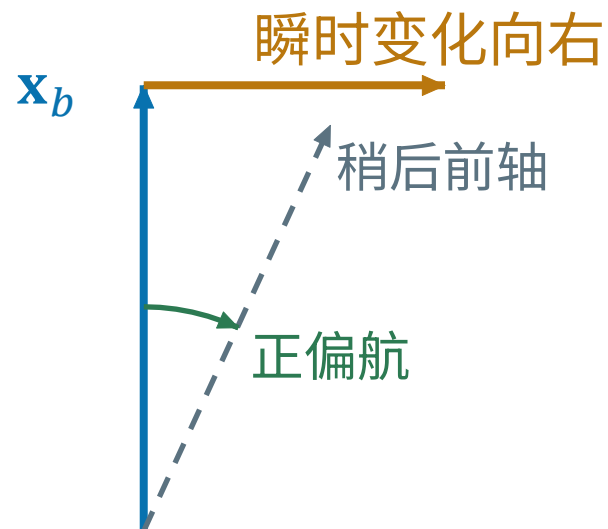
- **乘法方向：**角速度在机体系表达，先求机体轴的变化，再乘 R 转到地面；这决定右乘次序。
- **约束：** $R^T R = I$ 、 $\det R = 1$ 。九个元素只表示三个转动自由度；数值积分误差可能破坏正交性。

姿态微分把角速度转成坐标轴的连续变化，并保留旋转约束。

4.1 运动建模基础与运动学

4.1.4 姿态运动学：图解与核验

轴在转动时，它的导数沿瞬时切线



• **几何关系：** $\omega_b = r\mathbf{z}_b$ ，因此
 $\omega_b \times \mathbf{x}_b = r\mathbf{y}_b$ 。

• **坐标关系：** 先在机体系求轴的变化，再乘 R 转出，得到 $\dot{R} = R[\omega_b]_{\times}$ 。

俯视；此刻FRD与NED对齐

图：正偏航瞬间的前轴与切向变化

叉乘给出轴方向的变化，再由 R 转换到地面坐标。

4.1 运动建模基础与运动学

4.1.4 姿态运动学：Hamilton约定与分量公式

四元数微分把角速度变成姿态变化

- **表示约定：** $\mathbf{q} = [q_0, \mathbf{q}_v]$ 表示机体到地面旋转， q_0 为标量且放在第一项， $\mathbf{q}_v$ 是三维向量；采用Hamilton乘法， $\boldsymbol{\omega}_b$ 在机体系表达，姿态增量从右侧相乘。

$$\mathbf{p} \otimes \mathbf{q} = (p_0 q_0 - \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{q}_v, p_0 \mathbf{q}_v + q_0 \mathbf{p}_v + \mathbf{p}_v \times \mathbf{q}_v)$$

- **公式含义：** 乘积的标量部分包含向量点积，向量部分包含叉乘。将纯角速度四元数 $[0, \boldsymbol{\omega}_b]$ 代入，即得到四个姿态导数；粗体 $\mathbf{q}$ 与角速度分量 q 是不同变量。

$$\dot{\mathbf{q}} = 1/2 \mathbf{q} \otimes [0, \boldsymbol{\omega}_b^T]^T = 1/2 \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\omega}_b^T \mathbf{q}_v \\ q_0 \boldsymbol{\omega}_b + \mathbf{q}_v \times \boldsymbol{\omega}_b \end{bmatrix}$$

- **约束与用途：** 单位四元数满足 $\mathbf{q}^T \mathbf{q} = 1$ ，表示三个转动自由度， $\mathbf{q}$ 与 $-\mathbf{q}$ 对应同一姿态。公式避开欧拉俯仰奇异点，但数值实现仍须保持范数并核对旋转方向。

固定旋转方向、分量顺序和乘法约定，四元数导数才有唯一实现。

4.1 运动建模基础与运动学

4.1.4 姿态运动学：单轴旋转与有限增量

恒定角速度的解析姿态与一步更新

- **单轴解析题：**由单位姿态出发，绕机体下轴以 $\pi/2 \text{ rad/s}$ 匀速旋转；1 s后机头从北转向东，物理转角 90° 。

$$\mathbf{q}(t) = [\cos(\pi t/4), 0, 0, \sin(\pi t/4)]^\top$$

- **一步更新：**步长 h 内机体角速度恒定时， $\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{q}_k \otimes \delta \mathbf{q}$ ；角速度为零时取单位增量，避免归一化零向量。

$$\delta \mathbf{q} = [\cos(\|\boldsymbol{\omega}_b\| h/2), \mathbf{n}^\top \sin(\|\boldsymbol{\omega}_b\| h/2)]^\top, \quad \mathbf{n} = \boldsymbol{\omega}_b / \|\boldsymbol{\omega}_b\|$$

