



多旋翼飞行器设计与控制

第十一讲 底层飞行控制

全权 副教授

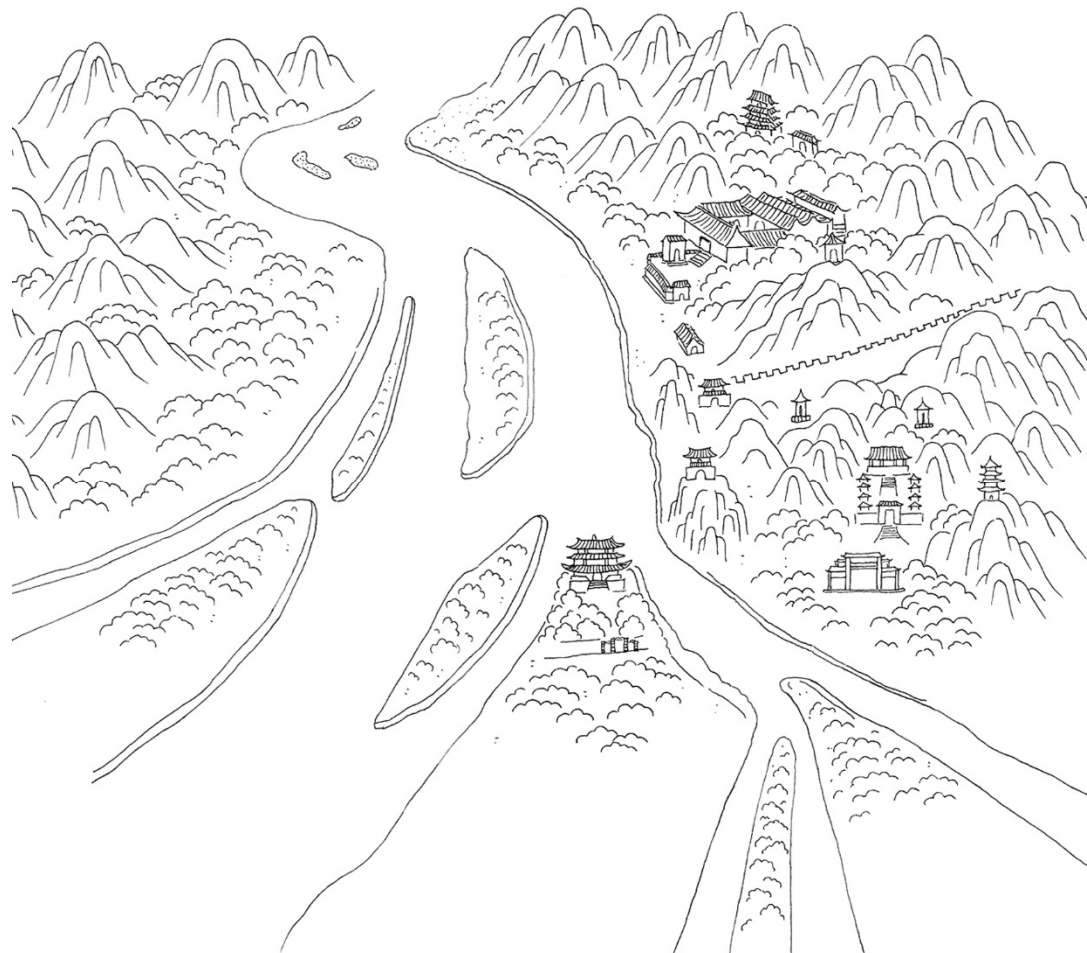
qq_buaa@buaa.edu.cn

自动化科学与电气工程学院

北京航空航天大学



东方智慧



都江堰



核心问题

给定期望的位置，如何控制多旋翼的电机使其能够飞到目标位置？



大纲

1. 多旋翼底层飞行控制框架和模型化简
2. 位置控制
3. 姿态控制
4. 控制分配
5. 电机控制
6. 本讲小结



1. 多旋翼底层飞行控制框架和模型化简

□ 多旋翼底层飞行控制框架

多旋翼的底层飞行控制可以分为四个层次，分别为位置控制、姿态控制、控制分配和电机控制

位置控制：期望的三维位置 \mathbf{P}_d \rightarrow 解算期望姿态角 Θ_d (滚转、俯仰和偏航 ϕ_d, θ_d, ψ_d) 以及期望总拉力 f_d

