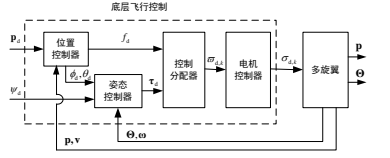
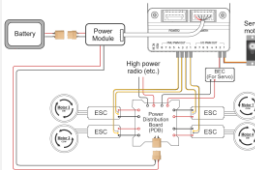
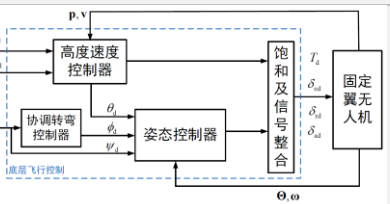
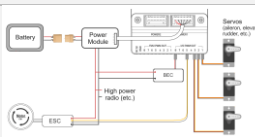

无人载具系统建模基础 1. 背景知识——载具分类与装配概述 1 主流无人系统支持的载具分类 1 常规载具的装配与控制原理 1 统一建模框架 22. 无人载具统一建模理论 4 运动参考坐标系与运动状态的描述 4 参考坐标系 4 运动状态的描述及参考系转换方法 5 其他常用参考系及运动状态描述 10 载具运动模型构建 12 开发工具箱 123. 相关文献 13 附加资源 13

背景知识——载具分类与装配概述主流无人系统支持的载具分类参考两个开源的飞控社区 PX4 和 APM: https://docs.px4.io/main/en/airframes/airframe_reference.html<https://ardupilot.org/ardupilot/index.html>

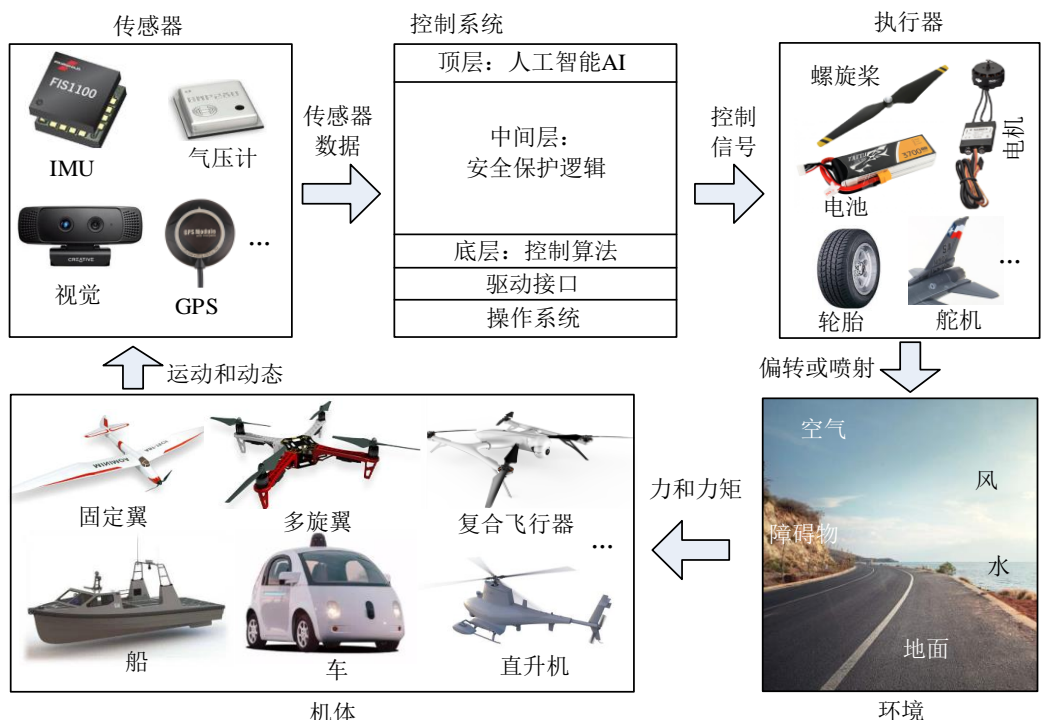
常规支持的载具	其它载具
多旋翼	无人车与无人船（控制原理相似，飞控中用同一种机架描述）
固定翼	无人潜航器
垂直起降	无人直升机
	无人气艇

常规载具的装配与控制原理

载具类型	控制原理	执行器布局分类	动力系统连接	
多旋翼飞行器	 <p>所有多旋翼共用一套控制器，输出力和力矩（1个推力和3个方向的力矩，总共4个控制通道）经过控制分配器（混控器 mixer）分解为不同电机数量的转速（油门）值（映射时除考虑各通道的控制需求，还有响应需求的机动性能相关考量）</p>	电机-螺旋桨的安装方式	 <p>强电连接：电池——电调——电机——螺旋桨 弱电连接：飞控自驾仪——电调</p>	
		影响控制效率		平铺 共轴
		影响控制分配		+ X 不完全对称
固定翼飞行器	 <p>和多旋翼的区别螺旋桨（引擎）和多旋翼相同 0-1 范围控制量，对应油门（转速）范围舵机控制量的范围是-1到1的范围，对应舵面的偏转角度范围</p>	舵机舵面的安装方式 电机-螺旋桨的安装方式		