转角决定四元数半角，角速度恒定时可直接构造单位姿态增量。

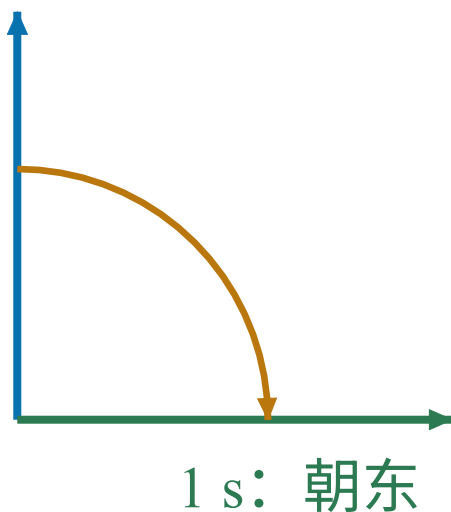
4.1 运动建模基础与运动学

4.1.4 姿态运动学：图解与核验

机头转 90° ，四元数计算使用 45° 半角

0 s：朝北

实际转角
 90°



代入半角： $90^\circ / 2 = 45^\circ$

$$\mathbf{q}(1) = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right]^T$$

- **恒定角速度：** $\omega_z = \pi/2$ rad/s。一个步长内角速度近似恒定时，可用同样方法构造单位增量。

图：实际转角与表示公式中半角的不同职责

半角属于姿态的表示公式，实际机头仍转过完整 90° 。

4.1 运动建模基础与运动学

4.1.4 姿态运动学：机体系增量的右乘含义

不同轴的两次旋转不能交换顺序

- **明确过程：**先绕 x 轴滚转 90° ，再绕当前机体 z 轴转 90° 。第二次转轴已经随第一次旋转改变，因此机体系增量应右乘当前四元数，对应矩阵 $R_x R_z$ 。

$$\mathbf{q}_x = [c, c, 0, 0]^\top, \quad \mathbf{q}_z = [c, 0, 0, c]^\top, \quad c = \sqrt{2}/2$$

$$\mathbf{q}_x \otimes \mathbf{q}_z = [0.5, 0.5, -0.5, 0.5]^\top, \quad R_x R_z \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_z$$

- **结果对照：**正确乘积的第三个分量为 -0.5 ，机体前轴最终朝下；交换乘法后该分量变为 $+0.5$ ，前轴改为朝东。两者都保持单位范数，却表示不同姿态。

$$\mathbf{q}_z \otimes \mathbf{q}_x = [0.5, 0.5, 0.5, 0.5]^\top, \quad R_z R_x \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y$$