姿态控制：期望姿态角 Θ_d \rightarrow 解算期望力矩 τ_d

控制分配：期望力矩和升力 τ_d, f_d \rightarrow 解算 n 个电机的期望转速 $\omega_{d,k}$, $k=1, 2, \dots, n$

电机控制：期望转速 $\omega_{d,k}$ \rightarrow 解算每个电机的期望油门指令 $\sigma_{d,k}$, $k=1, 2, \dots, n$

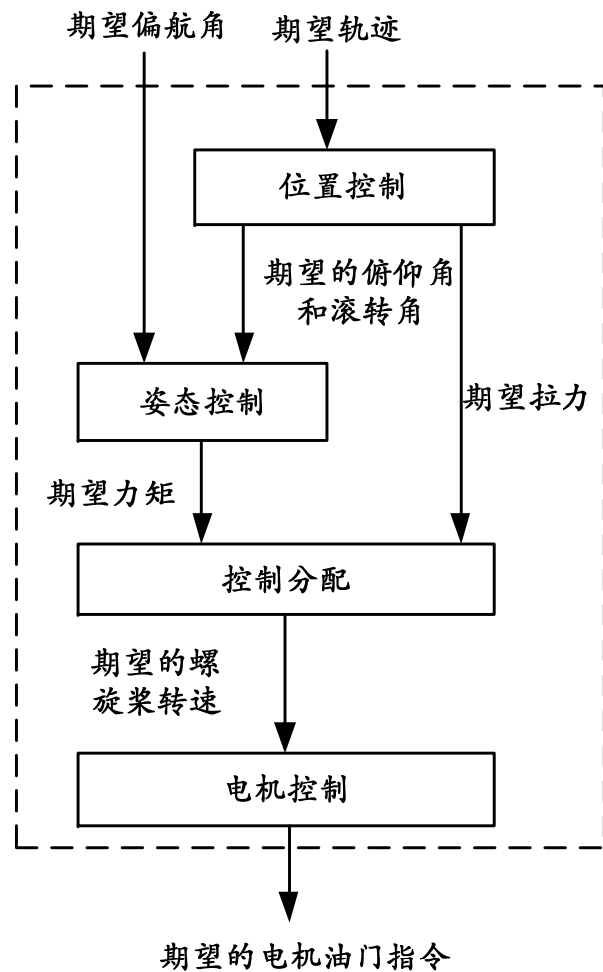


图11.1 多旋翼底层飞行控制框架



1. 多旋翼底层飞行控制框架和模型化简

□ 多旋翼底层飞行控制框架

底层飞行控制

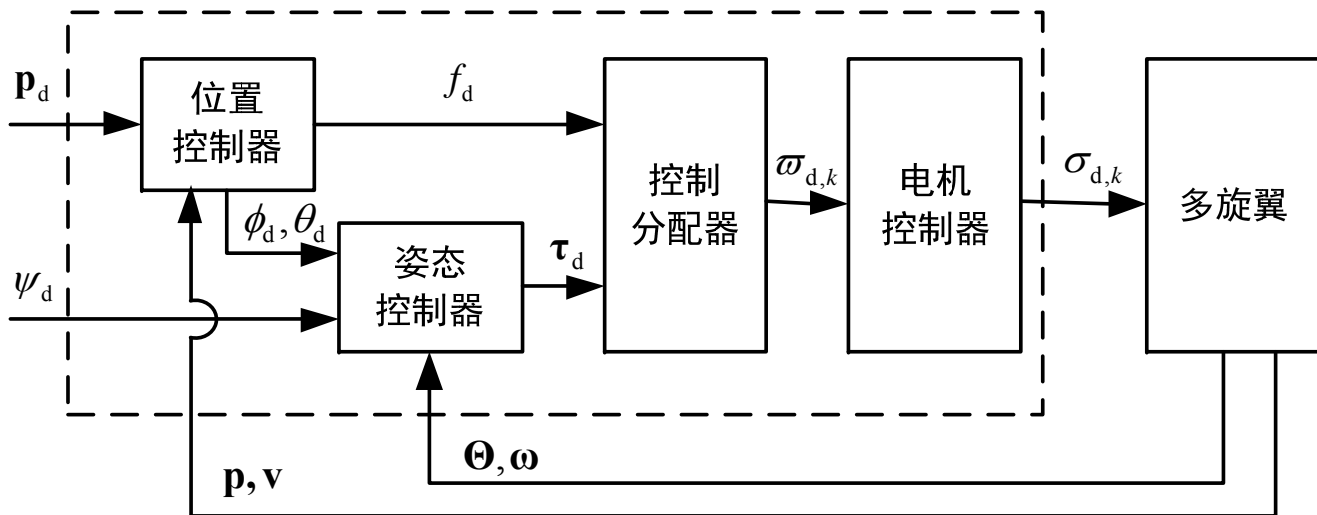


图11.2 多旋翼全自主控制闭环框图

欠驱动系统：4个输入（总拉力 f 和三轴力矩 τ ）控制6个输出（位置 p 和姿态角 Θ ）。设计多旋翼飞行控制器时，可以采用内外环的控制策略，其中内环对多旋翼飞行器姿态角进行控制，而外环对多旋翼飞行器的位置进行控制。由内外环控制实现多旋翼飞行器的升降、悬停、侧飞等飞行模式。



1. 多旋翼底层飞行控制框架和模型化简

□ 线性模型化简

基于第六讲的多旋翼非线性模型，忽略 ${}^b\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J} \cdot {}^b\boldsymbol{\omega}) + \mathbf{G}_a$ ，得到简化的多旋翼模型如下：

$$\begin{aligned} {}^e\dot{\mathbf{p}} &= {}^e\mathbf{v} \\ {}^e\dot{\mathbf{v}} &= g\mathbf{e}_3 - \frac{f}{m}\mathbf{R}\mathbf{e}_3 \\ \dot{\boldsymbol{\Theta}} &= \mathbf{W} \cdot {}^b\boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{J} \cdot {}^b\dot{\boldsymbol{\omega}} &= \boldsymbol{\tau} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} {}^e\dot{\mathbf{p}} &= {}^e\mathbf{v} \\ {}^e\dot{\mathbf{v}} &= g\mathbf{e}_3 - \frac{f}{m}\mathbf{R}\mathbf{e}_3 \\ \dot{\boldsymbol{\Theta}} &= \mathbf{W} \cdot {}^b\boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{J} \cdot {}^b\dot{\boldsymbol{\omega}} &= \boldsymbol{\tau} \end{aligned}} \right\} \longleftrightarrow \begin{aligned} \ddot{p}_{x_e} &= -\frac{f}{m}(\sin\psi \sin\phi + \cos\psi \sin\theta \cos\phi) \\ \ddot{p}_{y_e} &= -\frac{f}{m}(-\cos\psi \sin\phi + \cos\phi \sin\theta \sin\psi) \\ \ddot{p}_{z_e} &= g - \frac{f}{m}\cos\theta \cos\phi \end{aligned}$$

其中， ${}^e\mathbf{p} = [p_{x_e} \ p_{y_e} \ p_{z_e}]^T \in \mathbb{R}^3$ 为对地位置， ${}^e\mathbf{v}$ 为对地速度， $\boldsymbol{\Theta}$ 为飞机机体欧拉角， ${}^b\boldsymbol{\omega}$ 为飞机机体角速度， \mathbf{R} 为旋转矩阵， \mathbf{J} 为转动惯量矩阵， $\mathbf{e}_3 = [0 \ 0 \ 1]^T$ ，其他符号定义详见第六讲。



