智能无人系统控制实践

第四章 载具运动建模与仿真

作者：戴训华　中南大学

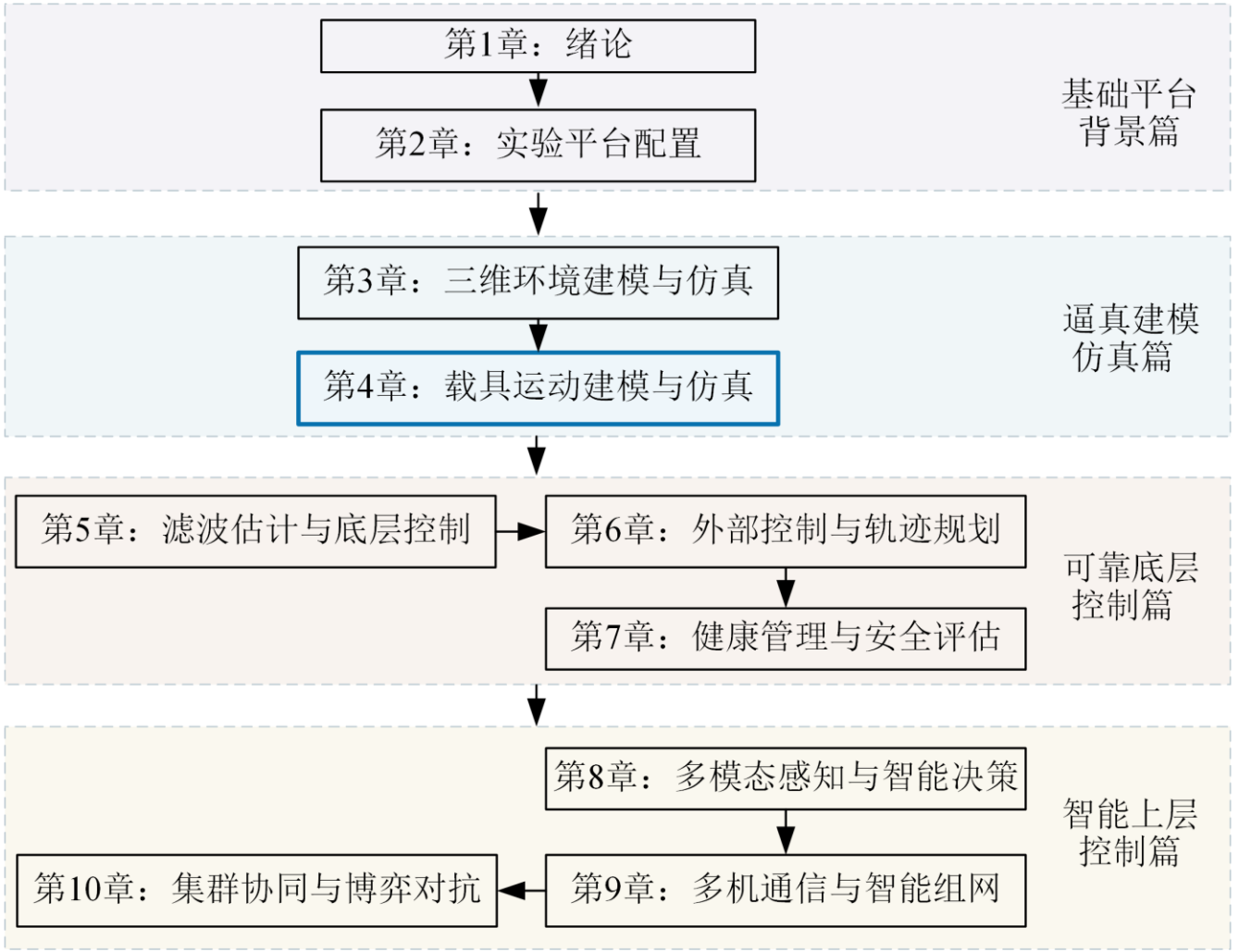
主页：https://faculty.csu.edu.cn/daixunhua

邮箱：dai.xh@csu.edu.cn

平台官网：http://rflysim.com

配套教材





教材：戴训华，全权，任雪峰. 智能无人系统控制实践[M]. 北京：电子工业出版社，2026.

本章学习目标

学完第四章能够完成什么

1. 能用坐标、状态和力学方程描述载具运动
2. 能建立执行器、环境和传感器子模型
3. 能实现模型，用软件开发工具包（SDK）配置、驱动与取数
4. 能测量和辨识参数，用独立数据验证并迁移模型

把物理方程实现为模型，再用数据说明模型的适用范围。

本章目录

模型框架、坐标与姿态运动学

第四章 载具运动建模与仿真

4.1 运动建模基础与运动学
4.2 刚体动力学与运动求解
4.3 动力单元、受力与观测建模
4.4 配平、线性化与动态系统基础
4.5 多旋翼模型逐步编程与仿真
4.6 参数测量与静态模型辨识
4.7 动态系统辨识、验证与模型修正
4.8 典型无人载具建模与扩展
4.9 建模工具、代码生成与模型部署
4.10 API与SDK建模接口
4.11 例程体系与综合实践
4.12 习题案例分析与课程设计

首单元教材：4.1.1.1–2、4.1.2.1–4
4.1.3.1–2；模型分类另见4.2.2.1

本节 5 个教学单元

4.1.1 建模方法与统一框架
教材对应：详见左栏下方首单元细目

4.1.2 坐标、旋转矩阵与欧拉角
教材对应：第4.1.4.1节（坐标、旋转矩阵与欧拉角）

4.1.3 四元数与表示转换
教材对应：第4.1.4.1节（四元数与姿态表示）

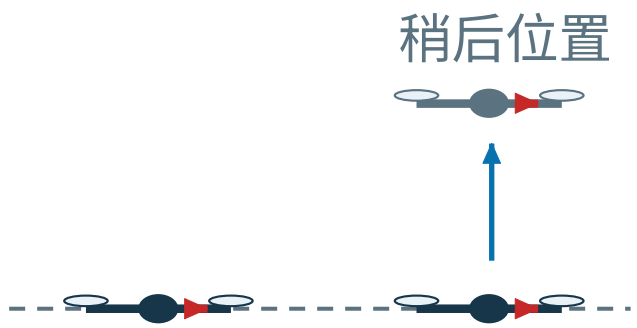
4.1.4 姿态运动学
教材对应：第4.1.4.1节（旋转运动学方程）

4.1.5 位置、安装点与坐标约定
教材对应：第4.1.4.1节（位置运动学与坐标约定）

4.1.1 建模方法与统一框架：核心概念

运动模型把输入、状态与输出联系起来

- **模型与参数：**给定推力、初态及质量、惯量等参数 $\boldsymbol{\lambda}$，计算随后的位置、速度和姿态；轨迹是计算结果。
- **状态：**同高不代表同一状态。右图一架静止、一架上升，稍后的高度不同；预测必须保存速度等信息。



图：同高但速度不同

- **输入与输出：**输入 $\mathbf{u}$ 是给定的四桨推力；由状态 $\mathbf{x}$ 取得高度、姿态等输出 $\mathbf{y}$，测量还需观测模型。

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}; \boldsymbol{\lambda}), \qquad \mathbf{y} = h(\mathbf{x}, \mathbf{u}; \boldsymbol{\lambda})$$

- **符号：**状态 $\mathbf{x}$ 上的点表示对时间求导；f 给出状态变化率，h 给出输出。

状态承接过去，输入推动变化，模型把二者联系到输出。

4.1.1 建模方法与统一框架：系统模型类型

白盒、黑盒与灰盒怎样结合机理和数据

白盒	指令	→	电路＋转动方程 参数有物理意义	→ 转速	未知物性或简化 会产生误差
黑盒	指令	→	指令历史→动态拟合 用数据预测响应	→ 转速	范围受数据 与实验条件限制
灰盒	指令	→	保留一阶机理结构 增益、时间常数待估计	→ 转速	阶跃数据用来 估计未知参数

- **同一对象的选择：**已知结构、数据数量和目标工况共同决定方法。白盒、黑盒、灰盒说明模型来源，不构成从低到高的精度等级。

图：同一电机、相同输入输出、不同知识来源

建模方法决定知识与数据怎样结合，并不直接决定精度等级。

4.1.1 建模方法与统一框架：任务与边界

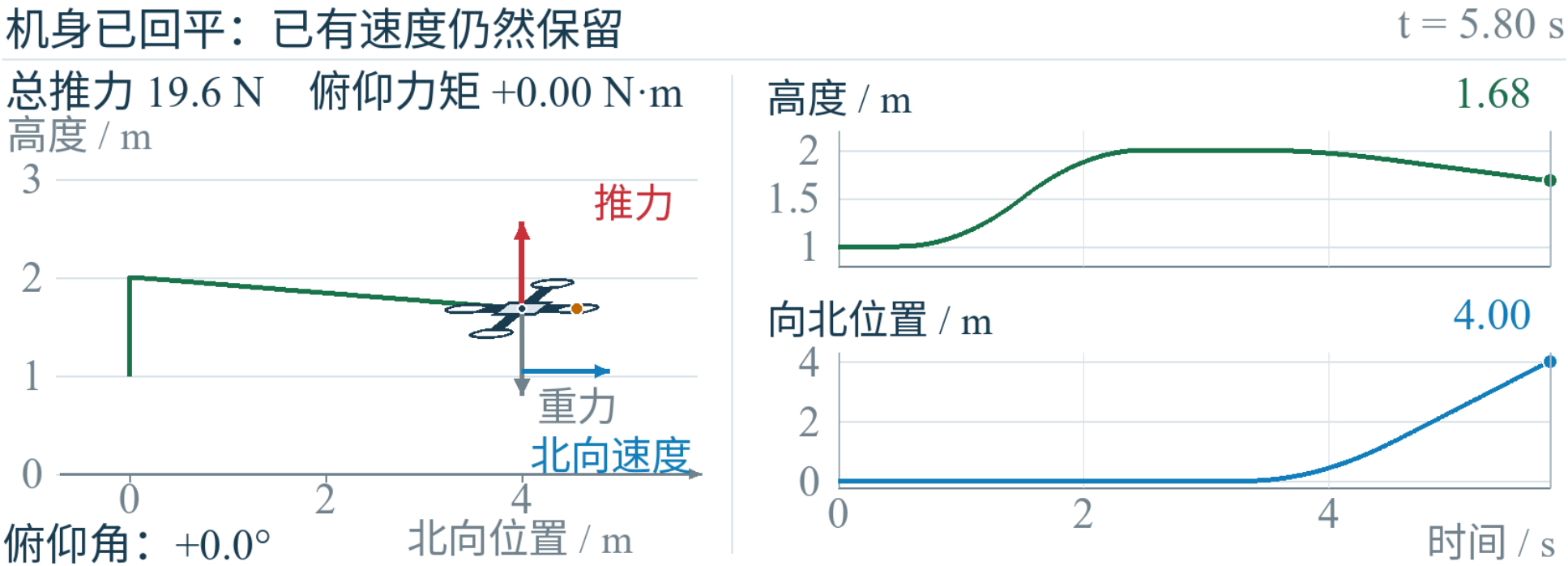
画面回放、运动预测与闭环验证解决不同问题

- **几何与回放：**给定位置、姿态和时间，三维软件可以显示飞行；这条轨迹是预先提供的，尚未解释油门变化为什么会引起加速。
- **运动预测：**从执行器输入开始，计算转速、推力、合力合矩和刚体响应，位置与姿态成为模型输出，因而可以预测未事先规定的轨迹。
- **闭环验证：**控制器利用观测误差持续调整输入，实际运动由控制器、载具、环境和观测共同形成；闭环响应不能单独归因于机体模型。
- **本章分工：**本节用预先给定的推力研究载具响应，后续再接入执行器与控制系统；第五章展开控制器、滤波器与控制分配设计。

模型保留哪些动态，取决于它要回答的工程问题。

4.1.1 建模方法与统一框架：运动结果预览

一架四旋翼的推力怎样变成运动



图：给定四桨推力，计算同一机体的升降、倾斜与平移。

运动模型根据输入和初态，逐步算出位置、速度和姿态。

4.1.1 建模方法与统一框架：基于模型的设计

模型贯穿设计、实现与实物测试

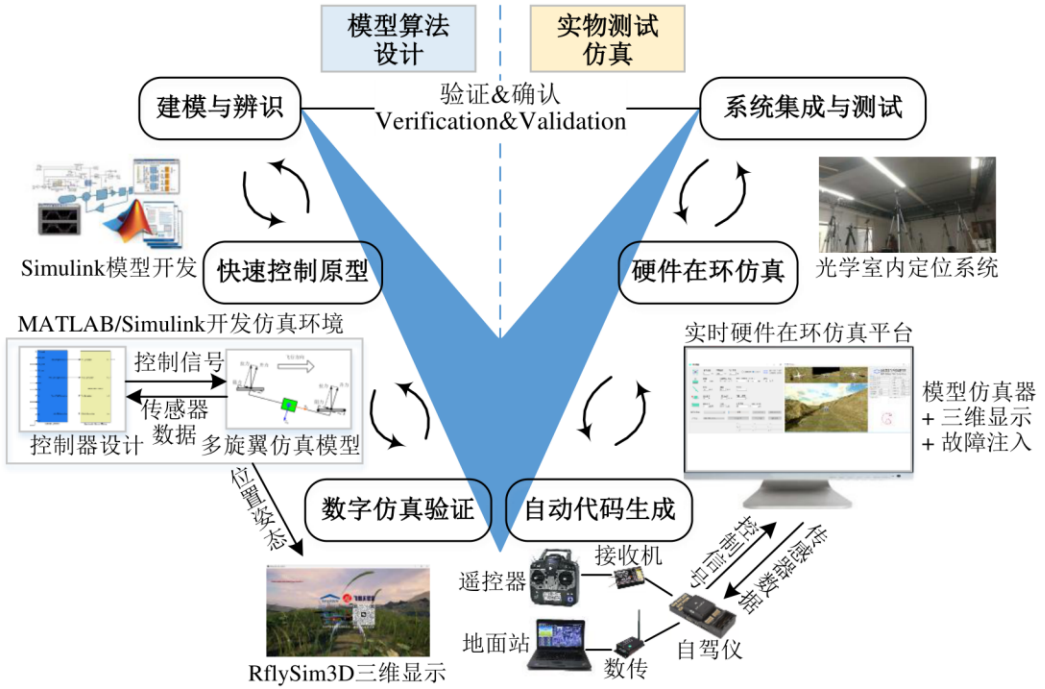


图4.1 RflySim工具链MBD流程框图

- **基于模型的设计（MBD）：**用模型串起设计到测试，偏差回头修正模型和参数。
- **左侧模型阶段：**建模与辨识→快速控制原型→数字仿真验证。
- **右侧实物阶段：**自动代码生成→硬件在环仿真→系统集成与测试；同一输入的测试偏差带回模型。