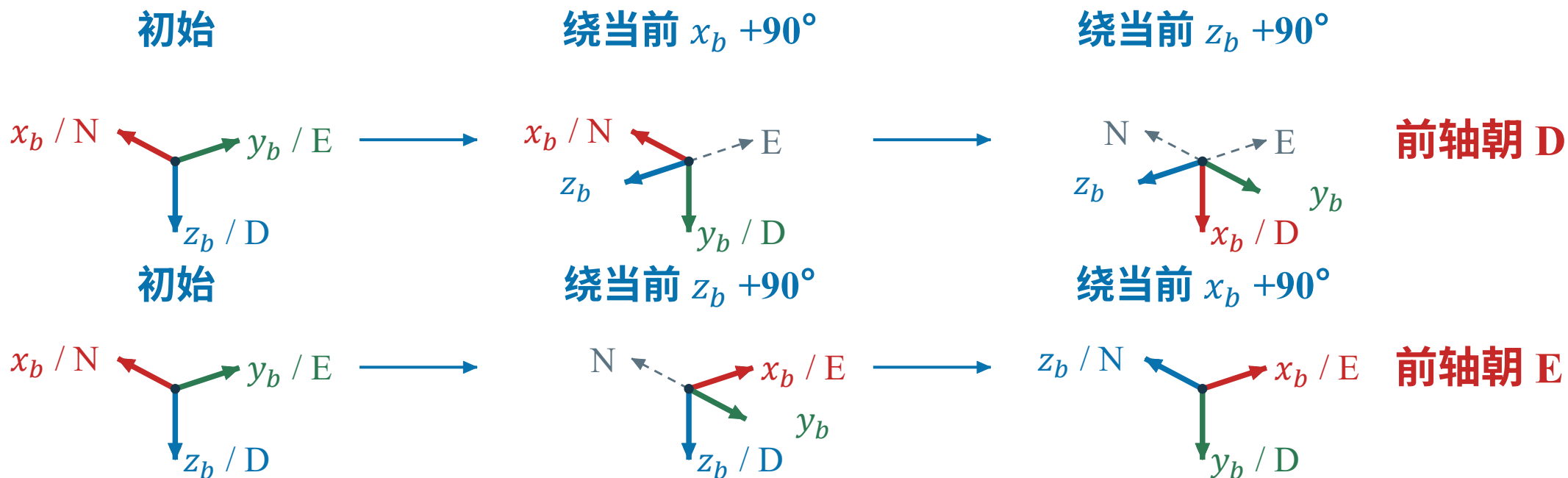
- **为什么有鉴别力：**从单位姿态只做一次单轴转动时，左右乘可能给出相同结果；选择不平行的两个轴，才能暴露“公式合法但旋转顺序用错”的问题。

姿态乘法顺序决定增量沿哪组轴发生，范数正确并不保证方向正确。

4.1 运动建模基础与运动学

4.1.4 姿态运动学：图解与核验

每转一次，下一次“机体轴”也跟着改变



图：两条机体系旋转序列；彩色为前、右、下三轴

交换机体系旋转增量，最终前轴从朝下变为朝东。



4.1 运动建模基础与运动学



本章目录

模型框架、坐标与姿态运动学

第四章 载具运动建模与仿真

4.1 运动建模基础与运动学

- 4.2 刚体动力学与运动求解
- 4.3 动力单元、受力与观测建模
- 4.4 配平、线性化与动态系统基础
- 4.5 多旋翼模型逐步编程与仿真
- 4.6 参数测量与静态模型辨识
- 4.7 动态系统辨识、验证与模型修正
- 4.8 典型无人载具建模与扩展
- 4.9 建模工具、代码生成与模型部署
- 4.10 API与SDK建模接口
- 4.11 例程体系与综合实践
- 4.12 习题案例分析与课程设计

首单元教材：4.1.1.1-2、4.1.2.1-4
4.1.3.1-2；模型分类另见4.2.2.1

本节 5 个教学单元

4.1.1 建模方法与统一框架

教材对应：详见左栏下方首单元细目

4.1.2 坐标、旋转矩阵与欧拉角

教材对应：第4.1.4.1节（坐标、旋转矩阵与欧拉角）

4.1.3 四元数与表示转换

教材对应：第4.1.4.1节（四元数与姿态表示）

4.1.4 姿态运动学

教材对应：第4.1.4.1节（旋转运动学方程）

4.1.5 位置、安装点与坐标约定

教材对应：第4.1.4.1节（位置运动学与坐标约定）



4.1 运动建模基础与运动学

4.1.5 位置、安装点与坐标约定：状态与位置更新

运动状态保存什么，位置又怎样更新

- **刚体状态：**位置 $\mathbf{r}_e$ 、速度 $\mathbf{v}_e$ 在地面系表达，角速度 $\boldsymbol{\omega}_b$ 在机体系表达， $\mathbf{q}$ 保存机体到地面的姿态；初值和受力共同决定后续运动。

$$\mathbf{x} = [\mathbf{r}_e^T, \mathbf{v}_e^T, \mathbf{q}^T, \boldsymbol{\omega}_b^T]^T, \quad \mathbf{q}^T \mathbf{q} = 1$$