1. 多旋翼底层飞行控制框架和模型化简

□ 线性模型化简

假设多旋翼处于悬停状态，即 $\mathbf{p} \approx \mathbf{p}_d, \theta \approx \phi \approx 0, \psi \approx \psi_d, \dot{\mathbf{p}} \approx 0, \dot{\theta} \approx \dot{\phi} \approx \dot{\psi} \approx 0$ 标称输入给定为 $f \approx mg, \tau \approx 0$ 。则此时有 $\sin \phi \approx \phi, \cos \phi \approx 1, \sin \theta \approx \theta, \cos \theta \approx 1$ 。通过在平衡点的小角度线性化，此时，

$$\mathbf{R}_{e_3} \approx \begin{bmatrix} \theta \cos \psi + \phi \sin \psi \\ \theta \sin \psi - \phi \cos \psi \\ 1 \end{bmatrix}$$

可得到多旋翼的线性模型：

(1) 水平通道模型

$$\begin{aligned} {}^e \dot{\mathbf{p}} &= {}^e \mathbf{v} \\ {}^e \dot{\mathbf{v}} &= g\mathbf{e}_3 - \frac{f}{m}\mathbf{R}_{e_3} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \ddot{p}_{x_e} &= -\frac{f}{m}(\sin \psi \sin \phi + \cos \psi \sin \theta \cos \phi) \\ \ddot{p}_{y_e} &= -\frac{f}{m}(-\cos \psi \sin \phi + \cos \phi \sin \theta \sin \psi) \end{aligned}$$

可以认为 Θ_h 是输入。
进一步，因为 $-g\mathbf{A}_\psi$ 可以得到，所以可以认为输入是 $-g\mathbf{A}_\psi \Theta_h$ 。水平通道模型为线性的。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}_h &= \mathbf{v}_h \\ \dot{\mathbf{v}}_h &= -g\mathbf{A}_\psi \Theta_h \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{p}_h = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}, \mathbf{R}_\psi = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix}, \mathbf{A}_\psi = \mathbf{R}_\psi \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \Theta_h = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \end{bmatrix}$

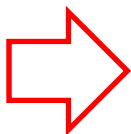


1. 多旋翼底层飞行控制框架和模型化简

□ 线性模型化简

(2) 高度通道模型

$$\begin{aligned} {}^e \dot{\mathbf{p}} &= {}^e \mathbf{v} \\ {}^e \dot{\mathbf{v}} &= g \mathbf{e}_3 - \frac{f}{m} \mathbf{R} \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$



$$\ddot{p}_z = g - \frac{f}{m} \cos \theta \cos \phi$$



线性模型

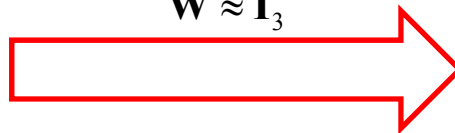
$$\begin{aligned} \dot{p}_z &= v_z \\ \dot{v}_z &= g - \frac{f}{m} \end{aligned}$$

(3) 姿态模型

$$\begin{aligned} \dot{\Theta} &= \mathbf{W} \cdot {}^b \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{J} \cdot {}^b \dot{\boldsymbol{\omega}} &= \boldsymbol{\tau} \end{aligned}$$

小角度假设

$$\mathbf{W} \approx \mathbf{I}_3$$



线性模型

$$\begin{aligned} \dot{\Theta} &= \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\omega}} &= \boldsymbol{\tau} \end{aligned}$$



1. 多旋翼底层飞行控制框架和模型化简

□ 线性模型化简

原模型

$$\begin{aligned} {}^e \dot{\mathbf{p}} &= {}^e \mathbf{v} \\ {}^e \dot{\mathbf{v}} &= g\mathbf{e}_3 - \frac{f}{m} \mathbf{R}\mathbf{e}_3 \\ \dot{\Theta} &= \mathbf{W} \cdot {}^b \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{J} \cdot {}^b \dot{\boldsymbol{\omega}} &= \boldsymbol{\tau} \end{aligned}$$