模型预测 → 同输入测试 → 偏差回溯

模型贯穿设计与测试，实物证据又反过来修正模型。

4.1.1 建模方法与统一框架：系统拓扑分解与连接框架

统一系统结构怎样适用于不同载具

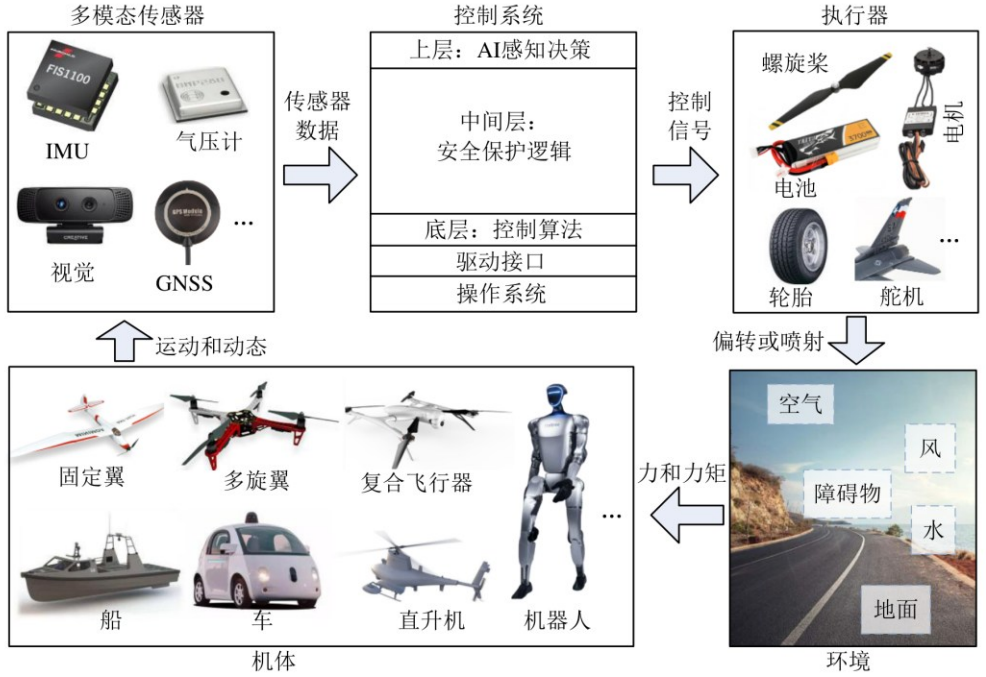


图4.2 不同无人载具的共同系统结构

- **指令路径：**沿图4.2由控制系统走向执行器，指令先形成转速或转角，随后才转换成作用于机体的力。
- **反馈路径：**从机体运动回看环境与传感器；来流、接触和观测会随运动变化，使同一指令产生不同响应。
- **共性与差异：**飞机、车、船保留图中的子系统职责，但分别使用升力、轮胎力和水动力方程；决策与控制仍归控制系统。

统一框架统一子系统职责，载具差异落实到具体物理关系。

4.1.1 建模方法与统一框架：组件与等效刚体

实体拆分怎样变成数学模型及参数

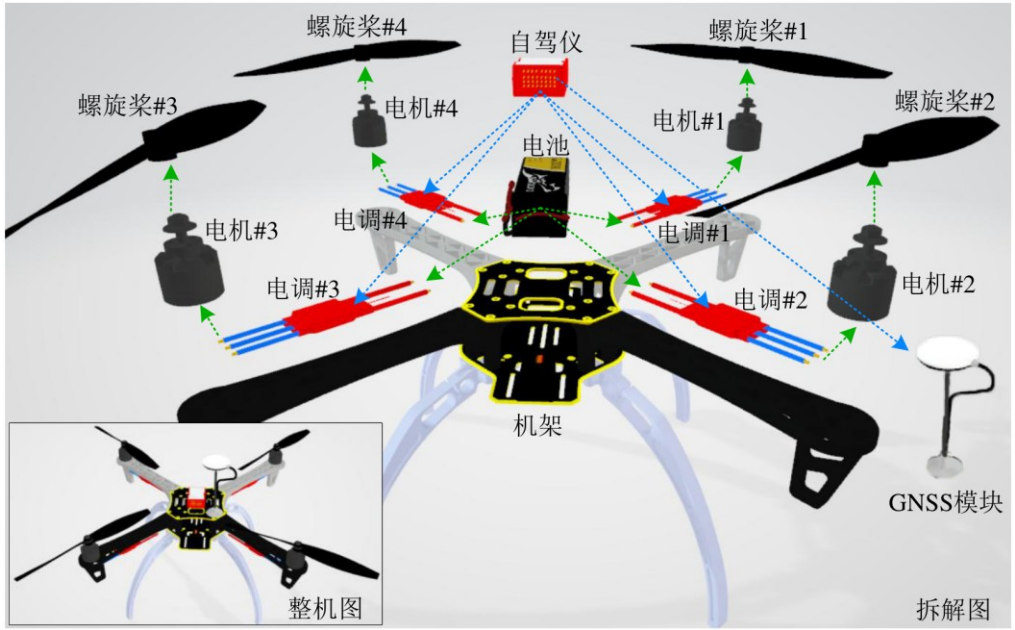


图4.4 多旋翼无人机实体组件拓扑分解与连接

- **动力链：**电池、电调、电机和螺旋桨按图连接，供电与指令共同决定转速和推力；连接关系就是组件的输入输出关系。
- **刚体等效：**固定连接的机架、电池和载荷可合并为总质量、质心与惯量；安装位置决定力臂，有相对运动时再增加状态。
- **换电池例子：**质量与安装位置改变惯性，电压与内阻改变动力输出；因此同一指令也可能产生不同运动。

实体连接给出模型接口，研究任务决定组件保留到多细。

4.1.1 建模方法与统一框架：动力链部件

沿机臂读出动力链：电池、电调、电机与螺旋桨

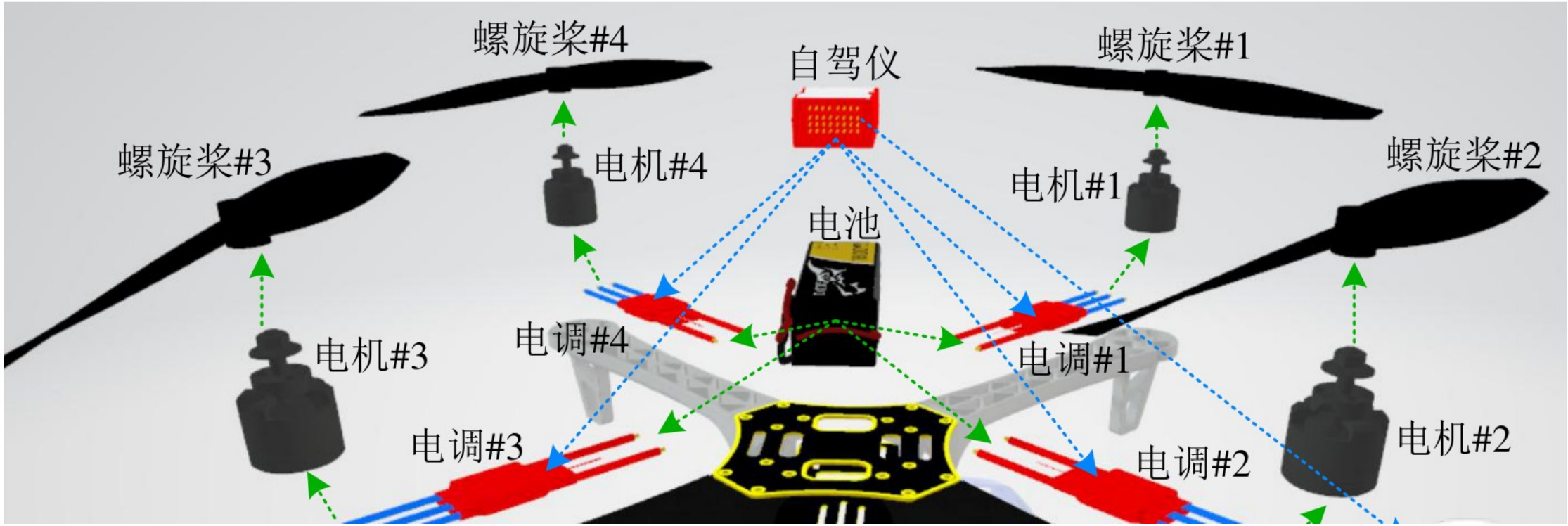


图4.4（局部放大）蓝色虚线：自驾仪发给电调的指令；绿色虚线：供电与动力传递

4.1.1 建模方法与统一框架：组件标准化模型描述

运动、能耗与故障怎样在组件内耦合

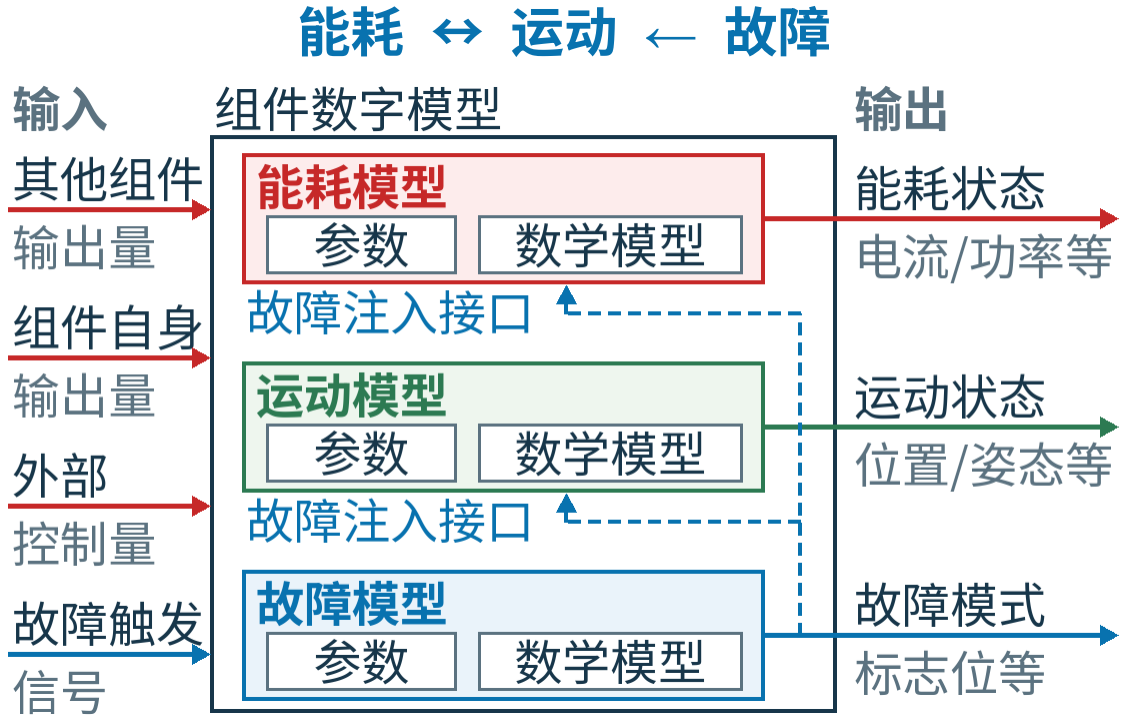


图4.5 组件标准化模型示例

- **运动与能耗：** 运动模型计算转速或位姿，能耗模型计算电流、功率与能源状态；任务改变负载，供电又约束可用动力。
- **故障作用：** 故障通过接口改变参数或作用关系。例如电机效率下降会降低推力，并改变维持同一运动所需的功率。
- **读图方法：** 沿共享变量看耦合关系。电量消耗导致电压下降，进而改变运动响应；完整能源与寿命分析可继续扩展。

组件的运动、能耗和故障通过共同变量发生耦合。

4.1.1 建模方法与统一框架：组件到整机

相同拓扑把三类组件模型装成不同整机模型

- 组件标准模型记录参数、输入输出、适用工况与验证数据；按机架、电池、电调、电机和桨的实际拓扑连接，才得到整机响应。
- 拓扑＋能耗模型：把各部件的电流、功率与能源状态连接起来，回答续航和供电约束；换电池时不能只改质量。
- 拓扑＋运动模型：把各桨作用、环境与刚体方程连接起来，预测状态并支撑控制仿真；本章重点展开这一条。
- 拓扑＋故障模型：把效率降低或失效传到受力与能耗，形成测试工况。离线部件自检核对给定模型与数据，整机认证还需仿真与试验证据。