 <p>常规固定翼控制通道 MAIN1: aileron: 副翼 MAIN2: elevator: 升降舵 MAIN3: throttle: 油门 MAIN4: rudder: 方向舵 MAIN5: flaps: 襟翼 MAIN6: gear: 起落架</p>	<p>相对多旋翼续航更长 无法垂直起降，需要较长起降跑道多一个空速管，控制大多基于空速而非地速</p>	
 <p>飞翼固定翼控制通道 MAIN1: 左副翼 MAIN2: 右副翼 MAIN4: 油门</p>	<p>没有方向舵，需要依靠滚转角，进行转弯控制升降舵和副翼合并，依靠两者的差动实现滚准和俯仰控制。无法跑道起飞降落，通常需要抛射起飞或降落伞降落</p>	
 <p>复合固定翼（垂直起降 VTOL） VTOL 无人机 MAIN1-4: 电机 1-4 AUX1: Aileron 1: 副翼 AUX2: Aileron 2: 副翼 AUX3: Elevator: 升降舵 AUX4: Rudder: 方向舵 AUX5: Throttle: 油门</p>	<p>综合固定翼和多旋翼双重优势，能垂直起降且具备高航时旋翼动力系统本身占用载荷重量，且会带来额外的风阻等。</p>	

统一建模框架如图 4-1 所示，不同类型的无人系统（例如无人车、无人机、无人船等）的外形和运行环境不一样，但是它们从系统结构图上有非常多建模与仿真系统可以大量复用的共同的特点。因此，本章节介绍的模型框架采用了模块化的方法将整个无人模型系统划分为若干子系统，使最大化这些公共因素，使复杂的建模问题简单化。



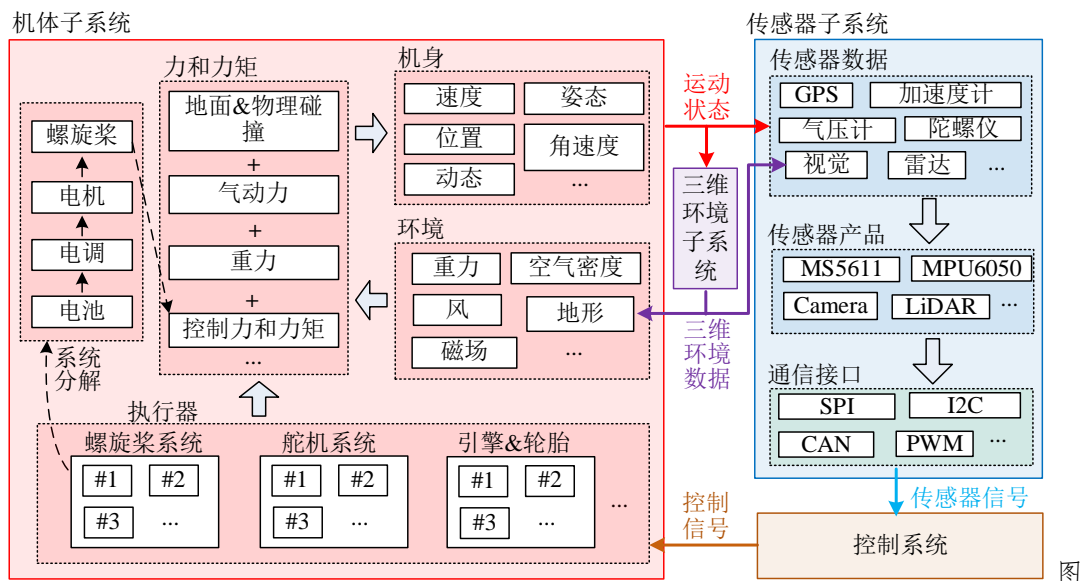
图

4-1 不同类型无人载具系统的共同系统结构如图 4-2 所示，不同类型的无人载具系统间的根本差别在于执行器和气动组件的选型和布局，这些差别可能非常大。以固定翼系统为例，其动力组件安装于机头，产生平行于机头向前的拉力（也可置于机尾和机翼，向后产生推力），而其他执行器则通过定量的偏转产生控制力矩；而多旋翼系统的四个动力单元组件则安装于四个机臂上，产生垂直于机身平面向上的拉力，但其分布位置也不同。同样的，无人船和无人车也有其独特的动力组件安装位置和控制力的生成方向。在运动过程中，无论是多旋翼、固定翼还是无人车，都会受到气动力的影响，气动力系数和其自身物理特性有关，这些无人系统也用统一的气动模型来建模。



图 4-2 不同

类型的载具的执行器布局无人系统载具运动模型可以通过物理与虚拟组件分解为错误!未找到引用源。所示的统一建模框架。在该框架中，运动模型系统整体可以细分为三个子系统：机体子系统、传感器子系统和三维环境子系统。机体子系统包含了执行器、机身、运行环境、力与力矩等内部子系统模块，是对机体在环境的运动、能耗和故障特性的整体描述；传感器模型主要用于描述控制软件之外的所有电子硬件模型，主要包含传感器数据、通信协议、连接接口等特性；三维环境模型主要用于描述无人机飞行的三维视景环境（包括树木、障碍物、公路等），用于为自主控制系统提供视觉数据的模拟。每个子系统又可以向内细分为更小的独立子系统模块，最终形成了错误!未找到引用源。所示的模块化统一建模框架。