(1) 水平通道模型

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}_h &= \mathbf{v}_h \\ \dot{\mathbf{v}}_h &= -g\mathbf{A}_\psi \Theta_h \end{aligned}$$

(2) 高度通道模型

$$\begin{aligned} \dot{p}_z &= v_z \\ \dot{v}_z &= g - \frac{f}{m} \end{aligned}$$

(3) 姿态模型

$$\begin{aligned} \dot{\Theta} &= \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\omega}} &= \boldsymbol{\tau} \end{aligned}$$

每个通道都为
线性模型！



2. 位置控制

□ 分类

根据**给定目标轨迹** \mathbf{p}_d 的不同，可将位置控制分为三类：定点控制、轨迹跟踪和路径跟随。

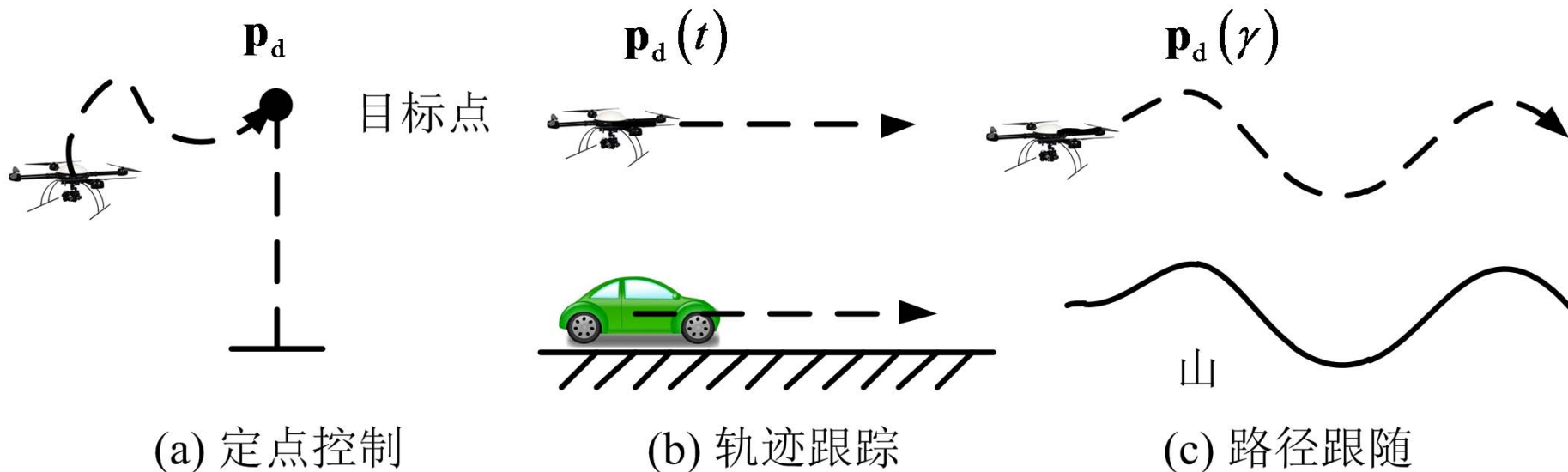


图11.3 位置控制三类形式



2. 位置控制

□ 分类

(1) **定点控制** (Set-Point Control)。期望目标点 $\mathbf{p}_d \in \mathbb{R}^3$ 是一个常值。设计控制器使得，当 $t \rightarrow \infty$ 时， $\|\mathbf{p}_d - \mathbf{p}(t)\|$ 收敛到0或者在0足够小的邻域内。

(2) **轨迹跟踪** (Trajectory Tracking)。期望轨迹 $\mathbf{p}_d(t): [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ 是一条与时间相关的轨迹。设计控制器使得，当 $t \rightarrow \infty$ 时， $\|\mathbf{p}_d(t) - \mathbf{p}(t)\|$ 收敛到0或者在0足够小的邻域内。