先保持组件接口和证据，再按问题装配所需的整机模型。

4.1.1 建模方法与统一框架：FlyEval教材案例

FlyEval：组件选型、整机评估与参数导出

飞行评估（FlyEval）以标准组件数据库支撑整机设计。教材第4.1.2.3节。

组件与环境输入

机体框架、环境条件
电池、电机、螺旋桨
电调等推进组件参数

→

整机性能评估

悬停时间、载重能力
飞行距离、速度
用于方案比较与优化

选定方案 →

运动模型配置导出

质量、转动惯量
拉力/阻力系数等
转速、电机时间常数
Simulink / CopterSim 配置

约束反选组件：给定期望悬停时间、任务载重、温度/海拔和电池参数，逆向求解并推荐满足性能阈值的组件组合，再做方案评估。

4.1.1 建模方法与统一框架：分层计算

用四层模型追踪油门怎样变成运动

- **动力单元：**油门决定电机的目标转速，转动惯量和电控使实际转速逐渐变化。
- **控制效应：**旋翼转速决定推力；安装位置和旋向决定关于质心的力矩。
- **刚体运动：**动力学求速度与角速度的变化；运动学用它们更新位置和姿态。



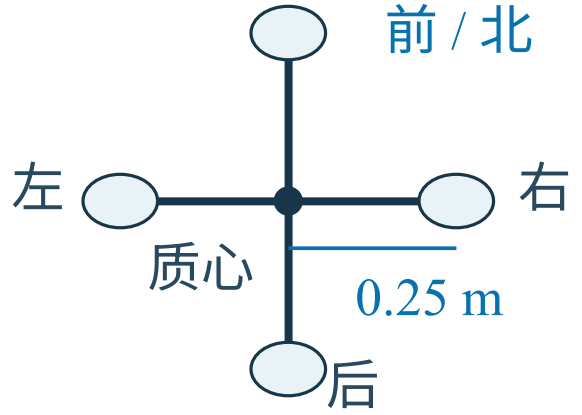
图：四层运动模型

从油门到位置的每一次转换，都需要一层可解释的模型。

4.1.1 建模方法与统一框架：参数与初始条件

贯穿案例的对象、参数与简化条件

- **对象与初态：**理想“+”构型四旋翼，机头朝北、机体水平；初高1 m，速度和角速度均为零，机体原点取质心。
- **教学参数：**$m = 2\,\mathrm{kg}$，$g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$；旋翼力臂均为0.25 m，俯仰惯量$J_y = 0.05\,\mathrm{kg\,m^2}$。
- **输入与输出：**按前、右、后、左给定四桨推力，计算位置、速度、姿态和角速度。命令到推力的过程在4.3展开。



图：俯视构型与旋翼力臂

- **算例简化：**教材考虑阻力与旋转阻尼，本例为解析核验将其取零。机架为刚体，质量、惯量不变；不计旋翼响应与触地，对称输入只激励俯仰。
- **坐标：**原点在起点下方，北东地（NED）下为正；$z_D = -1\,\mathrm{m}$，$H = -z_D = 1\,\mathrm{m}$。

先确定对象和工况，再用模型预测指定输入下的响应。

4.1.1 建模方法与统一框架：教学模型一步计算

给定推力时，先算加速度再更新状态

- 已知条件：垂直一维；m=2 kg，g=9.8 m/s²，T=21.6 N。NED向下为正；初高1 m、初速0，步长0.01 s；本例不计电机动态、阻力、触地和控制。

$$a_D = g - \frac{T}{m} = 9.8 - \frac{21.6}{2} = -1\ \mathrm{m/s^2}$$

$$z_{D,k+1} = z_{D,k} + \Delta t\, v_{D,k} = -1 + 0.01 \times 0 = -1\ \mathrm{m}$$

$$v_{D,k+1} = v_{D,k} + \Delta t\, a_{D,k} = 0 + 0.01 \times (-1) = -0.01\ \mathrm{m/s}$$

- **同步更新：** 位置式和速度式的右侧均取同一时刻的旧状态。
- **本步结果：** 高度仍为1 m，速度为−0.01 m/s；下一步才改变位置。
- **模型范围：** 只含竖直运动，是课堂练习一维升降例程的第一步。

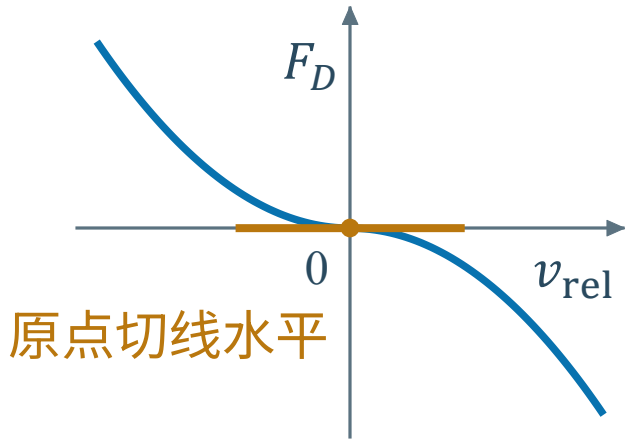
4.1.1 建模方法与统一框架：平方阻力的局部近似

无风悬停附近，平方阻力为何没有一阶贡献

- **工作点：**无风且静止悬停时，载具相对空气的速度为零。先用一维相对空气速度v_{rel}说明阻力关系。

$$F_D = -k\, v_{\mathrm{rel}}|v_{\mathrm{rel}}| \qquad (k > 0)$$

- **平方关系：**k为有限常数时，阻力大小与空速平方成正比。空速减半，阻力变为四分之一。



图：一维平方阻力示意

- **一阶近似：**用原点水平切线代替曲线，因此小空速扰动时可忽略该阻力。
- **适用边界：**线性气动阻力在零空速附近仍有一阶项，旋转阻尼在零角速度附近也可有一阶项；本算例把两者设为零。

零空速附近的平方阻力没有一阶项，其他气动作用仍需判断。

本章目录

模型框架、坐标与姿态运动学

第四章 载具运动建模与仿真

4.1 运动建模基础与运动学
4.2 刚体动力学与运动求解
4.3 动力单元、受力与观测建模
4.4 配平、线性化与动态系统基础
4.5 多旋翼模型逐步编程与仿真
4.6 参数测量与静态模型辨识
4.7 动态系统辨识、验证与模型修正
4.8 典型无人载具建模与扩展
4.9 建模工具、代码生成与模型部署
4.10 API与SDK建模接口
4.11 例程体系与综合实践
4.12 习题案例分析与课程设计

首单元教材：4.1.1.1–2、4.1.2.1–4
4.1.3.1–2；模型分类另见4.2.2.1

本节 5 个教学单元

4.1.1 建模方法与统一框架
教材对应：详见左栏下方首单元细目

4.1.2 坐标、旋转矩阵与欧拉角
教材对应：第4.1.4.1节（坐标、旋转矩阵与欧拉角）

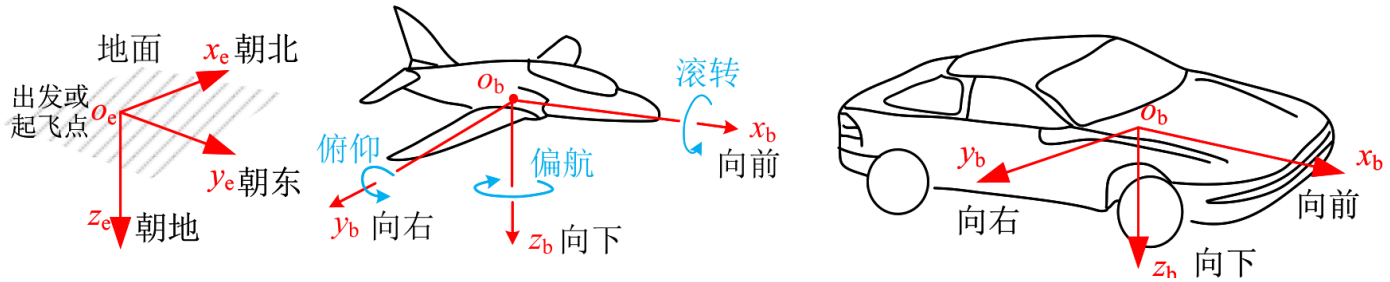
4.1.3 四元数与表示转换
教材对应：第4.1.4.1节（四元数与姿态表示）

4.1.4 姿态运动学
教材对应：第4.1.4.1节（旋转运动学方程）

4.1.5 位置、安装点与坐标约定
教材对应：第4.1.4.1节（位置运动学与坐标约定）

4.1.2 坐标、旋转矩阵与欧拉角：轴向与原点

坐标向量要同时交代原点、轴向和单位



(a) 地面坐标系　(b) 无人机机体坐标系　(c) 无人车机体坐标系

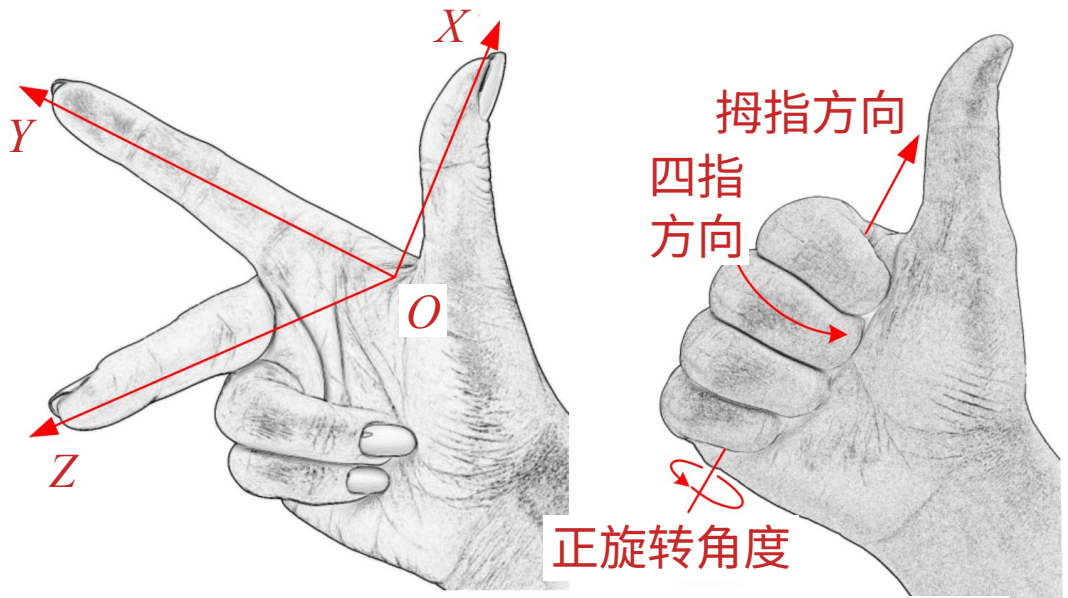
图1.9 地面坐标系与机体坐标系

- **机体系：**前右下（FRD）以质心为原点，随载具一起转动。飞机、车辆都可使用这套约定；机体前向仅在特定姿态下与北向重合。
- **前置：**图1.9取自教材第1章，课件1.4已介绍这两套坐标；本单元转为计算与核验。

- **地面系：**北东地（NED）以指定参考点为原点，轴向为北、东、下。高于原点10 m，第三分量为−10 m。
- **尺度与单位：**局部地面系近似固定；地心地固系（ECEF）原点在地心。经纬度是角度，角度差不能直接当作米制位移。

4.1.2 坐标、旋转矩阵与欧拉角：右手坐标

右手规则同时确定轴关系与正旋转



(a) 坐标轴

(b) 旋转正方向

图1.10 右手定则下的坐标轴与旋转正方向

- **右手轴系：** NED与FRD都是右手系：拇指、食指、中指依次指第一、二、三轴；拇指沿正轴时，四指弯曲方向为正转向。
- **姿态动作：** 正滚转右侧下沉，正俯仰抬头；机头朝北时，正偏航转向东。
- **计算单位：** 三角函数输入用弧度，度数须按下式换算。

$$\alpha_{\text{rad}} = \alpha_{\text{deg}} \frac{\pi}{180}$$

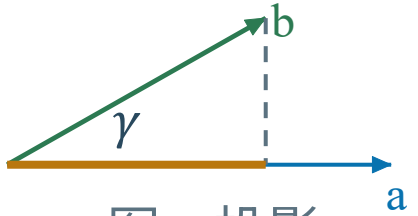
轴的正方向确定以后，正旋向由右手规则唯一确定。

4.1.2 坐标、旋转矩阵与欧拉角：向量运算先修

点乘与叉乘分别描述投影和有向面积

- **点乘：**结果是标量，表示投影关系；γ为非零向量夹角。分量须在同一坐标系，垂直时为零、交换次序不变。

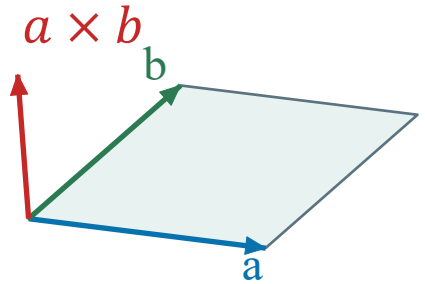
$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\gamma$$



图：投影

- **叉乘：**结果垂直于两向量平面，大小等于平行四边形面积，方向按右手规则；平行时为零、换序反向。前轴叉乘右轴得到下轴。

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{bmatrix}a_yb_z-a_zb_y\\a_zb_x-a_xb_z\\a_xb_y-a_yb_x\end{bmatrix},\qquad \mathbf{e}_x\times\mathbf{e}_y=\mathbf{e}_z$$



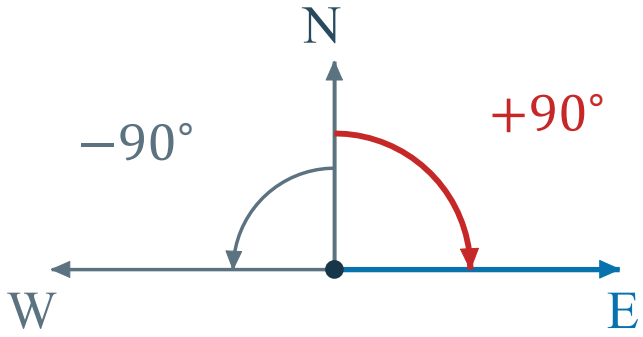
图：叉乘垂直于平面

点乘给出投影关系，叉乘给出右手方向与有向面积。

4.1.2 坐标、旋转矩阵与欧拉角：偏航矩阵与方向

偏航使水平机头由北向东转动

- 偏航绕下轴转动，R_z第三列不变；北、东分量按正弦余弦组合，竖直分量保持不变。
- **方向核验：** $\psi = 90°$将最初指北的前轴映到东；$\psi = -90°$则映到西。正负角改变实际转向。
- **逆向辨析：** 转置对应相反偏航角。前向若映到西，说明变换方向用反，正交性本身不能检出。