4-3 无人系统载具运动模型连接拓扑结构

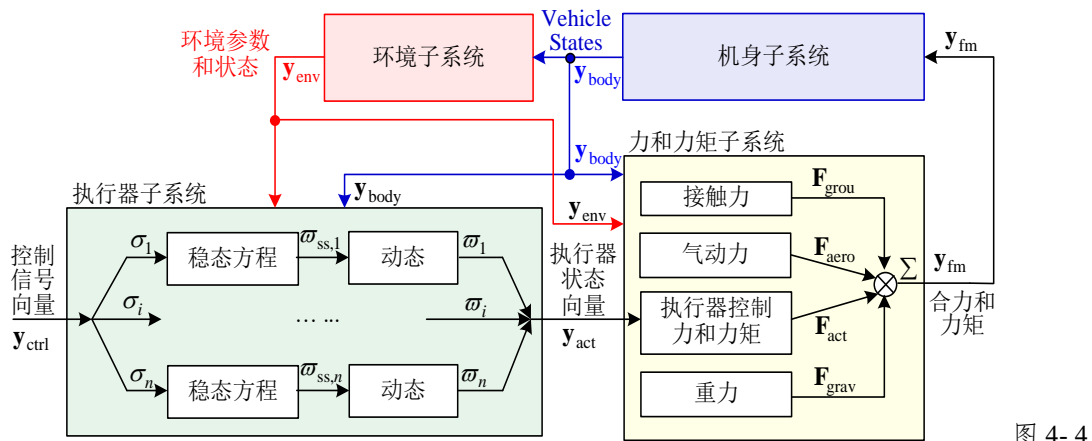


图 4-4

机体系子系统连接关系无人载具统一建模理论运动参考坐标系与运动状态的描述参考坐标系右手定则在定义坐标系前，首先介绍右手定则。如图 1(a) 所示，右手大拇指指向轴正方向，食指指向轴正方向，中指所指方向即轴正方向。进一步，如图 1(b) 所示，要确定旋转正方向，用右手大拇指指向旋转轴正方向，弯曲四指，那么四指所指方向即旋转正方向

向。本章采用的坐标系和后面定义的角度正方向都是沿用右手定则。

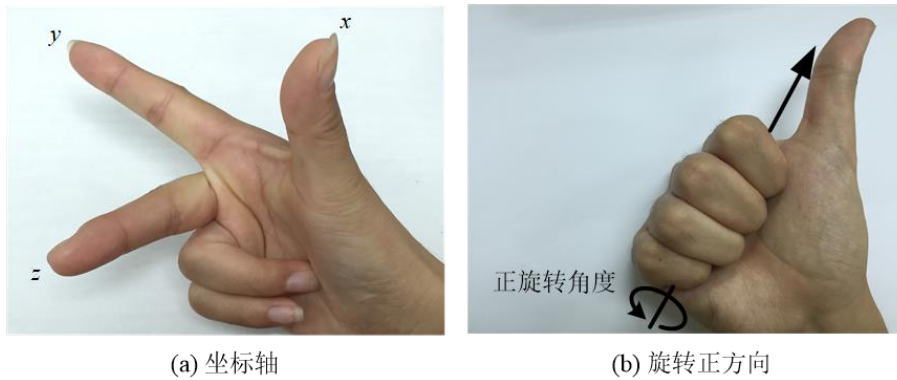


图 4-5 右手定则

下的坐标轴和旋转正方向常规坐标系 地球坐标系 $O_e - x_e y_e z_e$ （也称为地面坐标系）用于无人载具相对于地面的运动状态，确定机体的空间位置坐标。它忽略地球曲率，即将地球表面假设成一张平面。通常以载具初始位置或者地心作为坐标原点 O_e 。先让 x_e 轴在水平面内指向某一方向（通常取朝北）， z_e 轴垂直于地面向下（通常竖直向下，指向地心）。最后，按右手定则确定 y_e 轴（通常朝东）。因此，地面坐标系也称为北东地坐标系（North-East-Down, NED）。机体坐标系 $O_b - x_b y_b z_b$ 与载具机体固连，其原点 O_b 取在载具的重心（质心，或者几何中心、底盘中心等）位置上。 x_b 轴在沿水平方向指向机头朝前。 z_b 轴在载具竖直对称平面内，垂直 x_b 轴向下。最后，按右手定则确定 y_b 轴（通常指向载具右侧）。因此，机体坐标系通常也称为前右下坐标系（Forward-Right-Down, FRD）。注意：

在本书的公式中，上下标 e 表示 Earth，上下标 b 表示 Body。

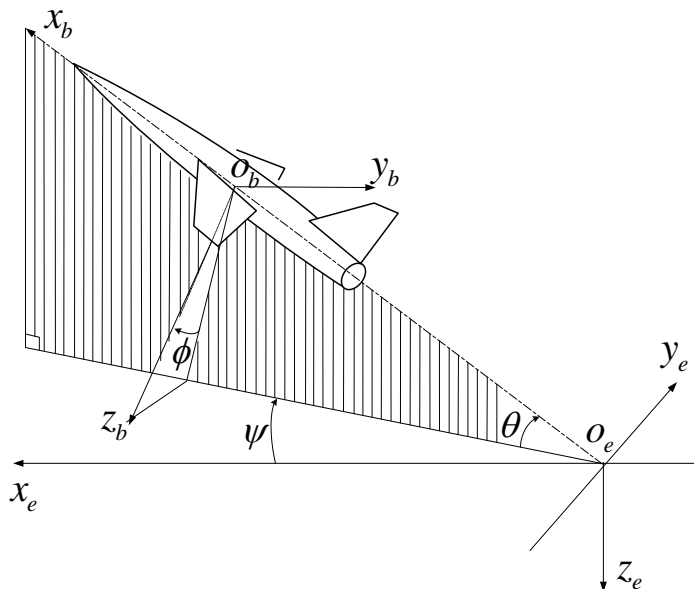


图 4-6 机体坐标系与地面坐标系

的关系图运动状态的描述及参考系转换方法欧拉角如图 4-6 所示，在载具运行过程中机体坐标系会逐渐与地面坐标系产生偏差，这个偏差就体现为载具的姿态角。目前，姿态角可