(3) **路径跟随** (Path Following)。期望轨迹 $\mathbf{p}_d(\gamma) \in \mathbb{R}^3$ 是一条由参数 直接决定的路径，而不是时间。设计控制器使得，当 $t \rightarrow \infty$ 时， $\|\mathbf{p}_d(\gamma(t)) - \mathbf{p}(t)\|$ 收敛到0或者在0足够小的邻域内。

[1] Hespanha J P. Trajectory-tracking and path-following of underactuated autonomous vehicles with parametric modeling uncertainty. Automatic Control, IEEE Transactions on, 2007, 52(8): 1362–1379.



2. 位置控制

□ 分类

根据解算出的姿态信息的不同，可将位置控制分为两类：

(1) 产生期望欧拉角的位置控制。

针对线性系统设计控制器。这种类型的位置控制器最终产生的期望值为欧拉角和拉力 ϕ_d, θ_d, f_d 。

(2) 产生期望旋转矩阵的位置控制。

直接针对非线性耦合系统设计控制器。这种类型的位置控制器最终产生的期望值为旋转矩阵和拉力 \mathbf{R}_d, f_d 。



2. 位置控制

□ 产生期望欧拉角的位置控制

(1) 传统的PID设计

- 水平通道模型

$$\dot{\mathbf{p}}_h = \mathbf{v}_h$$

$$\dot{\mathbf{v}}_h = -g\mathbf{A}_\psi \Theta_h$$

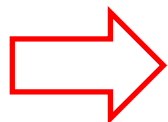
- 期望水平位置动态

$$\ddot{\mathbf{p}}_h = \ddot{\mathbf{p}}_{hd} - \mathbf{K}_{p_{hd}} (\dot{\mathbf{p}}_h - \dot{\mathbf{p}}_{hd}) - \mathbf{K}_{p_{hp}} (\mathbf{p}_h - \mathbf{p}_{hd})$$

$$-g\mathbf{A}_\psi \Theta_{hd} = \ddot{\mathbf{p}}_{hd} - \mathbf{K}_{p_{hd}} (\dot{\mathbf{p}}_h - \dot{\mathbf{p}}_{hd}) - \mathbf{K}_{p_{hp}} (\mathbf{p}_h - \mathbf{p}_{hd})$$

当考虑定点控制时

$$\dot{\mathbf{p}}_{hd} = \ddot{\mathbf{p}}_{hd} = \mathbf{0}_{2 \times 1}$$



$$\Theta_{hd} = -g^{-1} \mathbf{A}_\psi^{-1} \left(\ddot{\mathbf{p}}_{hd} - \mathbf{K}_{p_{hd}} (\dot{\mathbf{p}}_h - \dot{\mathbf{p}}_{hd}) - \mathbf{K}_{p_{hp}} (\mathbf{p}_h - \mathbf{p}_{hd}) \right)$$

其中 $\mathbf{K}_{(\cdot)}$ 表示参数。



2. 位置控制

□ 产生期望欧拉角的位置控制

(1) 传统的PID设计

- 高度通道模型

$$\dot{p}_z = v_z$$

$$\dot{v}_z = g - \frac{f}{m}$$

- 期望高度动态

$$\ddot{p}_z = \ddot{p}_{z_d} - k_{p_z d} (\dot{p}_z - \dot{p}_{z_d}) - k_{p_z p} (p_z - p_{z_d})$$

$$f_d = mg - m \left(\ddot{p}_{z_d} - k_{p_z d} (\dot{p}_z - \dot{p}_{z_d}) - k_{p_z p} (p_z - p_{z_d}) \right)$$