图：俯视正偏航转向东

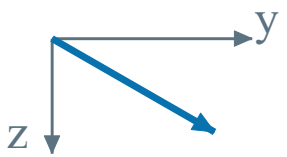
$$R_z(\psi) = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad R_z(90°)\mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y$$

正偏航沿下轴右手方向转动，使朝北的机头向东转。

4.1.2 坐标、旋转矩阵与欧拉角：单轴旋转

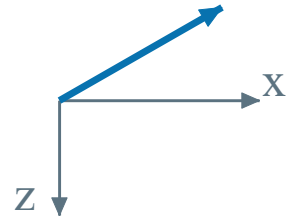
滚转与俯仰矩阵从平面旋转得到

- **共同结构：**绕某轴旋转时，这根轴保持不变，另外两个方向按平面旋转组合；对角项为余弦，交叉项的正负由右手方向决定。
- **滚转：**R_x保留前轴；右轴正转后出现正下向分量，右侧机臂下沉。



图：右轴下沉

- **俯仰：**R_y保留右轴；前轴正转后下向分量为负，即机头抬起。



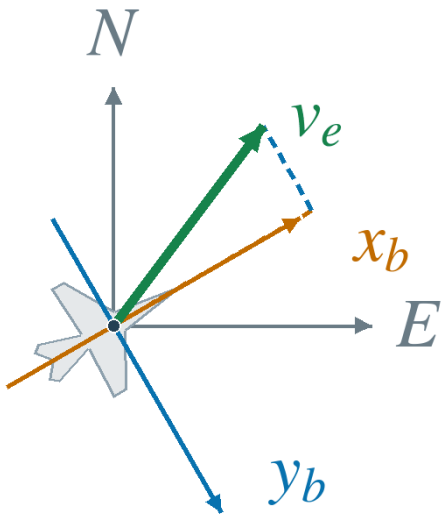
图：机头抬起

$$R_x(\phi)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi\\ 0 & \sin\phi & \cos\phi\end{bmatrix},\qquad R_y(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{bmatrix}$$

单轴矩阵的符号，可以用右手旋向与一个单位轴共同检查。

4.1.2 坐标、旋转矩阵与欧拉角：机体到地面

旋转矩阵的列给出机体三根轴的方向



$$\psi = 60.00^\circ$$

$$v_{x,b} = 4.60$$

$$v_{y,b} = -1.96$$

$$v_{z,b} = 0$$

$$\|v_e\| = \|v_b\| = 5 \text{ m/s}$$

图：固定速度的坐标分量（动画）

- **读图条件：** 机体偏航0°→60°，地面速度$\mathbf{v}_e = [4,3,0]^{\mathrm{T}}$ m/s固定；变化的是机体系分量，其平方和保持25。
- **逆变换：** R^{T} 将地面速度换成机体分量，再乘 R 返回原向量。R 的三列是机体前、右、下轴的地面方向。
- **共同用途：** 速度和力都用 R 换坐标。合力须先统一坐标再相加。

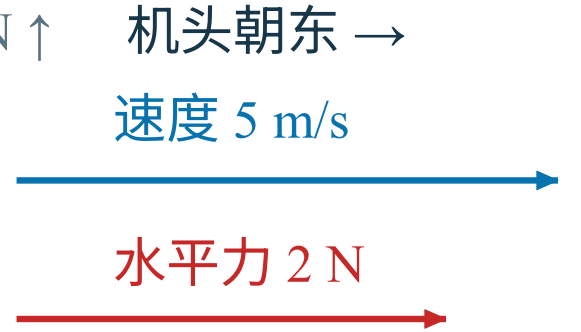
$$\mathbf{a}_e = R\mathbf{a}_b, \qquad R = [\hat{\mathbf{x}}_{b,e} \quad \hat{\mathbf{y}}_{b,e} \quad \hat{\mathbf{z}}_{b,e}]$$

机体到地面的旋转矩阵，由机体三轴在地面系中的方向组成。

4.1.2 坐标、旋转矩阵与欧拉角：向量变换的算例

同一姿态矩阵可以转换速度、推力和其他向量

- **统一作用：** R把机体分量转到地面，速度与力共用同一套方向关系；换坐标本身不改变速度，也不增加推力。
- **理论算例：** 机头朝东。机体前向5 m/s变成东向5 m/s；前向2 N、向上10 N的力变成东向2 N、向上10 N。
- **相加条件：** 重力、推力先统一坐标再相加。力的模长仍为$\sqrt{104}$ N，单位与速度不同。



图：同向映射，物理量不同

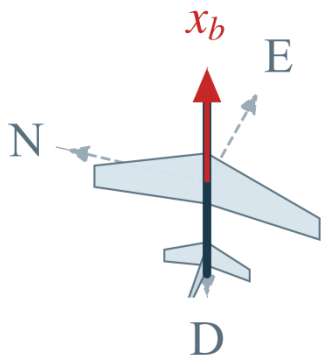
$$R=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad \mathbf{v}_e=(0,5,0)^{\mathrm{T}}\mathrm{m/s},\quad \mathbf{F}_e=(0,2,-10)^{\mathrm{T}}\mathrm{N}$$

合力计算之前先统一坐标，姿态矩阵同时适用于速度与力。

4.1.2 坐标、旋转矩阵与欧拉角：旋转不可交换

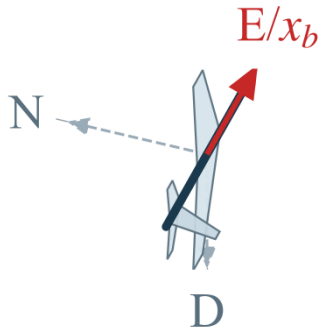
相同的两个角度，交换次序会产生不同姿态

$R_z(\alpha)R_y(\beta)$



机头 $x_b = -D$

$R_y(\alpha)R_z(\beta)$



机头 $x_b = E$

$\alpha = 90^\circ, \quad \beta = 90^\circ$

图：旋转次序影响姿态（动画）

- **内禀过程：**左图先绕初始z轴、再绕当前y轴；右图先绕初始y轴、再绕当前z轴，两次都转90°。
- **读图：**第二次转轴已随第一次改变，左侧机头最终向上，右侧朝东。
- **公式关系：**R将机体分量转到地面；按列向量计算时，矩阵从右向左作用。

$$R_z(90^\circ)R_y(90^\circ)\mathbf{e}_x = -\mathbf{e}_z$$

$$R_y(90^\circ)R_z(90^\circ)\mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y$$

不同轴的旋转不能随意交换次序，多轴算例才能检出顺序错误。

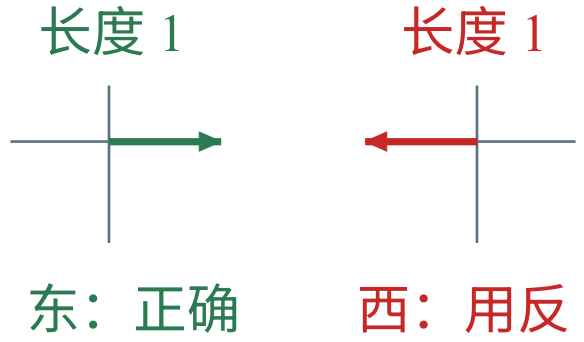
4.1.2 坐标、旋转矩阵与欧拉角：正交性与逆变换

合法的旋转矩阵还要用在正确方向上

- **几何约束：**机体三轴两两垂直且长度为1，故$R^{\mathsf{T}}R = I$；$\det R = 1$保持右手方向并排除镜像。

$$R^{\mathsf{T}}R = I, \quad \det R = 1, \quad R^{-1} = R^{\mathsf{T}}, \quad \mathbf{a}_b = R^{\mathsf{T}}\mathbf{a}_e, \quad \| \mathbf{a}_e \| = \| \mathbf{a}_b \|$$

- **逆变换：**正交矩阵的逆等于转置。地面分量左乘R^{T}恢复机体分量，向量长度不变。
- **方向辨析：**R与R^{T}都能通过正交和往返检查；已知机头朝东时，前向必须映到东。右图两个结果都长1，只有一个方向正确。

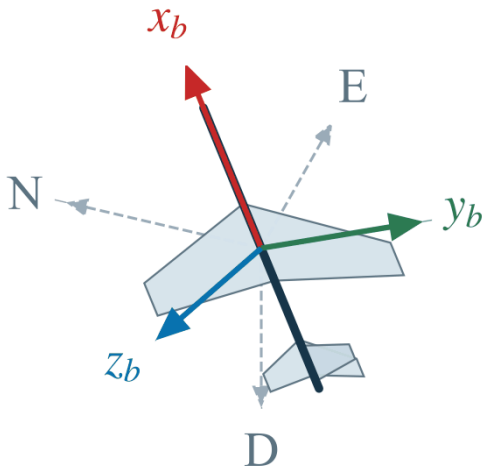


图：长度相同，方向可错

正交性检查矩阵是否合法，已知方向检查变换是否用对。

4.1.2 坐标、旋转矩阵与欧拉角：Z−Y−X约定

三个欧拉角必须连同旋转顺序一起定义



图：按当前机体轴依次旋转（动画）

三步完成

1. 偏航 $\psi = 45.0°$
   当前 z_b
2. 俯仰 $\theta = 30.0°$
   当前 y_b
3. 滚转 $\phi = 20.0°$
   当前 x_b

- **旋转约定：**依次绕当前下轴偏航 ψ、当前右轴俯仰 θ、当前前轴滚转 ϕ，称为内禀 ZYX。
- **图中演示：**偏航45°、俯仰30°、滚转20°；后两次的转轴已随前一次转动。
- **读式方法：**正向取右手规则，R 将机体分量转到地面；列向量运算时最右矩阵先作用。

$$R = R_z(\psi)R_y(\theta)R_x(\phi)$$

欧拉角只有与旋转顺序、正方向和变换方向一起给出才完整。

4.1.2 坐标、旋转矩阵与欧拉角：Z−Y−X完整公式

完整姿态矩阵可以逐列解释

- **公式来源：**将三个单轴矩阵按 $R_z R_y R_x$ 相乘，得到机体到地面的完整方向映射；记号 $c_\alpha = \cos\alpha$，$s_\alpha = \sin\alpha$，均取完整角度（不取半角）。

机头方向

$$R = \begin{bmatrix} c_\psi c_\theta & c_\psi s_\theta s_\phi - s_\psi c_\phi & c_\psi s_\theta c_\phi + s_\psi s_\phi \\ s_\psi c_\theta & s_\psi s_\theta s_\phi + c_\psi c_\phi & s_\psi s_\theta c_\phi - c_\psi s_\phi \\ -s_\theta & c_\theta s_\phi & c_\theta c_\phi \end{bmatrix}$$

下向投影

图：按列与行读矩阵

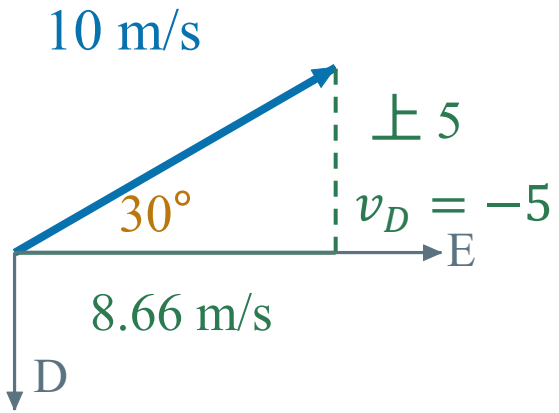
- **第一列：**表示机头前向，因此只含偏航和俯仰；绕机头自身滚转不会改变机头方向，但会改变右轴和下轴。
- **第三行：**给出三个机体轴的下向分量；$-\sin\theta$保留正俯仰抬头的符号。零姿态得到单位矩阵，纯偏航时得到前述 $R_z(\psi)$。

4.1.2 坐标、旋转矩阵与欧拉角：完整计算

双角度算例把姿态与速度方向连起来

- **题设：** $\phi = 0, \theta = 30°, \psi = 90°$，机头朝东并抬起30°；已知质心对地速度沿机头10 m/s。

$$R = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_e = R \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5\sqrt{3} \\ -5 \end{bmatrix} \text{m/s}$$



图：朝东抬头的速度投影

- **速度分解：** 东向$5\sqrt{3} \approx 8.66$ m/s、向上5 m/s；速度模长仍为10 m/s。
- **物理边界：** 速度沿机头是本题的已知条件；姿态只转换分量，真实速度仍由初值与动力学决定。

双角度算例同时检查机头方向、竖直符号与速度长度。

4.1.2 坐标、旋转矩阵与欧拉角：逆变换与象限

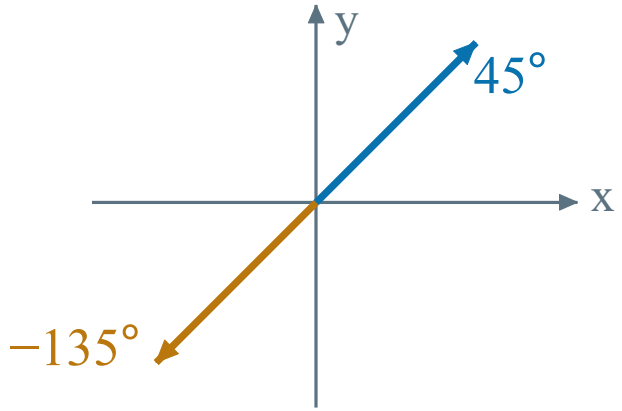
从旋转矩阵恢复欧拉角需要限定取值区间

- **俯仰主值：**由 $R_{31} = -\sin\theta$ 取反正弦；限制 $-\pi/2 < \theta < \pi/2$，才能在非奇异区间恢复与 Z−Y−X 定义一致的一组角。

$$\theta = \arcsin(-R_{31}), \quad \phi = \operatorname{atan2}(R_{32}, R_{33}), \quad \psi = \operatorname{atan2}(R_{21}, R_{11})$$