位置：3个数

速度：3个数

四元数：4个数

角速度：3个数

图：13个存储数；单位范数约束后为12个独立状态

- **位置更新：**机头朝东，且只沿机体前向以2 m/s匀速运动，两秒向东移动4 m。转向后先更新 R ，再转换速度；执行器动态还会另增状态。

$$\dot{\mathbf{r}}_e = \mathbf{v}_e = R \mathbf{v}_b$$

六自由度说明位置与姿态，预测运动还需保存速度和角速度。

4.1 运动建模基础与运动学

4.1.5 位置、安装点与坐标约定：位置变换与算例

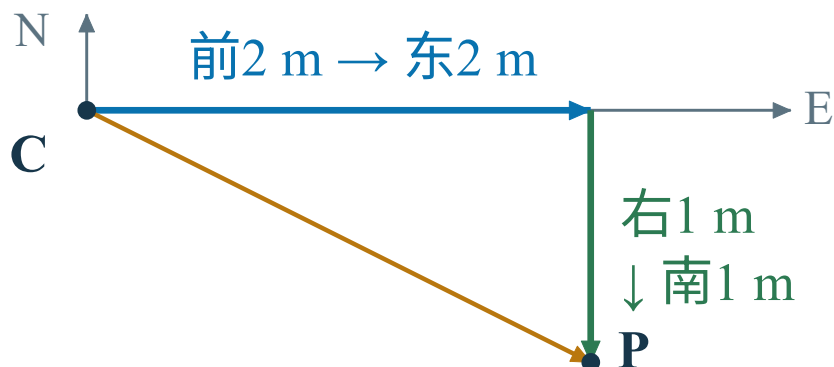
安装点的位置要先旋转，再加质心位置

- **题设：**机头朝东，位置单位为m。

$$\mathbf{r}_{C,e} = [100, 200, -10]^T$$

$$\mathbf{p}_{CP,b} = [2, 1, 0]^T$$

- **位置关系：** C 是质心， P 为安装点； $\mathbf{r}_{C,e}$ 与 $\mathbf{r}_{P,e}$ 共用同一地面原点。



图：质心附近的安装点位移

$$\mathbf{r}_{P,e} = \mathbf{r}_{C,e} + R\mathbf{p}_{CP,b}$$

$$R\mathbf{p}_{CP,b} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ m}$$

- **位置结果：**前2m、右1m转为东2m、南1m，再加质心位置得 $[99, 202, -10]^T \text{ m}$ 。

旋转转换方向，平移补上两个原点之间的位置差。

4.1 运动建模基础与运动学

4.1.5 位置、安装点与坐标约定：速度与相对运动

速度换坐标与不同点的速度不能混用

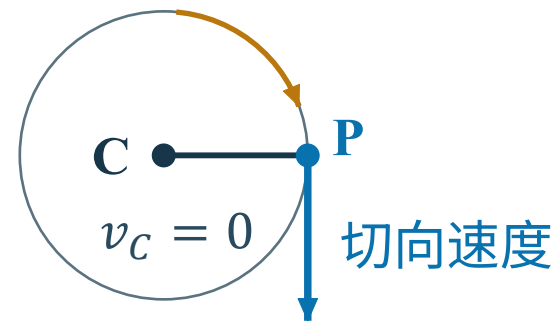
- **同一速度：** $\mathbf{v}_{C,b}$ 与 $\mathbf{v}_{C,e}$ 都是质心相对地面的速度，只是沿不同轴分解，变换不加入原点位置。

$$\mathbf{v}_{C,e} = R\mathbf{v}_{C,b}, \quad \mathbf{v}_{P,e} = \dot{\mathbf{r}}_{C,e} + \dot{R}\boldsymbol{\rho}_{CP,b} + R\dot{\boldsymbol{\rho}}_{CP,b}$$

- **不同点：** 安装点位置求导后，速度包含质心平移、机体转动、安装点相对机体运动三项。

安装点相对机体固定

- **固定安装：** $\dot{\boldsymbol{\rho}}_{CP,b} = 0$ ，但 $\dot{R}\boldsymbol{\rho}_{CP,b}$ 可非零；质心不动，偏心传感器仍可沿圆弧运动。