当考虑定点控制时, $\dot{p}_{z_d} = \ddot{p}_{z_d} = 0$ 上式就变为

$$f_d = mg - m \left(-k_{p_z d} \dot{p}_z - k_{p_z p} (p_z - p_{z_d}) \right)$$



2. 位置控制

产生期望欧拉角的位置控制

(2) 开源自驾仪PID设计

1) 水平位置通道

为了使 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e_{p_h}(t)\| = 0$ ，我们先针对

$$\dot{\mathbf{p}}_h = \mathbf{v}_h \xrightarrow{\text{期望速度}} \mathbf{v}_{hd} = \mathbf{K}_{p_h} (\mathbf{p}_{hd} - \mathbf{p}_h)$$

在 $\dot{\mathbf{p}}_{hd} = 0$ 的前提下如果

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e_{v_h}(t)\| = 0$$

那么

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e_{p_h}(t)\| = 0$$

其中 $e_{v_h} \triangleq \mathbf{v}_h - \mathbf{v}_{hd}$

速度能达到期望，位置也就
能达到期望

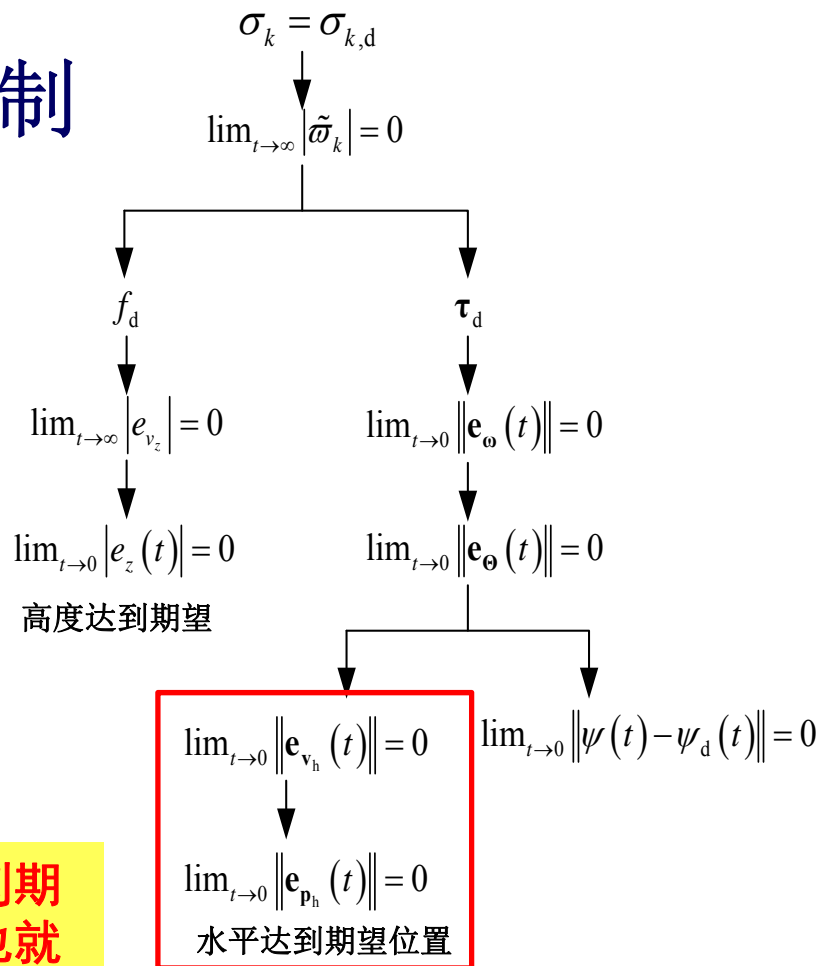


图11.4 多旋翼控制目标关系图



2. 位置控制

产生期望欧拉角的位置控制

(2) 开源自驾仪PID设计

1) 水平位置通道

为了使 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}_{v_h}(t)\| = 0$ ，我们先针对