- **象限信息：**图中两箭头的y/x都为1，方向却相差180°；atan2同时保留x、y的符号。

- **适用边界：**俯仰区间不含±90°端点；近端点时欧拉角对误差敏感，同一旋转还存在周期等价角。



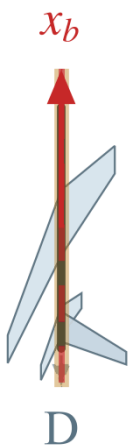
图：比值相同，象限不同

先固定角度区间，再由矩阵分量恢复欧拉角。

4.1.2 坐标、旋转矩阵与欧拉角：俯仰奇异

欧拉奇异是表示方法失去独立性

轴线共线，正向相反



偏航轴 D

滚转轴 x_b

$\psi = 30.00^\circ$

$\theta = 90.00^\circ$

$\phi = 30.00^\circ$

轴线角 0.00°

姿态不变

$x_b = -D$

$$R(0^\circ, 90^\circ, 0^\circ) = R(30^\circ, 90^\circ, 30^\circ)$$

图：俯仰90°时两转轴共线（动画）

- **奇异位置：** 俯仰 $\theta = \pm 90^\circ$ 时，滚转与偏航失去独立区分能力。姿态仍在，失去唯一性的是三角度坐标。
- **读动图：** 赭黄线为偏航轴，红虚线为滚转轴；俯仰90°时两轴共线但正向相反，两角同增30°，机体不动。

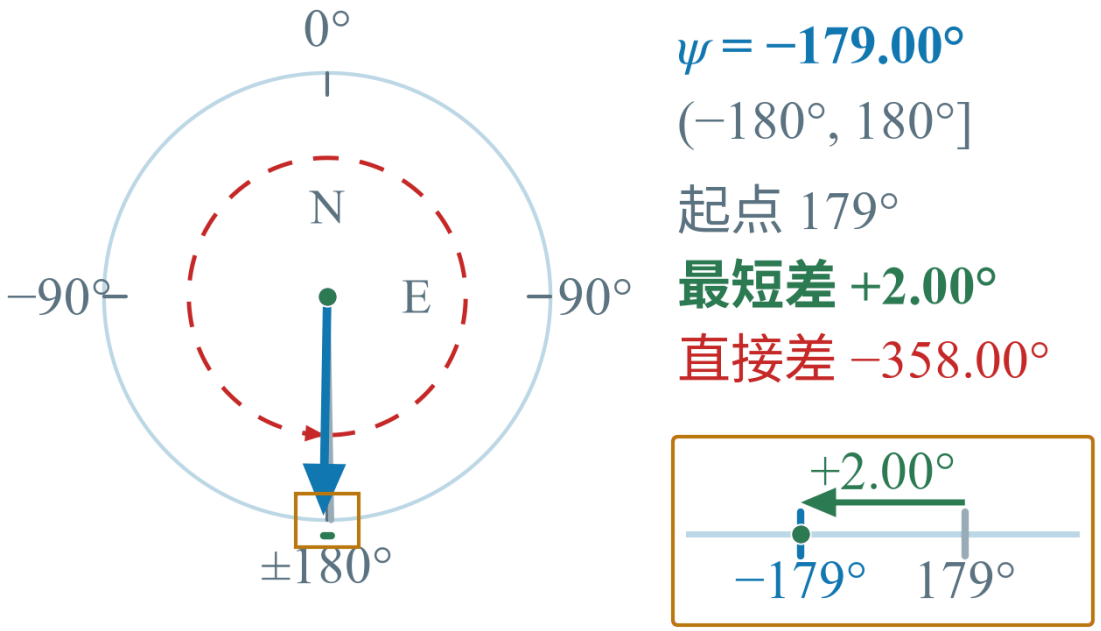
$$R(0^\circ, 90^\circ, 0^\circ) = R(30^\circ, 90^\circ, 30^\circ)$$

- **计算：** 邻近此处角度可能剧变，宜改用单位四元数或旋转矩阵连续求解。

欧拉奇异来自表示方法，飞机的物理姿态并未消失。

4.1.2 坐标、旋转矩阵与欧拉角：周期角与最短差角

角度换区间与欧拉奇异是不同问题



图：连续转向时偏航读数跨界（动画）

- **周期表示：**偏航显示在±180°区间，越界时数值换号，真实方向仍可连续变化。
- **读图：**179°到−179°是正转2°，直接相减得−358°。
- **计算含义：**atan2由正弦、余弦取最短有符号差角；换区间不是欧拉奇异。

$$\Delta\psi = \operatorname{atan2}(\sin d,\ \cos d)$$

$$d = \psi_2 - \psi_1$$

角度差要按周期计算，显示数值的跳变可能只是换区间。

本章目录

模型框架、坐标与姿态运动学

第四章 载具运动建模与仿真

4.1 运动建模基础与运动学
4.2 刚体动力学与运动求解
4.3 动力单元、受力与观测建模
4.4 配平、线性化与动态系统基础
4.5 多旋翼模型逐步编程与仿真
4.6 参数测量与静态模型辨识
4.7 动态系统辨识、验证与模型修正
4.8 典型无人载具建模与扩展
4.9 建模工具、代码生成与模型部署
4.10 API与SDK建模接口
4.11 例程体系与综合实践
4.12 习题案例分析与课程设计

首单元教材：4.1.1.1–2、4.1.2.1–4
4.1.3.1–2；模型分类另见4.2.2.1

本节 5 个教学单元

4.1.1 建模方法与统一框架
教材对应：详见左栏下方首单元细目

4.1.2 坐标、旋转矩阵与欧拉角
教材对应：第4.1.4.1节（坐标、旋转矩阵与欧拉角）

4.1.3 四元数与表示转换
教材对应：第4.1.4.1节（四元数与姿态表示）

4.1.4 姿态运动学
教材对应：第4.1.4.1节（旋转运动学方程）

4.1.5 位置、安装点与坐标约定
教材对应：第4.1.4.1节（位置运动学与坐标约定）

4.1.3 四元数与表示转换：从表示走向运动学

三种姿态表达在同一模型中分工协作

欧拉角 (ϕ, θ, ψ)

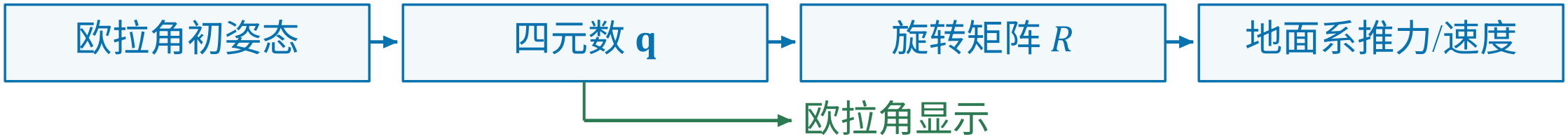
- 3个角，直观易读
- 设定初姿态与显示
- 开篇动图俯仰约−10.3°
- 俯仰±90°附近奇异

旋转矩阵 R

- 9个元素
- 正交且行列式为1
- 直接变换速度与推力
- 仍只有3个自由度

单位四元数 q

- 4个分量，单位范数
- **q** 与 **−q** 同一姿态
- 连续积分无欧拉奇异
- 乘法次序须统一



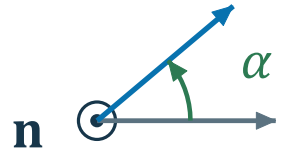
图：同一姿态的保存、运算与显示

用欧拉角读姿态，用矩阵换坐标，用单位四元数承接姿态计算。

4.1.3 四元数与表示转换：轴角与单位约束

单位四元数把旋转轴和半角写成四个分量

- **固定约定：** Hamilton 四元数标量在前，$\mathbf{q} = [q_0, q_1, q_2, q_3]^T$，与$R$一样描述机体到地面的姿态。



图：旋转轴与转角

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_0 \\ \mathbf{q}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha/2) \\ \mathbf{n}\sin(\alpha/2) \end{bmatrix}, \quad \|\mathbf{n}\| = 1,\ q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$$

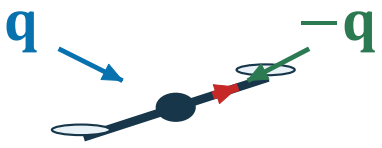
- **轴角含义：** $\mathbf{n}$ 为单位旋转轴，α 为右手转角；标量取半角余弦，向量沿 $\mathbf{n}$ 分配半角正弦。
- **单位约束：** 四分量仅含三个独立自由度，零旋转为 $[1,0,0,0]^{\mathrm{T}}$。单位四元数可跨欧拉奇异位置连续表示姿态，乘法仍须有序。

单位四元数用四个受约束的分量表示三个姿态自由度。

4.1.3 四元数与表示转换：四元数约束与连续性

正负等价与归一化分别解决什么问题

- **两组数、一个姿态：** $\mathbf{q}$与$-\mathbf{q}$表示同一空间朝向；插值或比较相邻四元数时，应先处理这种正负等价，不能把整体变号当成突然旋转。



图：正负等价

$$R(\mathbf{q}) = R(-\mathbf{q}), \quad \mathbf{q}_{\text{unit}} = \mathbf{q}_{\text{raw}}/\|\mathbf{q}_{\text{raw}}\| \ (\|\mathbf{q}_{\text{raw}}\| > 0), \quad (1,0,0,1)^{\mathsf{T}} \mapsto (1,0,0,1)^{\mathsf{T}}/\sqrt{2}$$

- **恢复单位长度：** 非零四元数可除以范数；零四元数无法归一化，也不能表示姿态。理论算例 $[1,0,0,1]^{\mathsf{T}}$ 归一化后表示正偏航90°。
- **处理边界：** 归一化只恢复约束，不纠正坐标方向、乘法次序或转角误差。比较姿态时须考虑正负等价，不能直接用四分量之差判断。

四元数整体变号不改变姿态，归一化只恢复长度约束。

4.1.3 四元数与表示转换：四元数乘法

Hamilton 乘法把点乘、叉乘与标量组合起来

- **分量记号：** p_0、q_0 为标量，$\mathbf{p}_v$、$\mathbf{q}_v$ 为三维向量；$\otimes$ 表示 Hamilton 乘法，并非四个分量逐项相乘。

$$\mathbf{p} \otimes \mathbf{q} = \begin{bmatrix} p_0 q_0 - \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{q}_v \\ p_0 \mathbf{q}_v + q_0 \mathbf{p}_v + \mathbf{p}_v \times \mathbf{q}_v \end{bmatrix}$$

- **计算结构：** 标量项是两个标量的乘积减去点乘；向量项是两项标量与向量的乘积，再加 $\mathbf{p}_v \times \mathbf{q}_v$。
- **组合顺序：** 叉乘换序反向，因此一般 $\mathbf{p} \otimes \mathbf{q} \neq \mathbf{q} \otimes \mathbf{p}$。单位四元数的有序乘积表示旋转组合，次序与对应旋转矩阵一致。

Hamilton 乘法同时组合标量、点乘和叉乘，顺序参与决定结果。

4.1.3 四元数与表示转换：旋转作用与逆

共轭夹乘给出与矩阵一致的向量旋转

- **纯向量四元数：**把 $\mathbf{a}$ 写成 $[0, a_x, a_y, a_z]^\mathsf{T}$，标量补零作为运算容器；$\mathbf{a}$ 本身不必是单位向量。

$$\mathbf{a}_e = \mathbf{q} \otimes \mathbf{a}_b \otimes \mathbf{q}^*, \quad \mathbf{q}^* = (q_0, -q_1, -q_2, -q_3)^\mathsf{T} = \mathbf{q}^{-1} \ (\|\mathbf{q}\| = 1)$$

- **旋转约定：**$\mathbf{q}$ 在左、$\mathbf{q}^*$ 在右夹乘，输出同一向量的地面分量，与 $\mathbf{a}_e = R\mathbf{a}_b$ 等价。

- **共轭与逆：**单位 $\mathbf{q}$ 的共轭才等于逆；交换夹乘两侧可反向变换，向量长度保持不变。



$\mathbf{a}_b = [1,0,0]^T$

$\mathbf{a}_e = [0,1,0]^T$

图：同一向量，两种分量

主动旋转的夹乘顺序与机体到地面的变换方向保持一致。

4.1.3 四元数与表示转换：四元数到矩阵

四元数展开为完整旋转矩阵

- **公式来源：**展开 $\mathbf{q} \otimes [0, \mathbf{a}_b] \otimes \mathbf{q}^*$，收集 $\mathbf{a}_b$ 的三个分量系数即得 $R(\mathbf{q})$，方向为机体到地面。

$$R(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 1-2(q_2^2+q_3^2) & 2(q_1q_2-q_0q_3) & 2(q_1q_3+q_0q_2) \\ 2(q_1q_2+q_0q_3) & 1-2(q_1^2+q_3^2) & 2(q_2q_3-q_0q_1) \\ 2(q_1q_3-q_0q_2) & 2(q_2q_3+q_0q_1) & 1-2(q_1^2+q_2^2) \end{bmatrix}$$

- **成立条件：**该式已使用 $q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2=1$；范数漂移时直接代入，矩阵可能不再正交。
- **读式与用途：**平方项给出同轴投影，交叉项组合不同轴；零旋转 $[1,0,0,0]^\mathsf{T}$ 得单位矩阵。速度、推力与观测方向均用这同一变换。

四元数与旋转矩阵是同一姿态的两种表达，变换方向必须相同。

4.1.3 四元数与表示转换：欧拉角到四元数

欧拉角按既定次序组合成四元数

- **组合原则：**三个单轴四元数按 $\mathbf{q} = \mathbf{q}_z(\psi) \otimes \mathbf{q}_y(\theta) \otimes \mathbf{q}_x(\phi)$ 相乘，顺序对应 $R_z R_y R_x$。