以用欧拉角、四元数、旋转矩阵等方式来表示，这里先介绍欧拉角的定义方法。欧拉角是一种直观的姿态表示方法且物理意义明确，在姿态控制中被广泛应用。根据欧拉定理，刚体绕固定点的旋转可以看作是绕该点的若干次有限旋转的合成。地球固连坐标系绕固定点经过三次基本旋转可以得到机体坐标系。在这三次基本旋转中，旋转轴是待转动坐标系的某一对应坐标轴，旋转角度即为欧拉角。因此，姿态矩阵和三次基本旋转的顺序密切相关，可以用三次基本旋转矩阵的乘积表示。欧拉角按照旋转次序的不同被规定为十二种顺序：X-Z-X, X-Y-X, Y-X-Y, Y-Z-Y, Z-Y-Z, Z-X-Z, X-Z-Y, X-Y-Z, Y-X-Z, Y-Z-X, Z-Y-X, Z-X-Y。其中，本书采用的是在无人系统中最常用的 Z-Y-X 的顺序，它也被称为是航空次序欧拉角。如图 4-6 所示，机体坐标系与地面坐标系之间的夹角就是飞机的姿态角，又称欧拉角，基于 Z-Y-X 的顺序定义如下：偏航角 ψ ：机体轴在水平面上的投影与地轴 x_e 之间的夹角，以机头右偏为正。俯仰角 θ ：机体轴与地平面 $O_e - x_e y_e$ （水平面）之间的夹角，飞机抬头为正。滚转角 ϕ ：飞机对称面绕机体轴 x_b 转过的角度，**右滚为正** 欧拉角变化率与角速度的关系设机体旋转角速度为

${}^b\mathbf{w} \triangleq [w_{xb} \quad w_{yb} \quad w_{zb}]^T$ ，那么根据运动学原理，可以求出欧拉角变化率与机体旋转角速度

满足如下关系
$$\begin{bmatrix} w_{xb} \\ w_{yb} \\ w_{zb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\phi & \cos\theta\sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\theta\cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (0-1)$$
 进一步进行逆运算，有

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{W} \cdot {}^b\mathbf{w} \quad (0-2) \text{ 其中 } \boldsymbol{\theta} \triangleq \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix}, \mathbf{W} \triangleq \begin{bmatrix} 1 & \tan\theta\sin\phi & \tan\theta\cos\phi \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi/\cos\theta & \cos\phi/\cos\theta \end{bmatrix} \quad (0-3)$$

从式(0-3)可

以看出，矩阵 \mathbf{W} 中部分元素的分母为 $\cos\theta$ 。在 $\theta = \pi/2$ 时， $\cos\theta = 0$ 会导致 \mathbf{W} 失去意义，这属于后文会介绍的奇异性问题，应该尽量避免。注：从式(0-2)也可以看出，在通常

情况下（欧拉角 $\theta \neq 0, \phi \neq 0$ 时）下面公式成立
$$\begin{bmatrix} w_{xb} \\ w_{yb} \\ w_{zb} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (0-4)$$
 也就是说，欧拉角的导

数，通常情况下并不等于载具角速度。这一点与直观常识存在一定的出入，在进行建模分析时，需要特别注意。同时，也可以得出结论当俯仰滚转角接近为 0 时，欧拉角变化率近似等于机体角速度，这个结论在旋翼无人机模型进行线性化时也常用到。旋转矩阵定义旋转矩阵（Rotation Matrix）是在乘以一个向量的时候有改变向量的方向但不改变大小的效果并保持了**手性**（例如本书的右手定则）的矩阵。通过旋转矩阵可以方便地将一个向量从一个坐标系，投影到另一个坐标系。可以想象一下，飞机在飞行过程中，它受到的重力始终是朝向地面的，因此在地球坐标系下可以方便地对重力进行表示，例如 ${}^e\mathbf{G} = [0 \quad 0 \quad g]^T$ 。

但是，在进行受力分析时，我们常常需要将所有的力分解到机体坐标系下进行汇总，再输

入到载具动力学模型之中。这里，可以将重力在机体坐标系下的投影表示为

${}^b\mathbf{G} = [g_x \ g_y \ g_z]^T$ ，基于线性代数的知识可知，这个坐标变化可以变成矩阵运算，即

${}^b\mathbf{G} = \mathbf{R}_e^b \cdot {}^e\mathbf{G}$ (0-5) 其中， \mathbf{R}_e^b 表示为将向量从地球坐标系映射到机体坐标系的旋转矩阵，它是一个正交矩阵（转置运算与求逆运算结果相同，模为 1）。同理，基于矩阵求逆的知识可以定义

$\mathbf{R}_b^e \triangleq (\mathbf{R}_e^b)^{-1} = (\mathbf{R}_e^b)^T$ (0-6) 其中， \mathbf{R}_b^e 表示为将向量从机体坐标系映射到地球坐标系的旋转矩阵，它满足如下关系

${}^e\mathbf{G} = \mathbf{R}_b^e \cdot {}^b\mathbf{G}$ (0-7) 由于旋转矩阵是完全由载具机体坐标系与地面坐标系之间的夹角决定的，因此它也可以和欧拉角一样用于表示载具姿态。在无人系统建模中，通常采用选用 \mathbf{R}_b^e 作为表示载具姿态的旋转矩阵，旋转矩阵也通常称为方向余弦矩阵 (Direction Cosine Matrix, DCM)。根据欧拉角的定义，从机体坐标系

到地球固连坐标系的旋转矩阵 \mathbf{R}_b^e 可以表示为

$$\mathbf{R}_b^e = \begin{bmatrix} \cos\theta \cos\psi & \cos\psi \sin\theta \sin\phi - \sin\psi \cos\phi & \cos\psi \sin\theta \cos\phi + \sin\psi \sin\phi \\ \cos\theta \sin\psi & \sin\psi \sin\theta \sin\phi + \cos\psi \cos\phi & \sin\psi \sin\theta \cos\phi - \cos\psi \sin\phi \\ -\sin\theta & \sin\phi \cos\theta & \cos\phi \cos\theta \end{bmatrix} \quad (0-8) \text{反过}$$