图：偏心点随机体转动

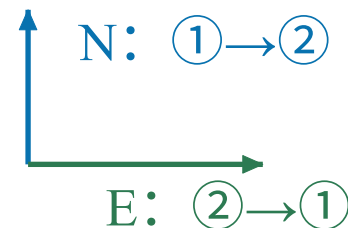
同一速度换坐标只需旋转，不同点的速度还包含刚体运动。

4.1 运动建模基础与运动学

4.1.5 位置、安装点与坐标约定：接口约定互换

坐标约定转换包含轴序与符号两部分

- **地面轴序：**东北天（ENU）按东、北、上排列。NED转ENU时，前两分量互换，第三分量反号。



$$\mathbf{a}_{ENU} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{a}_{NED}, \quad \mathbf{a}_{FLU} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{a}_{FRD}$$

- **机体正向：**前左上（FLU）保留前向，将右轴、下轴同时反向；两轴翻转仍保持右手关系。
- **使用边界：**以上转换向量分量，位置还需考虑原点差；姿态矩阵要转换两端坐标基。北向1 m在ENU中为 $[0, 1, 0]^T$ m。

坐标约定改变时，轴的排列与符号需要一起转换。

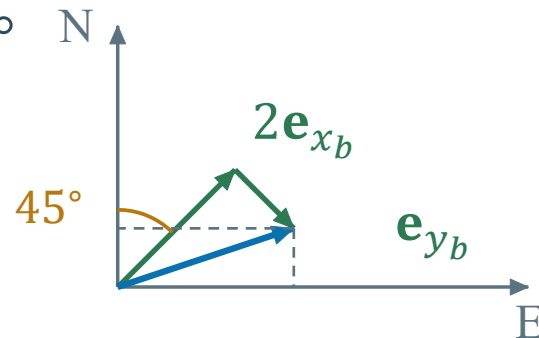
课堂练习

换坐标会改变速度大小吗

- **题设：**载具水平、偏航 $\psi = 45^\circ$ ，机体速度 $\mathbf{v}_b = [2, 1, 0]^T$ m/s。求地面速度，判断有无向下分量，并比较转换前后的速率。

$$\mathbf{v}_e = [2\cos 45^\circ - \sin 45^\circ, 2\sin 45^\circ + \cos 45^\circ, 0]^T$$

$$\mathbf{v}_e = [0.707107, 2.121320, 0]^T \text{ m/s}, \quad \|\mathbf{v}_e\| = \|\mathbf{v}_b\|$$



图：速度向量相加

- **解答：**前、右分量投影到北、东轴，竖直分量为零。图中东向贡献相加、北向贡献部分抵消；两种表达的速率均为 $\sqrt{5} \approx 2.236068$ m/s，保持不变。
- **反向核验：** $R^T \mathbf{v}_e$ 应恢复 $[2, 1, 0]^T$ m/s。往返运算检查正逆一致性；实际方向仍须对照北、东轴。

坐标变换改变分量，正交旋转保持向量长度与真实运动。

课堂练习

自检：方向、半角与角率映射

- **题1：**水平姿态、 $\psi = 135^\circ$ ，机体前向速度3 m/s。地面速度是多少？朝哪个方向？
- **题2：**绕机体下轴以 $\omega_z = \pi/3$ rad/s 匀速旋转，步长0.5 s。一步增量 $\delta\mathbf{q}$ 是多少？
- **题3：** $\phi = 30^\circ$, $\theta = 0$ ，陀螺读数 $[p, q, r] = [0, 0.2, 0]$ rad/s。三个欧拉角率各是多少？
- **参考要点：**题1 $\mathbf{v}_e = [-2.121, 2.121, 0]^\top$ m/s，朝东南；题2 转角 30° ，代入半角 15° 得 $\delta\mathbf{q} = [0.9659, 0, 0, 0.2588]^\top$ ；题3 $[\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}] = [0, 0.173, 0.1]$ rad/s，俯仰率与偏航率同时非零。

先用已知方向、半角和角率映射核对，再相信程序输出。

课堂练习：一维升降例程入口

用2 kg教学模型复现推力到高度的计算

- **目录：** [安装目录]/RflySimAPIs/4.RflySimModel/1.BasicExps/
e6_ModelingLearningLab/01_VerticalRigidBody/, 先读 Readme.pdf