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} C_\psi C_\theta C_\phi + S_\psi S_\theta S_\phi \\ C_\psi C_\theta S_\phi - S_\psi S_\theta C_\phi \\ C_\psi S_\theta C_\phi + S_\psi C_\theta S_\phi \\ S_\psi C_\theta C_\phi - C_\psi S_\theta S_\phi \end{bmatrix}$$

- **半角记号：**$C_\alpha = \cos(\alpha/2)$、$S_\alpha = \sin(\alpha/2)$；四行依次为 q_0、q_1、q_2、q_3。
- **使用方式：**欧拉角便于设置初始朝向，再转成四元数保存。三个角全零时得到 $[1,0,0,0]^\mathrm{T}$；误用整角函数会产生错误姿态。

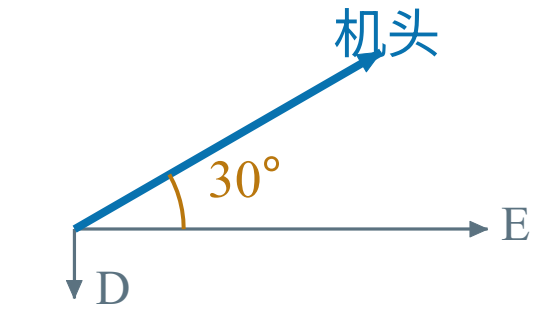
半角正弦与余弦按既定乘法次序组成完整四元数。

4.1.3 四元数与表示转换：代入计算

同一双角度姿态得到怎样的四元数

- **继续理论算例：** $\phi = 0$、$\theta = 30°$、$\psi = 90°$，因此半角是0、15°、45°；代入完整半角公式得到下式。

$$\mathbf{q} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} \sqrt{3}+1 \\ -(\sqrt{3}-1) \\ \sqrt{3}-1 \\ \sqrt{3}+1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.683013 \\ -0.183013 \\ 0.183013 \\ 0.683013 \end{bmatrix}$$



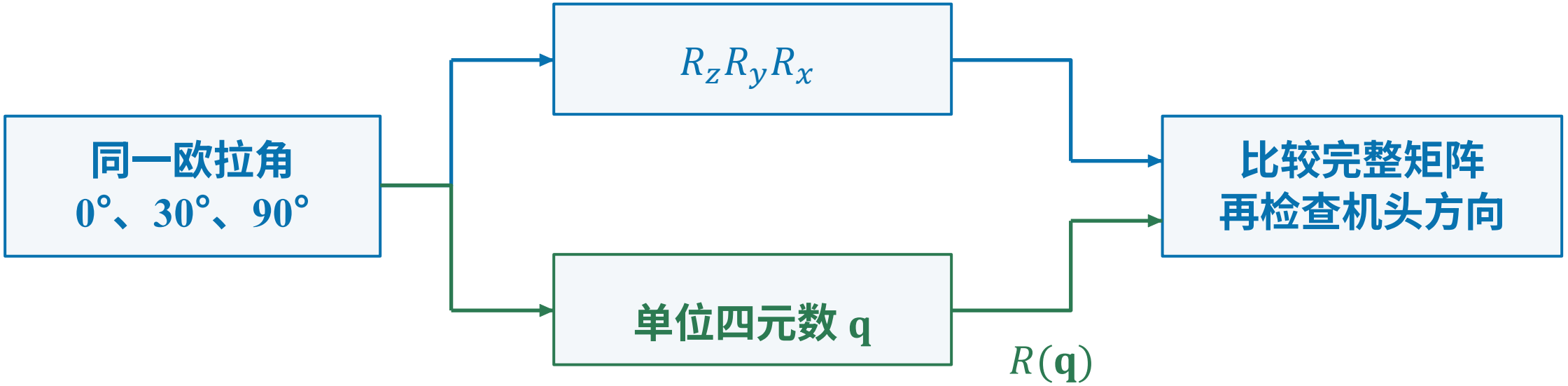
图：同一朝东抬头姿态

- **数值含义：** 第一项是标量，后三项是向量；q_1为负、q_2为正来自乘法次序。精确根式的平方和为一，小数仅作近似。
- **几何含义：** 机头朝东且抬起30°；后续转回矩阵，核验它与欧拉角表达一致。

两个非零角度共同检验半角代入与四元数乘法次序。

4.1.3 四元数与表示转换：图解与核验

同一输入，沿两条路径计算同一姿态



范数与正交性检查“是否合法”；矩阵与方向检查“是否同一姿态”。

图：姿态转换函数的两路交叉核算

完整矩阵相等且物理方向一致，才能说明姿态约定匹配。

4.1.3 四元数与表示转换：代入计算

由欧拉角与四元数交叉核验同一姿态

- **同一题设：** $\phi = 0$、$\theta = 30°$、$\psi = 90°$，机头朝东并抬起30°。将半角0°、15°、45°代入得到：

$$\mathbf{q} = 1/4\,[\sqrt{3}+1,\ -(\sqrt{3}-1),\ \sqrt{3}-1,\ \sqrt{3}+1]^{\mathsf{T}}$$

欧拉角 $\rightarrow R_z R_y R_x$

$$\mathbf{q} \approx [0.683013,\ -0.183013,\ 0.183013,\ 0.683013]^{\mathsf{T}}$$

欧拉角 $\rightarrow \mathbf{q} \rightarrow R$

$$R(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} = R_z(90°)R_y(30°)R_x(0)$$

- **交叉核验：** 范数、正交性检查是否合法；两路矩阵相等且前轴方向一致，才说明约定匹配。前向10 m/s映成东向8.66、向上5 m/s。

本章目录

模型框架、坐标与姿态运动学

第四章 载具运动建模与仿真

4.1 运动建模基础与运动学
4.2 刚体动力学与运动求解
4.3 动力单元、受力与观测建模
4.4 配平、线性化与动态系统基础
4.5 多旋翼模型逐步编程与仿真
4.6 参数测量与静态模型辨识
4.7 动态系统辨识、验证与模型修正
4.8 典型无人载具建模与扩展
4.9 建模工具、代码生成与模型部署
4.10 API与SDK建模接口
4.11 例程体系与综合实践
4.12 习题案例分析与课程设计

首单元教材：4.1.1.1–2、4.1.2.1–4
4.1.3.1–2；模型分类另见4.2.2.1

本节 5 个教学单元

4.1.1 建模方法与统一框架
教材对应：详见左栏下方首单元细目

4.1.2 坐标、旋转矩阵与欧拉角
教材对应：第4.1.4.1节（坐标、旋转矩阵与欧拉角）

4.1.3 四元数与表示转换
教材对应：第4.1.4.1节（四元数与姿态表示）

4.1.4 姿态运动学
教材对应：第4.1.4.1节（旋转运动学方程）

4.1.5 位置、安装点与坐标约定
教材对应：第4.1.4.1节（位置运动学与坐标约定）

4.1.4 姿态运动学：旋转轴与角率映射

机体角速度为什么不等于欧拉角率

- **物理含义：** p, q, r是绕当前机体前、右、下三轴的角速度分量；滚转ϕ、俯仰θ、偏航ψ则按ZYX次序描述姿态，三次旋转所依据的轴并不全是最终机体轴。
- **映射原因：** 各欧拉角率先投影到同一机体系，再相加形成实际角速度。反向求解得到下式，矩阵随当前姿态变化，陀螺输出因此不能直接逐分量积分为欧拉角。

$$\begin{bmatrix}\dot{\phi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\psi}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \sin\phi\tan\theta & \cos\phi\tan\theta\\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi\\ 0 & \sin\phi/\cos\theta & \cos\phi/\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p\\ q\\ r\end{bmatrix}$$

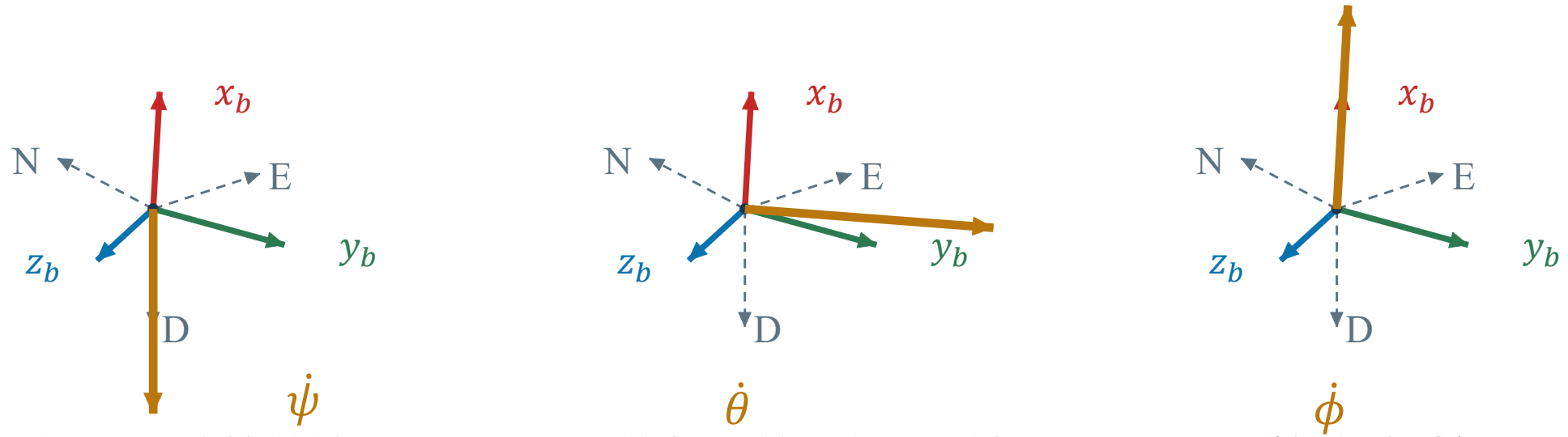
- **适用条件：** 角度以弧度进入计算，$\cos\theta$必须非零；当滚转和俯仰都很小时，映射才近似单位阵，单轴水平算例不能证明一般姿态下也能直接对应。

欧拉角率是姿态参数的变化，必须由实际角速度经过几何映射得到。

4.1.4 姿态运动学：图解与核验

欧拉角率的转轴与陀螺机体轴不同

偏航率：地面下轴　　**俯仰率：中间右轴**　　**滚转率：最终前轴**



图例：欧拉转轴　最终机体前、右、下轴　NED（灰色虚线）

图：ZYX欧拉角率的三根瞬时转轴

先统一各转动分量的坐标轴，再合成实际角速度。

4.1.4 姿态运动学：欧拉角率算例与奇异性

同一角速度，在水平与倾斜姿态下怎样变化

- **统一题设：**机体角速度取$[p,q,r]=[0,0,1]\,\mathrm{rad/s}$。水平姿态$\phi=\theta=0$时，三个角率为$[0,0,1]\,\mathrm{rad/s}$；这只是映射恰好退化为单位阵的特例。
- **倾斜计算：**改为$\phi=30°$、$\theta=60°$，逐行代入得滚转角率1.5、俯仰角率−0.5、偏航角率1.732051 rad/s；三个欧拉角同时变化，实际角速度仍只沿机体下轴。

$$\dot{\phi}=\cos30°\tan60°=1.5,\quad \dot{\theta}=-\sin30°=-0.5$$

$$\dot{\psi}=\cos30°/\cos60°=1.732051\ \mathrm{rad/s}$$

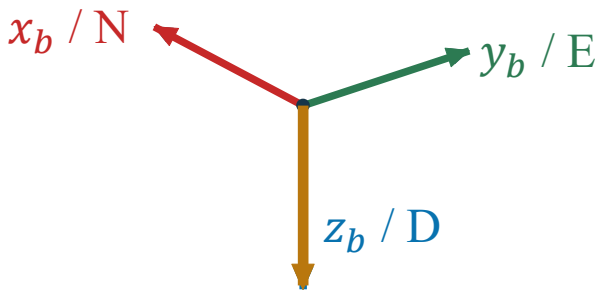
- **奇异解释：**θ接近±90°时，正切和余弦分母使角率表示敏感甚至无定义，机体并不因此产生无限角速度。大姿态运动宜用四元数积分，再按需输出欧拉角。