来，也可由旋转矩阵反求欧拉角。首先定义旋转矩阵 \mathbf{R}_b^e 为 $\mathbf{R}_b^e = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$ (0-9) 由

$$\text{式(0-8)(0-9)可求得} \begin{cases} \tan\psi = \frac{r_{21}}{r_{11}} \\ \sin\theta = -r_{31} \\ \tan\phi = \frac{r_{32}}{r_{33}} \end{cases} \quad (0-10) \text{考虑到欧拉角的取值范围为}$$

$$\psi \in [-\pi, \pi], \theta \in [-\pi/2, \pi/2], \phi \in [-\pi, \pi], \text{式(0-10)的解为} \begin{cases} \psi = \arctan 2 \left(\frac{r_{21}}{r_{11}} \right) \\ \theta = \arcsin(-r_{31}) \\ \phi = \arctan 2 \left(\frac{r_{32}}{r_{33}} \right) \end{cases} \quad (0-11) \text{其}$$

$$\text{中，函数 } \arctan 2 \text{ 定义如下 } \arctan 2(y, x) \triangleq \begin{cases} \arctan(y/x) & x \geq 0 \\ \arctan(y/x) + \pi & y \geq 0, x < 0 \\ \arctan(y/x) - \pi & y < 0, x < 0 \\ +\pi/2 & y > 0, x = 0 \\ -\pi/2 & y < 0, x = 0 \\ \text{undefined} & y = 0, x = 0 \end{cases} \quad (0-12) \text{这里}$$

$\arctan(\cdot)$ 和 $\arcsin(\cdot)$ 的值域为 $[-\pi/2, \pi/2]$ 。由式(0-8)可知，当俯仰角 $\theta = \pm\pi/2$ 时，

$$\mathbf{R}_b^c = \begin{bmatrix} 0 & -\sin(\psi \mp \phi) & \cos(\psi \mp \phi) \\ 0 & \cos(\psi \mp \phi) & \sin(\psi \mp \phi) \\ \mp 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (0-13)$$

由于已知旋转矩阵 \mathbf{R}_b^c ，仅能确定 $\psi \mp \phi$ 的

取值，并不能唯一确定 ψ, ϕ 的取值，因此方程有无穷多组解。因此当俯仰角取值正负 90 度（奇异点）时，欧拉角发生奇异现象。从上面分析可以得出结论：旋转矩阵包含 9 个元素，已知 3 个欧拉角可以求解出旋转矩阵（唯一解）。但是，已知旋转矩阵并不能唯一求解欧拉角。换句话说，某些姿态位置（俯仰角 $\pm 90^\circ$ ）可能对应多个（无穷多）欧拉角。在发生奇异现象时，通常采用人为强制设定 $\phi=0$ ，来求解出 ψ 的值。这条人为强制规则带来的最大问题是，当载具的姿态经过奇异点时，欧拉角变得不再连续。例如，想象载具在奇异角附近做小范围运动

$$\begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} - \Delta\phi & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} + \Delta\phi & 0 \end{bmatrix} \quad (0-14)$$

实际上欧拉角的解算

$$\text{结果为 } \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} - \Delta\phi & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} + \Delta\phi & 0 \end{bmatrix} \quad (0-15)$$

可以看出俯仰角和偏航角都发生了突变，不再连续，这对于常规的控制方法是致命的，会带来坠机等不可预料的结果。因此，在载具存在大角度运动情形时，是禁止使用欧拉角来进行控制器设计的，通常需要采用旋转矩阵或后文介绍的四元数。造成上述奇异现象的原因是欧拉角 $\begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} & 0 \end{bmatrix}$ 和

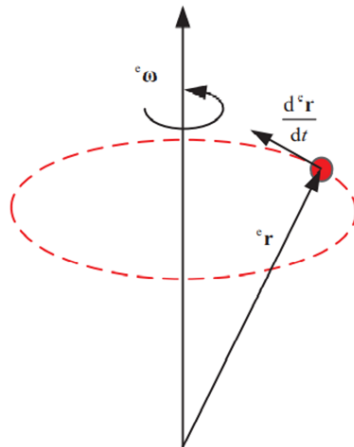
$\begin{bmatrix} 0 & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} \end{bmatrix}$ 表示的姿态是完全相同的（先俯仰 90 度再滚转 90 度，和先偏航 90 度再俯仰

90 度的效果完全相同），但是人为规则下会强制将 $\begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} & 0 \end{bmatrix}$ 重定义为 $\begin{bmatrix} 0 & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} \end{bmatrix}$ ，以

确保每个姿态角的转换顺序的唯一性，这就导致了欧拉角经过奇异点时会发生不连续的问题。旋转矩阵导数与机体角速度的关系仅考虑刚体旋转（不考虑平动），对任意向量

$${}^c \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \text{ 求导满足 } \frac{d^c \mathbf{r}}{dt} = {}^c \boldsymbol{\omega} \times {}^c \mathbf{r} \quad (0-16)$$

其中，符号 \times 表示向量叉乘。图 4-7 中的圆周运



动可以直观地阐释式。

图 4-7 对圆周运动向量求导两个向量

$$\mathbf{a} \triangleq [a_x \ a_y \ a_z]^T \text{ 和 } \mathbf{b} \triangleq [b_x \ b_y \ b_z]^T \text{ 的叉乘定义为 } \mathbf{a} \times \mathbf{b} = [\mathbf{a}]_x \mathbf{b} \quad (0-17)$$