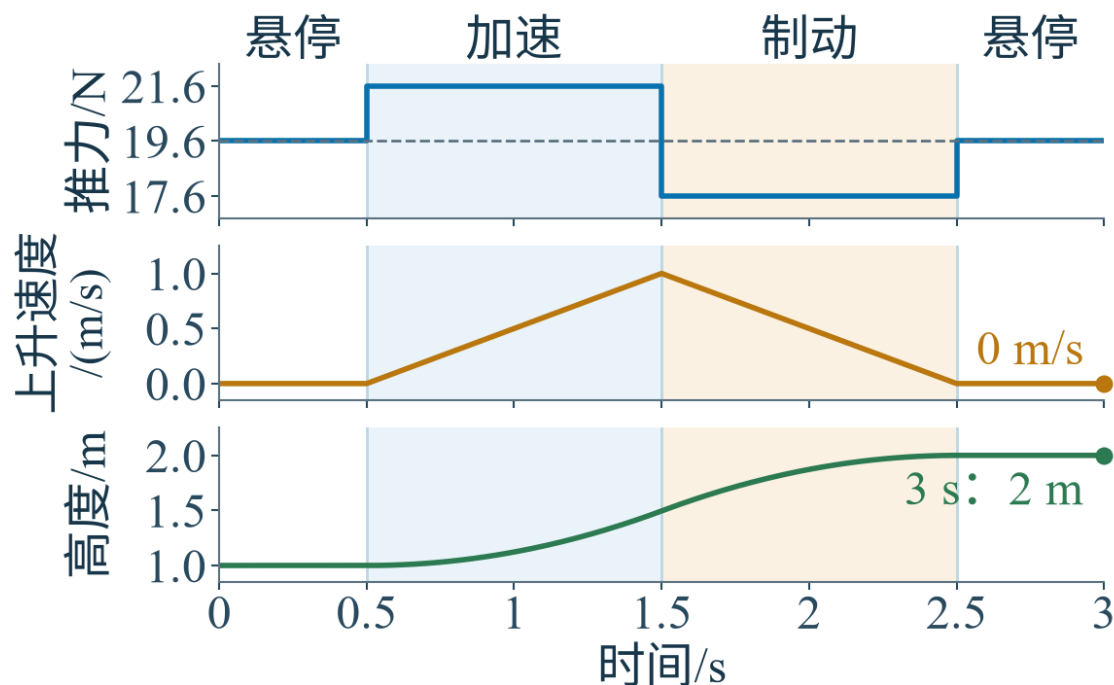
```
r = vertical_beginner;
```

- **运行：** 离线计算，只需 MATLAB。把当前目录切到该文件夹，在 vertical_beginner.m 中核对质量、重力、分段推力和初高，再执行上式。
- **正常结束：** 命令行显示 3 s 时 height = 2 m、vD = 0 和 Default-case checks passed.; outputs 中生成 CSV 表、JSON 误差与曲线 PNG。
- **常见失败：** 安装目录不可写时，把可写目录作第一个参数，如 vertical_beginner(fullfile(tempdir,'vb')); 步长须整除 0.5 s，否则 assert 报错。

先核输入与初值，再用输出表和曲线解释每一段运动。

课堂练习：离线参考结果判读

推力先加速，主动制动后才能静止



图：一维升降参考曲线（教学算例，非平台实测）

- **读图：**上栏是推力分段；加速段速度升到1 m/s，制动段降回0。
- **结论：**3 s时高度2 m、速度0；若加速后直接恢复19.6 N，3 s时约升到3 m。
- **步长检查：**dt减半，最大位置误差约由0.005 m降到0.0025 m。
- **改质量：**2.2 kg时19.6 N不足以平衡21.56 N重力，高度持续下降。

结果要按输入时段、坐标符号、误差和模型边界解释。

本节小结

从模型边界到运动结果，保持同一套约定

- 先定对象与边界：教材完整模型连接执行器、环境、受力、机身和观测；2 kg教学案例只在已声明条件下给定推力或取零某些作用。
- 统一NED/FRD、单位与变换方向：向量换坐标用旋转矩阵；安装点还须考虑原点，角速度须经运动学才能更新姿态。
- 同一输入核对一步代入与整段结果；正交矩阵、单位四元数和物理方向均要检查，数值合法不等于方向正确。
- **易错点：**把 p 、 q 、 r 直接积分成欧拉角； R 与其转置用反（正交检查照样通过）；四元数误用整角；NED中上升速度为负；机体系增量误用左乘。下一节由合力和惯量求加速度。

模型边界、坐标约定和结果证据一致，预测才可解释。