倾斜算例能揭示直接积分$p,\ q,\ r$的错误，奇异性属于姿态表示。

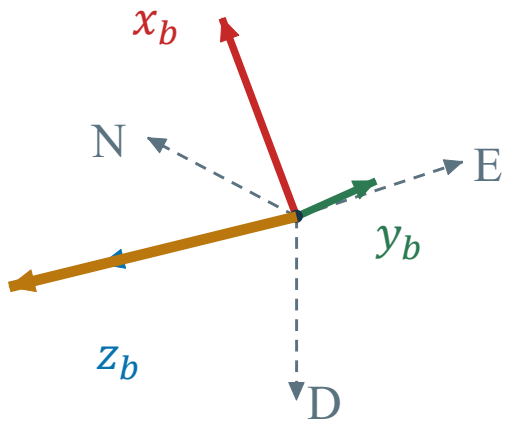
4.1.4 姿态运动学：图解与核验

同一个机体系输入，对应不同的欧拉角率

水平： $\phi = 0, \theta = 0$



倾斜： $\phi = 30°, \theta = 60°$



两侧输入均为 $[p, q, r] = [0,0,1]$ **rad/s**

$[\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}] = [0,0,1]$

$[\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}] = [1.5, -0.5, 1.732]$

图：沿各自机体下轴的同一角速度分量

相同的p、q、r，经过随姿态变化的映射得到不同欧拉角率。

4.1.4 姿态运动学：同输入的连续转动

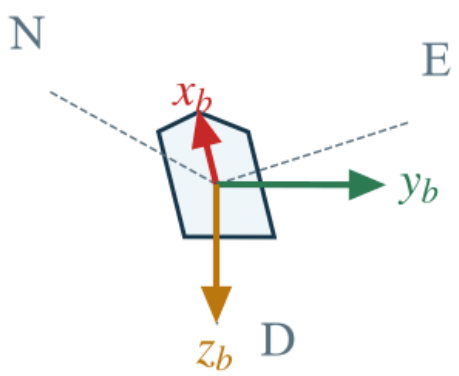
保持相同机体角速度，欧拉角率仍随姿态变化

全程结果

$t = 0.600$ s

机体系输入均为 $[p, q, r] = [0,0,1]$ rad/s

A: $\phi_0 = 0°, \theta_0 = 0°$



当前欧拉角率

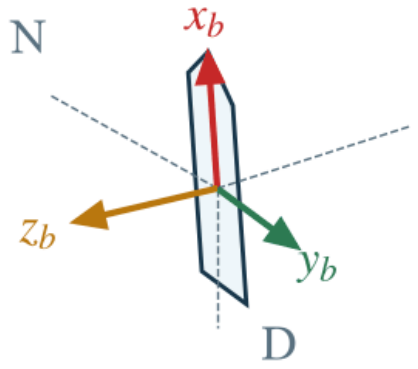
$\dot{\phi} = 0.000$ rad/s

$\dot{\theta} = 0.000$ rad/s

$\dot{\psi} = 1.000$ rad/s

初始角率 [0.0, 0.0, 1.000] rad/s

B: $\phi_0 = 30°, \theta_0 = 60°$



当前欧拉角率

$\dot{\phi} = 0.370$ rad/s

$\dot{\theta} = -0.849$ rad/s

$\dot{\psi} = 0.645$ rad/s

初始角率 [1.5, -0.5, 1.732] rad/s

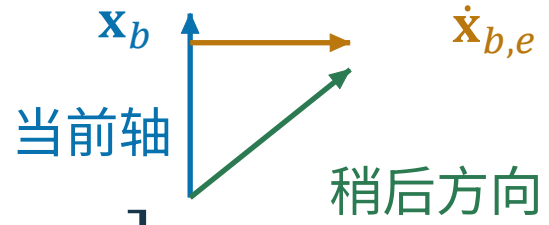
图：两种初态沿各自机体下轴转动，欧拉角率按当前姿态重算

相同的p、q、r，经过随姿态变化的映射得到不同欧拉角率。

4.1.4 姿态运动学：叉乘矩阵与姿态微分

旋转矩阵的导数来自机体轴的转动

- **几何来源：**机体固定轴随角速度转动，瞬时导数等于角速度叉乘该轴。右图正偏航使前轴导数沿当前右轴。



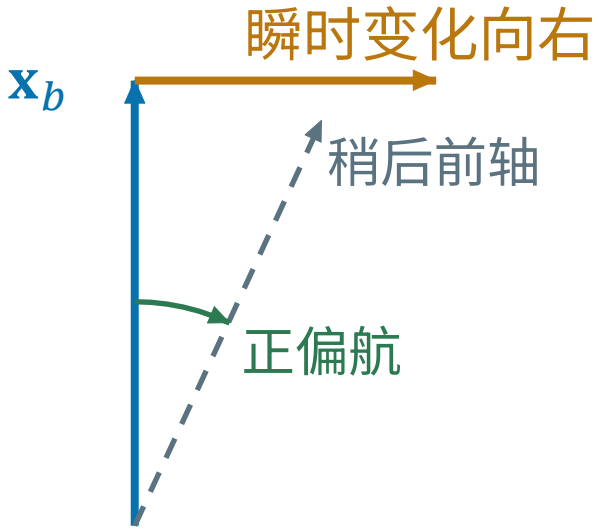
$$\dot{R} = R[\boldsymbol{\omega}_b]_\times, \qquad [\boldsymbol{\omega}_b]_\times = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix}$$

- **乘法方向：**角速度在机体系表达，先求机体轴的变化，再乘 R 转到地面；这决定右乘次序。
- **约束：**$R^{\mathsf{T}}R = I$、$\det R = 1$。九个元素只表示三个转动自由度；数值积分误差可能破坏正交性。

姿态微分把角速度转成坐标轴的连续变化，并保留旋转约束。

4.1.4 姿态运动学：图解与核验

轴在转动时，它的导数沿瞬时切线



俯视；此刻FRD与NED对齐

图：正偏航瞬间的前轴与切向变化

- **几何关系：** $\boldsymbol{\omega}_b = r\mathbf{z}_b$，因此 $\boldsymbol{\omega}_b \times \mathbf{x}_b = r\mathbf{y}_b$。
- **坐标关系：** 先在机体系求轴的变化，再乘R转出，得到$\dot{R} = R[\boldsymbol{\omega}_b]_\times$。

叉乘给出轴方向的变化，再由R转换到地面坐标。

4.1.4 姿态运动学：Hamilton约定与分量公式

四元数微分把角速度变成姿态变化

- **表示约定：** $\mathbf{q} = [q_0, \mathbf{q}_v]$表示机体到地面旋转，$q_0$为标量且放在第一项，$\mathbf{q}_v$是三维向量；采用Hamilton乘法，$\boldsymbol{\omega}_b$在机体系表达，姿态增量从右侧相乘。

$$\mathbf{p} \otimes \mathbf{q} = (p_0 q_0 - \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{q}_v,\ p_0 \mathbf{q}_v + q_0 \mathbf{p}_v + \mathbf{p}_v \times \mathbf{q}_v)$$

- **公式含义：** 乘积的标量部分包含向量点积，向量部分包含叉乘。将纯角速度四元数$[0, \boldsymbol{\omega}_b]$代入，即得到四个姿态导数；粗体$\mathbf{q}$与角速度分量$q$是不同变量。

$$\dot{\mathbf{q}} = 1/2\, \mathbf{q} \otimes [0, \boldsymbol{\omega}_b^{\mathsf{T}}]^{\mathsf{T}} = 1/2 \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\omega}_b^{\mathsf{T}} \mathbf{q}_v \\ q_0 \boldsymbol{\omega}_b + \mathbf{q}_v \times \boldsymbol{\omega}_b \end{bmatrix}$$

- **约束与用途：** 单位四元数满足$\mathbf{q}^{\mathsf{T}}\mathbf{q} = 1$，表示三个转动自由度，$\mathbf{q}$与$-\mathbf{q}$对应同一姿态。公式避开欧拉俯仰奇异点，但数值实现仍须保持范数并核对旋转方向。

固定旋转方向、分量顺序和乘法约定，四元数导数才有唯一实现。

4.1.4 姿态运动学：单轴旋转与有限增量

恒定角速度的解析姿态与一步更新

- **单轴解析题：**由单位姿态出发，绕机体下轴以 $\pi/2\,\mathrm{rad/s}$ 匀速旋转；1 s后机头从北转向东，物理转角90°。

$$\mathbf{q}(t) = [\cos(\pi t/4), 0, 0, \sin(\pi t/4)]^{\mathsf{T}}$$

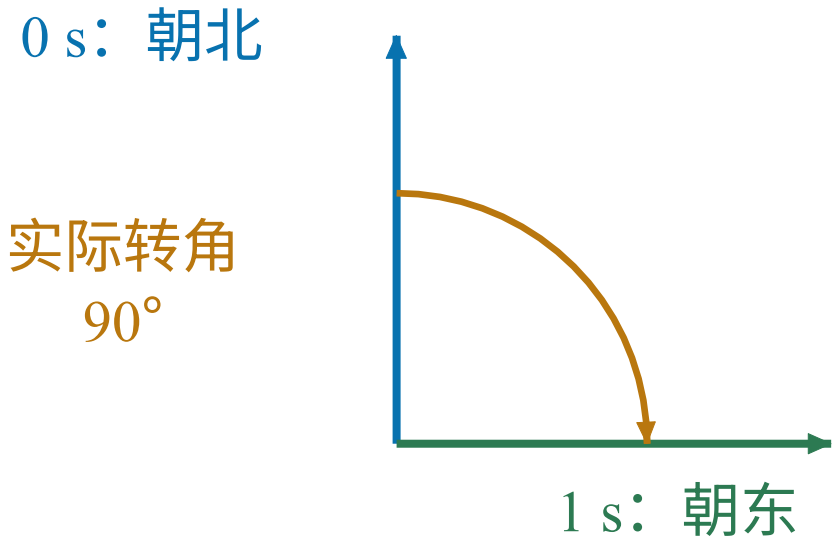
- **一步更新：**步长 h 内机体角速度恒定时，$\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{q}_k \otimes \delta\mathbf{q}$；角速度为零时取单位增量，避免归一化零向量。

$$\delta\mathbf{q} = [\cos(\| \boldsymbol{\omega}_b \| h/2),\ \mathbf{n}^{\mathsf{T}}\sin(\| \boldsymbol{\omega}_b \| h/2)]^{\mathsf{T}}, \quad \mathbf{n} = \boldsymbol{\omega}_b/\| \boldsymbol{\omega}_b \|$$

转角决定四元数半角，角速度恒定时可直接构造单位姿态增量。

4.1.4 姿态运动学：图解与核验

机头转90°，四元数计算使用45°半角



代入半角：$90° / 2 = 45°$

$$\mathbf{q}(1) = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]^{\mathsf{T}}$$

- **恒定角速度：**$\omega_z = \pi/2$ rad/s。一个步长内角速度近似恒定时，可用同样方法构造单位增量。

图：实际转角与表示公式中半角的不同职责

半角属于姿态的表示公式，实际机头仍转过完整90°。

4.1.4 姿态运动学：机体系增量的右乘含义

不同轴的两次旋转不能交换顺序

- **明确过程：**先绕x轴滚转90°，再绕当前机体z轴转90°。第二次转轴已经随第一次旋转改变，因此机体系增量应右乘当前四元数，对应矩阵$R_x R_z$。

$$\mathbf{q}_x = [c, c, 0, 0]^{\mathsf{T}}, \quad \mathbf{q}_z = [c, 0, 0, c]^{\mathsf{T}}, \quad c = \sqrt{2}/2$$

$$\mathbf{q}_x \otimes \mathbf{q}_z = [0.5, 0.5, -0.5, 0.5]^{\mathsf{T}}, \quad R_x R_z \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_z$$

- **结果对照：**正确乘积的第三个分量为-0.5，机体前轴最终朝下；交换乘法后该分量变为$+0.5$，前轴改为朝东。两者都保持单位范数，却表示不同姿态。

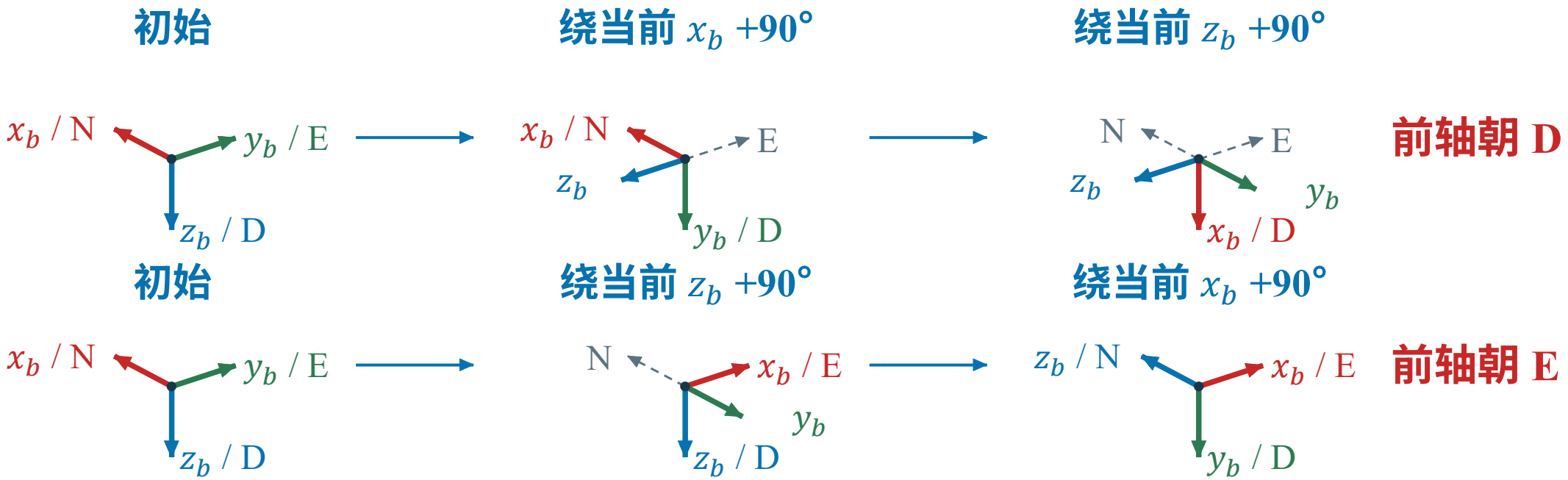
$$\mathbf{q}_z \otimes \mathbf{q}_x = [0.5, 0.5, 0.5, 0.5]^{\mathsf{T}}, \quad R_z R_x \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y$$

- **为什么有鉴别力：**从单位姿态只做一次单轴转动时，左右乘可能给出相同结果；选择不平行的两个轴，才能暴露“公式合法但旋转顺序用错”的问题。

姿态乘法顺序决定增量沿哪组轴发生，范数正确并不保证方向正确。

4.1.4 姿态运动学：图解与核验

每转一次，下一次“机体轴”也跟着改变



图：两条机体系旋转序列；彩色为前、右、下三轴

交换机体系旋转增量，最终前轴从朝下变为朝东。

本章目录

模型框架、坐标与姿态运动学

第四章 载具运动建模与仿真

4.1 运动建模基础与运动学
4.2 刚体动力学与运动求解
4.3 动力单元、受力与观测建模
4.4 配平、线性化与动态系统基础
4.5 多旋翼模型逐步编程与仿真
4.6 参数测量与静态模型辨识
4.7 动态系统辨识、验证与模型修正
4.8 典型无人载具建模与扩展
4.9 建模工具、代码生成与模型部署
4.10 API与SDK建模接口
4.11 例程体系与综合实践
4.12 习题案例分析与课程设计