其中

$$[\mathbf{a}]_x \triangleq \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \quad (0-18) \text{是斜对称矩阵。由式(0-16)可得}$$

$$\frac{d[\mathbf{}^e\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{}^e\mathbf{b}_2 \quad \mathbf{}^e\mathbf{b}_3]}{dt} = [\mathbf{}^e\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{}^e\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{}^e\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{}^e\mathbf{b}_2 \quad \mathbf{}^e\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{}^e\mathbf{b}_3] \quad (0-19) \text{由于 } \mathbf{}^e\boldsymbol{\omega} = \mathbf{R}_b^e [\mathbf{}^b\boldsymbol{\omega}]_x, \text{ 结}$$

合向量叉乘的性质，式(0-19)进一步表示为 $\frac{d\mathbf{R}_b^e}{dt} = \mathbf{R}_b^e [\mathbf{}^b\boldsymbol{\omega}]_x$ (0-20)其中 $[\mathbf{}^b\boldsymbol{\omega}]_x$ 是 $[\mathbf{}^b\boldsymbol{\omega}]$ 的斜对称形式。旋转矩阵的应用避免了奇异性问题。然而， \mathbf{R}_b^e 含有九个未知变量，因此求解微分方程(0-20)的计算量比较大。下面将引入四元数表示方法。四元数的定义欧拉角简单但有奇异性问题，旋转矩阵无奇异但是维度太高，运算过于复杂。那么可否采用欧拉角加一维约束的方式来解决奇异问题并降低计算量呢？基于此思想，四元数（Quaternions）的方法应运而生。四元数是由爱尔兰数学家哈密顿（William Rowan Hamilton, 1805-1865）在1843年发明的数学概念，四元数的乘法不符合交换律，需要使用四元数专用的计算规则来进行运算。

四元数来表示姿态四元数一般表示为 $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_0 \\ \mathbf{q}_v \end{bmatrix}$ (0-21)其中， $q_0 \in \mathbb{R}$ 是

$\mathbf{q} \in \mathbb{R}^4$ 的标量部分， $\mathbf{q}_v = [q_1 \quad q_2 \quad q_3]^T \in \mathbb{R}^3$ 是向量部分。对于实数 $s \in \mathbb{R}$ ，对应的四元数表示形式为 $\mathbf{q} = [s \quad \mathbf{0}_{1 \times 3}]^T$ 。对于纯向量 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ ，对应的四元数表示形式为 $\mathbf{q} = [0 \quad \mathbf{v}^T]^T$ 。

注：四元数的特殊计算规则可以自行学习，后续内容仅展示结论。假定地球固连坐标系到机体坐标系的旋转四元数为 $\mathbf{q}_e^b = [q_0 \quad q_1 \quad q_2 \quad q_3]^T$ ，可求解得到四元数与旋转矩阵的

$$\text{系矩阵 } \mathbf{R}_b^e = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \triangleq \mathbf{C}(\mathbf{q}_e^b) \quad (0-22) \text{在现有}$$

规则下，四元数与旋转矩阵可相互唯一求解。同时也可以得到四元数与欧拉角的关系

$$\text{如下 } \mathbf{q}_e^b = \begin{bmatrix} \cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \\ \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} + \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \\ \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \\ \cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} \end{bmatrix} \quad (0-23) \text{可见，当俯仰角 } \theta = \pm\pi/2 \text{ 时，式}$$

(0-23)可以简化为
$$\mathbf{q}_c^b = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\psi \mp \phi}{2}\right) \\ \mp \sin\left(\frac{\psi \mp \phi}{2}\right) \\ \pm \cos\left(\frac{\psi \mp \phi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\psi \mp \phi}{2}\right) \end{bmatrix} \quad (0-24)$$
和旋转矩阵一样，会存在奇异问题。因

此，给定欧拉角可以唯一确定四元数，但是给定四元数无法唯一确定欧拉角。由于四元数与旋转矩阵可以实现唯一求解，因此四元数可以有效地表示载具姿态，且不存在奇异性问题，而且其维度和计算复杂度远小于旋转矩阵。在进行无人机等高机动载具运动学建模和控制器设计时，四元数都有非常广泛的应用。其他常用参考系及运动状态描述除了我们在前面所提到地面坐标系、机体坐标系以外，在进行固定翼（倾转旋翼、导弹等）建模时，我们还需要了解气流坐标系与航迹坐标系的相关知识。稳定坐标系飞机相对于周围空气相对运动的速度称为空速矢量 V_a ，它的大小就是我们通常说的空速。飞机在正常飞行时，机翼的总体方向与空速矢量有一个正的夹角，这个夹角叫做迎角 α （或者叫攻角），如图 4-8 所示。我们将空速矢量 V_a 在机体坐标系的 $o_b x_b z_b$ 平面上投影，得到一个向量 V_{ax} ，它与机体坐标系的 $o_b x_b$ 轴之间的夹角就是迎角。我们定义一个新的坐标系，它的原点 o_s 和机体坐标系的原点 o_b 重合，它的 $o_s x_s$ 轴沿着 V_{ax} 的方向，它的 $o_s y_s$ 轴和机体坐标系的 $o_b y_b$ 轴重合，同时根据右手定则确定它的 $o_s z_s$ 轴。这个坐标系 $o_s x_s y_s z_s$ 即为稳定坐标系。

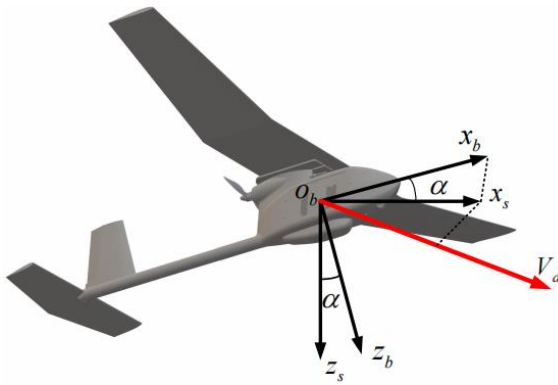


图 4-8 稳定坐标系与迎角由机体坐标系到稳定

坐标系间的旋转矩阵可以表示为：
$$\mathbf{R}(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (0-25)$$
气流坐标系如图 4-9

所示，我们定义飞机的侧滑角 β 是空速矢量 V_a 与机体坐标系中 $o_b x_b z_b$ 平面的夹角，同时我们基于稳定坐标系 $o_s x_s y_s z_s$ ，定义一个新的坐标系 $o_w x_w y_w z_w$ ，在这个坐标系中， $o_w x_w$ 的方向与空速矢量 V_a 的方向相同， $o_w z_w$ 轴与稳定坐标系 $o_s z_s$ 的轴重合，基于确定的两个轴，我们可以通过右手定则来确定轴的方向，由于 $o_w x_w$ 的方向与空速矢量 V_a 的方向相同，所以我们将这个坐标系 $o_w x_w y_w z_w$ 称为气流坐标系，根据图中坐标系间的角度关系，我们可以推导

由稳定坐标系到气流坐标系的旋转矩阵为：
$$\mathbf{R}(\beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (0-26)$$

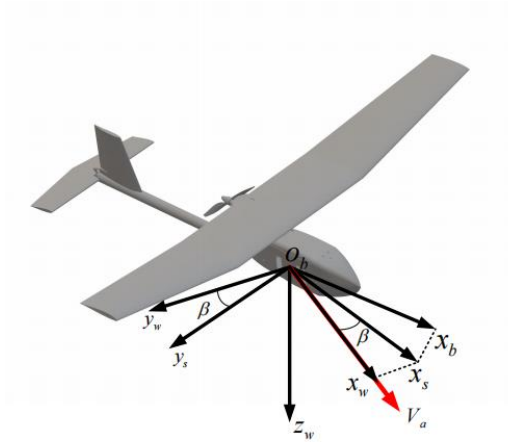
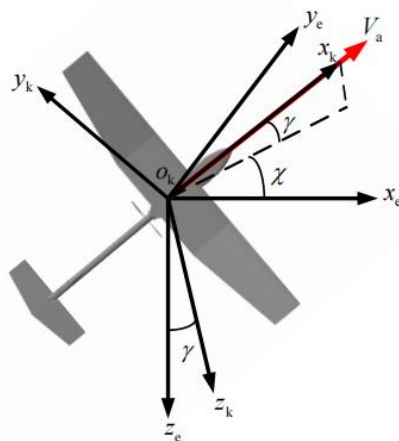


图 4-9 气流坐标系与侧滑角结合式(0-25)(0-26)两个

旋转矩阵，我们最终可以得到由机体坐标系到气流坐标系的旋转矩阵为：

$$\mathbf{R}_b^w = \mathbf{R}(\beta)\mathbf{R}(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \alpha & \sin \beta & \cos \beta \sin \alpha \\ -\sin \beta \cos \alpha & \cos \beta & -\sin \beta \sin \alpha \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (0-27) \quad \text{注：本书上下标出现}$$

w 时，表示气流（Wind）坐标系。航迹坐标系在固定翼无人机中，航迹坐标系 $o_k x_k y_k z_k$ 的原点位于机体的质心位置， $o_k x_k$ 轴沿着空速矢量 \mathbf{V}_a 的方向， $o_k z_k$ 轴在 $o_k x_k$ 轴的铅垂平面内，且垂直于 $o_k x_k$ 轴指向机体的下方，同时我们基于 $o_k x_k$ 轴与 $o_k z_k$ 轴，可以根据右手定则确定 $o_k y_k$ 轴，空速矢量 \mathbf{V}_a 与惯性坐标系中 $o_e x_e y_e$ 平面的夹角即为航迹倾角 γ ，航即向上为正，如图 4-3 所示，空速矢量 \mathbf{V}_a 在 $o_e x_e y_e$ 平面内的投影与 $o_e x_e$ 轴之间的夹角称为航迹偏角



χ ，向右为正。

图 4-10 航迹坐标系空速、风速和

地速在对固定翼无人机相关动态方程进行推导时，我们往往需要对固定翼无人机对于给定的坐标系例如惯性坐标系的受力、速度以及加速度进行分析，而空气动力的分析依赖于飞机相对于周围空气的速度，我们将风相对于惯性坐标系的速度称为风速，表示为 \mathbf{v}_w ，对将

固定翼无人机相对于地球表面（惯性坐标系）的速度称为地速，表示 ${}^e\mathbf{v}$ 为或 \mathbf{V}_g ，将固定翼无人机相对于风的速度称为空速，表示为空速矢量 \mathbf{v}_a ，这三个速度之间的关系为：

$$\mathbf{V}_a = \mathbf{V}_g - \mathbf{V}_w \quad (0-28) \text{ 其中，地速矢量在机体坐标系下的分量可以表示为： } {}^b\mathbf{V}_g = \begin{bmatrix} v_{gx_b} \\ v_{gy_b} \\ v_{gz_b} \end{bmatrix}$$

(0-29)用类似的方法，我们也可以得到风速矢量在机体坐标系下的表示：

$${}^b\mathbf{V}_w = \begin{bmatrix} v_{wx_b} \\ v_{wy_b} \\ v_{wz_b} \end{bmatrix} = \mathbf{R}_c^b \cdot \mathbf{V}_w \quad (0-30) \text{ 空速在机体坐标系下的表示，可以具体写成}$$

$${}^b\mathbf{V}_a = \begin{bmatrix} v_{ax_b} \\ v_{ay_b} \\ v_{az_b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{gx_b} - v_{wx_b} \\ v_{gy_b} - v_{wy_b} \\ v_{gz_b} - v_{wz_b} \end{bmatrix} \quad (0-31) \text{ 而在气流坐标系中，我们可以将空速矢量表示为以下}$$

$$\text{形式： } {}^w\mathbf{V}_a = \begin{bmatrix} V_a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (0-32) \text{ 在对于固定翼无人机进行建模与仿真的过程中，我们可以认为}$$