首单元教材：4.1.1.1–2、4.1.2.1–4
4.1.3.1–2；模型分类另见4.2.2.1

本节 5 个教学单元

4.1.1 建模方法与统一框架
教材对应：详见左栏下方首单元细目

4.1.2 坐标、旋转矩阵与欧拉角
教材对应：第4.1.4.1节（坐标、旋转矩阵与欧拉角）

4.1.3 四元数与表示转换
教材对应：第4.1.4.1节（四元数与姿态表示）

4.1.4 姿态运动学
教材对应：第4.1.4.1节（旋转运动学方程）

4.1.5 位置、安装点与坐标约定
教材对应：第4.1.4.1节（位置运动学与坐标约定）

4.1.5 位置、安装点与坐标约定：状态与位置更新

运动状态保存什么，位置又怎样更新

- **刚体状态：**位置$\mathbf{r}_e$、速度$\mathbf{v}_e$在地面系表达，角速度$\boldsymbol{\omega}_b$在机体系表达，$\mathbf{q}$保存机体到地面的姿态；初值和受力共同决定后续运动。

$$\mathbf{x} = [\mathbf{r}_e^{\mathsf{T}}, \mathbf{v}_e^{\mathsf{T}}, \mathbf{q}^{\mathsf{T}}, \boldsymbol{\omega}_b^{\mathsf{T}}]^{\mathsf{T}}, \quad \mathbf{q}^{\mathsf{T}}\mathbf{q} = 1$$

位置：3个数	速度：3个数	四元数：4个数	角速度：3个数

图：13个存储数；单位范数约束后为12个独立状态

- **位置更新：**机头朝东，且只沿机体前向以2 m/s匀速运动，两秒向东移动4 m。转向后先更新R，再转换速度；执行器动态还会另增状态。

$$\dot{\mathbf{r}}_e = \mathbf{v}_e = R\mathbf{v}_b$$

六自由度说明位置与姿态，预测运动还需保存速度和角速度。

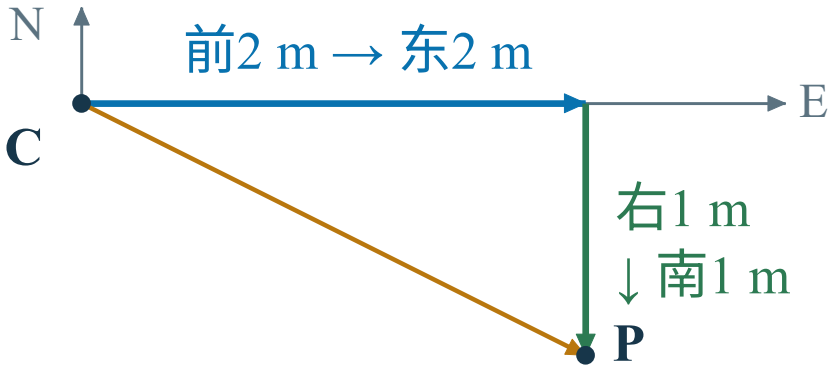
4.1.5 位置、安装点与坐标约定：位置变换与算例

安装点的位置要先旋转，再加质心位置

- **题设：**机头朝东，位置单位为m。

$$\mathbf{r}_{C,e} = [100,200,-10]^T$$

$$\boldsymbol{\rho}_{CP,b} = [2,1,0]^T$$



图：质心附近的安装点位移

- **位置关系：**C是质心，P为安装点；$\mathbf{r}_{C,e}$与$\mathbf{r}_{P,e}$共用同一地面原点。

$$\mathbf{r}_{P,e} = \mathbf{r}_{C,e} + R\boldsymbol{\rho}_{CP,b}$$

$$R\boldsymbol{\rho}_{CP,b} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{m}$$

- **位置结果：**前2m、右1m转为东2m、南1m，再加质心位置得$[99,202,-10]^{\mathrm{T}}$ m。

旋转转换方向，平移补上两个原点之间的位置差。

4.1.5 位置、安装点与坐标约定：速度与相对运动

速度换坐标与不同点的速度不能混用

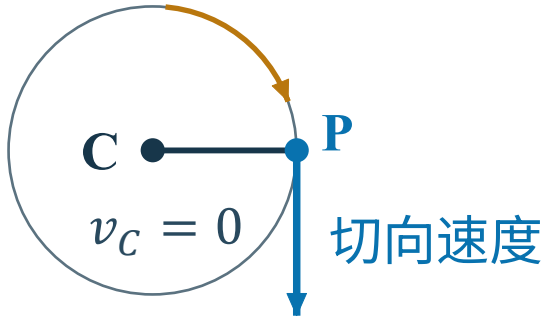
- **同一速度：** $\mathbf{v}_{C,b}$ 与 $\mathbf{v}_{C,e}$ 都是质心相对地面的速度，只是沿不同轴分解，变换不加入原点位置。

$$\mathbf{v}_{C,e} = R\mathbf{v}_{C,b}, \qquad \mathbf{v}_{P,e} = \dot{\mathbf{r}}_{C,e} + \dot{R}\boldsymbol{\rho}_{CP,b} + R\dot{\boldsymbol{\rho}}_{CP,b}$$

- **不同点：** 安装点位置求导后，速度包含质心平移、机体转动、安装点相对机体运动三项。

- **固定安装：** $\dot{\boldsymbol{\rho}}_{CP,b} = 0$，但$\dot{R}\boldsymbol{\rho}_{CP,b}$可非零；质心不动，偏心传感器仍可沿圆弧运动。

安装点相对机体固定



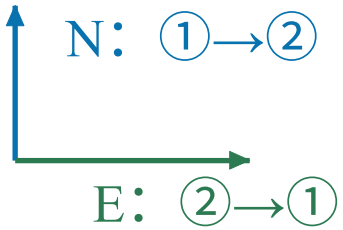
图：偏心点随机体转动

同一速度换坐标只需旋转，不同点的速度还包含刚体运动。

4.1.5 位置、安装点与坐标约定：接口约定互换

坐标约定转换包含轴序与符号两部分

- **地面轴序：**东北天（ENU）按东、北、上排列。NED转ENU时，前两分量互换，第三分量反号。



$$\mathbf{a}_{ENU} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{a}_{NED}, \quad \mathbf{a}_{FLU} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{a}_{FRD}$$

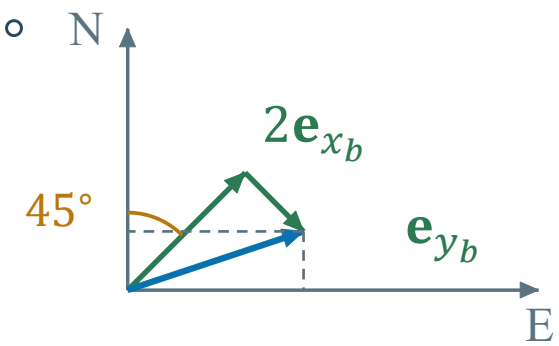
- **机体正向：**前左上（FLU）保留前向，将右轴、下轴同时反向；两轴翻转仍保持右手关系。
- **使用边界：**以上转换向量分量，位置还需考虑原点差；姿态矩阵要转换两端坐标基。北向1 m在ENU中为 $[0,1,0]^{\mathrm{T}}$ m。

坐标约定改变时，轴的排列与符号需要一起转换。

课堂练习

换坐标会改变速度大小吗

- **题设：**载具水平、偏航 $\psi = 45°$，机体速度 $\mathbf{v}_b = [2,1,0]^T$ m/s。求地面速度，判断有无向下分量，并比较转换前后的速率。



图：速度向量相加

$$\mathbf{v}_e = [2\cos45° - \sin45°,\ 2\sin45° + \cos45°,\ 0]^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{v}_e = [0.707107,2.121320,0]^{\mathrm{T}}\ \mathrm{m/s}, \quad \| \mathbf{v}_e \| = \| \mathbf{v}_b \|$$

- **解答：**前、右分量投影到北、东轴，竖直分量为零。图中东向贡献相加、北向贡献部分抵消；两种表达的速率均为$\sqrt{5} \approx 2.236068\,\mathrm{m/s}$，保持不变。
- **反向核验：**$R^T\mathbf{v}_e$应恢复$[2,1,0]^T$ m/s。往返运算检查正逆一致性；实际方向仍须对照北、东轴。

坐标变换改变分量，正交旋转保持向量长度与真实运动。

课堂练习

自检：方向、半角与角率映射

- **题1：** 水平姿态、$\psi = 135°$，机体前向速度3 m/s。地面速度是多少？朝哪个方向？
- **题2：** 绕机体下轴以 $\omega_z = \pi/3$ rad/s 匀速旋转，步长0.5 s。一步增量 $\delta\mathbf{q}$ 是多少？
- **题3：** $\phi = 30°,\ \theta = 0$，陀螺读数 $[p, q, r] = [0,0.2,0]$ rad/s。三个欧拉角率各是多少？
- **参考要点：** 题1 $\mathbf{v}_e = [-2.121,2.121,0]^{\mathsf{T}}$ m/s，朝东南；题2 转角30°，代入半角15°得 $\delta\mathbf{q} = [0.9659,0,0,0.2588]^{\mathsf{T}}$；题3 $[\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}] = [0,0.173,0.1]$ rad/s，俯仰率与偏航率同时非零。

先用已知方向、半角和角率映射核对，再相信程序输出。

课堂练习：一维升降例程入口

用2 kg教学模型复现推力到高度的计算

- **目录：**[安装目录]/RflySimAPIs/4.RflySimModel/1.BasicExps/e6_ModelingLearningLab/01_VerticalRigidBody/，先读 Readme.pdf

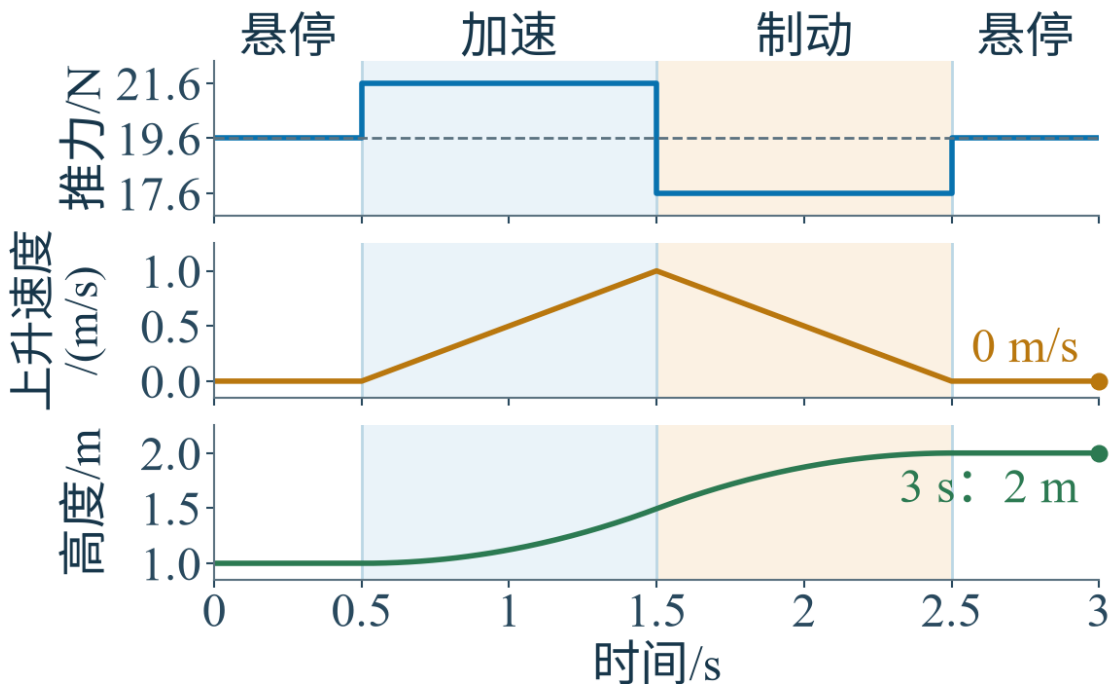
```
r = vertical_beginner;
```

- **运行：**离线计算，只需 MATLAB。把当前目录切到该文件夹，在 vertical_beginner.m 中核对质量、重力、分段推力和初高，再执行上式。
- **正常结束：**命令行显示 3 s 时 height = 2 m、vD = 0 和 Default-case checks passed.；outputs 中生成 CSV 表、JSON 误差与曲线 PNG。
- **常见失败：**安装目录不可写时，把可写目录作第一个参数，如 vertical_beginner(fullfile(tempdir,'vb'))；步长须整除 0.5 s，否则 assert 报错。

先核输入与初值，再用输出表和曲线解释每一段运动。

课堂练习：离线参考结果判读

推力先加速，主动制动后才能静止



图：一维升降参考曲线（教学算例，非平台实测）

- **读图：**上栏是推力分段；加速段速度升到1 m/s，制动段降回0。
- **结论：**3 s时高度2 m、速度0；若加速后直接恢复19.6 N，3 s时约升到3 m。
- **步长检查：**dt减半，最大位置误差约由0.005 m降到0.0025 m。
- **改质量：**2.2 kg时19.6 N不足以平衡21.56 N重力，高度持续下降。

结果要按输入时段、坐标符号、误差和模型边界解释。

本节小结

从模型边界到运动结果，保持同一套约定

- 先定对象与边界：教材完整模型连接执行器、环境、受力、机身和观测；2 kg教学案例只在已声明条件下给定推力或取零某些作用。
- 统一NED/FRD、单位与变换方向：向量换坐标用旋转矩阵；安装点还须考虑原点，角速度须经运动学才能更新姿态。
- 同一输入核对一步代入与整段结果；正交矩阵、单位四元数和物理方向均要检查，数值合法不等于方向正确。
- **易错点：**把p、q、r直接积分成欧拉角；R与其转置用反（正交检查照样通过）；四元数误用整角；NED中上升速度为负；机体系增量误用左乘。下一节由合力和惯量求加速度。

模型边界、坐标约定和结果证据一致，预测才可解释。