相对于惯性坐标系的风速矢量由风模型提供，而机体相对与惯性坐标系的速度也可以由运

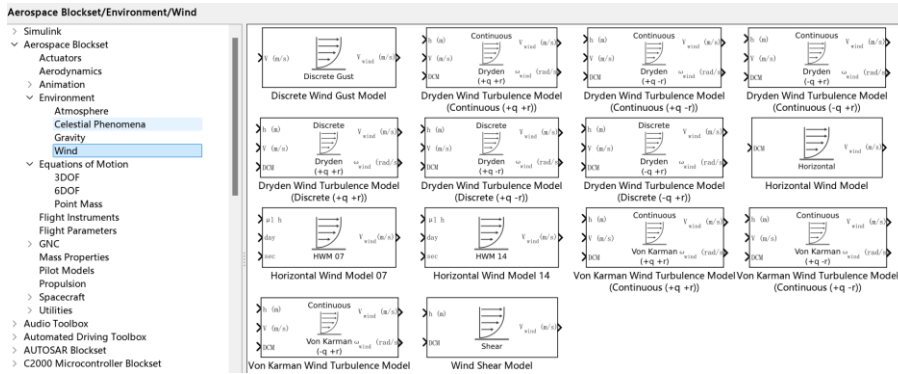
$$\text{动学方程获得，因此结合上述表达式，得到 } {}^b\mathbf{V}_a = \begin{bmatrix} v_{ax_b} \\ v_{ay_b} \\ v_{az_b} \end{bmatrix} = \mathbf{R}_w^b \cdot \begin{bmatrix} V_a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (0-33) \text{ 将式(0-27)中的}$$

$$\text{旋转矩阵进行求逆，将求逆结果代入式(0-33)中，可以得到 } {}^b\mathbf{V}_a = \begin{bmatrix} v_{ax_b} \\ v_{ay_b} \\ v_{az_b} \end{bmatrix} = \mathbf{V}_a \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta \\ \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta \end{bmatrix}$$

$$(0-34) \text{ 由此可以求解出如下关系式 } V_a = \sqrt{v_{ax_b}^2 + v_{ay_b}^2 + v_{az_b}^2} \quad \alpha = \arctan \left(\frac{v_{az_b}}{v_{ax_b}} \right) \quad (0-35) \text{ 载具运动模}$$

$$\beta = \arcsin \left(\frac{v_{ay_b}}{\sqrt{v_{ax_b}^2 + v_{ay_b}^2 + v_{az_b}^2}} \right)$$

型构建开发工具箱 Aerospace 工具



Simulink 的

Aerospace Blockset 工具箱的 GNC/Navigation 模块库中包含模块来生成带噪声的传感器数据，进入右图 Help 页面可查看详情。在 MATLAB 命令框输入“asbh120”（或者打开“eB\asbh120.slx”文件），可以找到提供的固定翼飞行器的较为全面的建模例子，熟悉用

Simulink 对飞行器各个部分进行建模。同理，在 MATLAB 命令框输入“asbQuadcopterStart”（或者打开“eB\asbQuadcopter.slx”文件），可以找到提供的多旋翼飞行器的较为全面的建模例子，熟悉用 Simulink 对旋翼类各个部分进行建模。相关文献 全权,杜光勋,赵峙尧,戴训华,任锦瑞,邓恒译.四旋翼飞行器设计与控制[M],电子工业出版社,2018.重点参考其中的多旋翼相关坐标系和姿态表示和多旋翼动态建模部分附加资源官方文档: RflySim 官方文档: <https://rflysim.com/doc/zh/> 社区交流: 加入 RflySim 技术交流



群: 951534390

Q2: 编译报错, 无法加载库文件



A2: 这可能是由于安装平台时 PX4PSP 工具箱未更新到最新版, 更新 RflySim 安装包后按照如下配置重新安装平台即可

Toolbox one-key installation script: RflySimA... — □ ×

(1) Software package installation directory
C:\PX4PSP

(2) PX4 firmware compiling command: firmware versions <= PX4-1.8 use format px4fmu-v3_default; >= PX4-1.9 use format px4_fmu-v3_default
px4_fmu-v6c_default

(3) PX4 firmware version (1: PX4-1.7.3, ... , 6: PX4-1.12.3, 7: PX4-1.13.2, 8: PX4-1.14.4, 9: PX4-1.15.0)
9

(4) PX4 firmware compiling toolchain (1: WinWSL[suitable for all versions], 2: Msys2[suitable for <= PX4-1.8], 3: Cygwin[for >=PX4-1.8])
1

(5) Whether to reinstall PSP toolbox (yes to reinstall and no to remain current installation)
yes

(6) Whether to reinstall the dependent software packages (CopterSim, QGroundControl, CopterSim, etc. About 5 minites)
no

(7) Whether to reinstall the selected compiling toolchain (yes to reinstall and no to remain unchanged, about 5 minites)
no

(8) Whether to reinstall the selected PX4 firmware source code (yes to reinstall and no to remain unchanged, about 5 minites)
no

(9) Whether to pre-compile the selected firmware with the selected command (yes to compile and no to remain unchanged, about 5 minites)
no

(10) Whether to block the actuator outputs in the PX4 firmware code ("yes" to use Simulink controller, "no" to use PX4 official controller)
no

OK Cancel