$$\dot{\mathbf{\Theta}}_h = -g\mathbf{A}_\psi \mathbf{\Theta}_h$$

$$-g\mathbf{A}_\psi \mathbf{\Theta}_{hd} = -\mathbf{K}_{v_{hp}} \mathbf{e}_{v_h} - \mathbf{K}_{v_{hi}} \int \mathbf{e}_{v_h} - \mathbf{K}_{v_{hd}} \dot{\mathbf{e}}_{v_h}$$

$$\mathbf{\Theta}_{hd} = g^{-1} \mathbf{A}_\psi^{-1} \left(\mathbf{K}_{v_{hp}} \mathbf{e}_{v_h} + \mathbf{K}_{v_{hi}} \int \mathbf{e}_{v_h} + \mathbf{K}_{v_{hd}} \dot{\mathbf{e}}_{v_h} \right)$$

如果 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{\Theta}_h(t) - \mathbf{\Theta}_{hd}(t)\| = 0$

那么 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}_{v_h}(t)\| = 0$

角度能达到期望，速度也就能达到期望

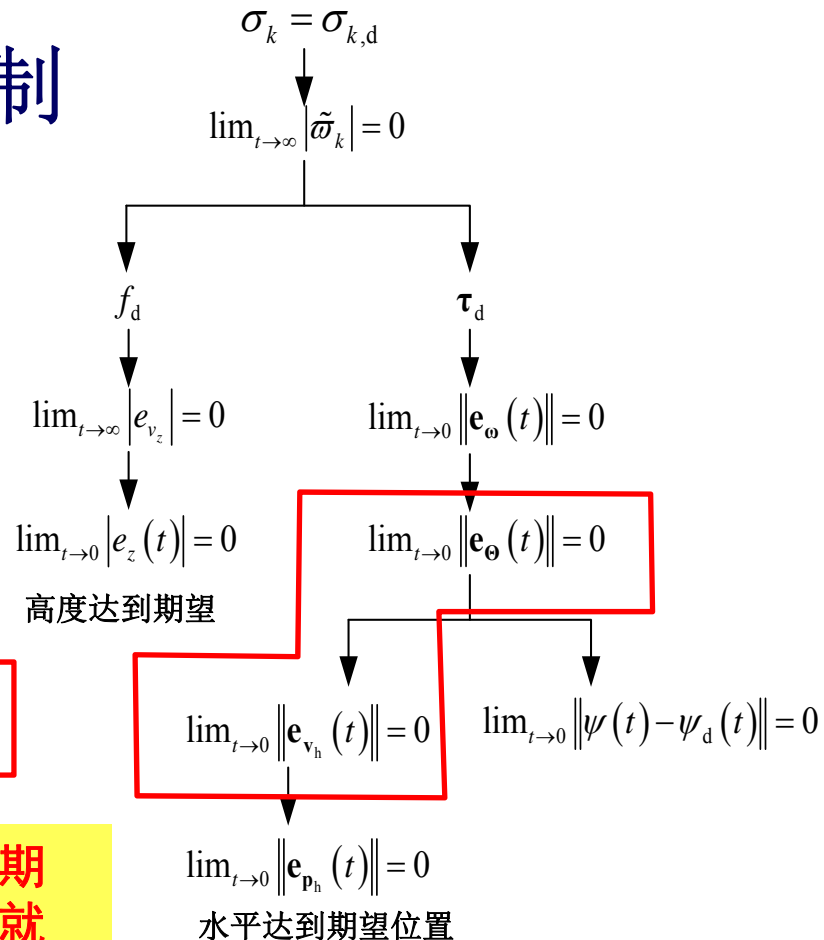


图11.4 多旋翼控制目标关系图



2. 位置控制

产生期望欧拉角的位置控制

(2) 开源自驾仪PID设计

2) 高度通道

类似于水平通道设计，高度通道

控制器设计如下

$$v_{zd} = -k_{p_z} (p_z - p_{zd})$$

$$f_d = m \left(g + k_{v_z p} e_{v_z} + k_{v_z i} \int e_{v_z} + k_{v_z d} \dot{e}_{v_z} \right)$$

竖直方向速度能达到期望，高度也就能达到期望

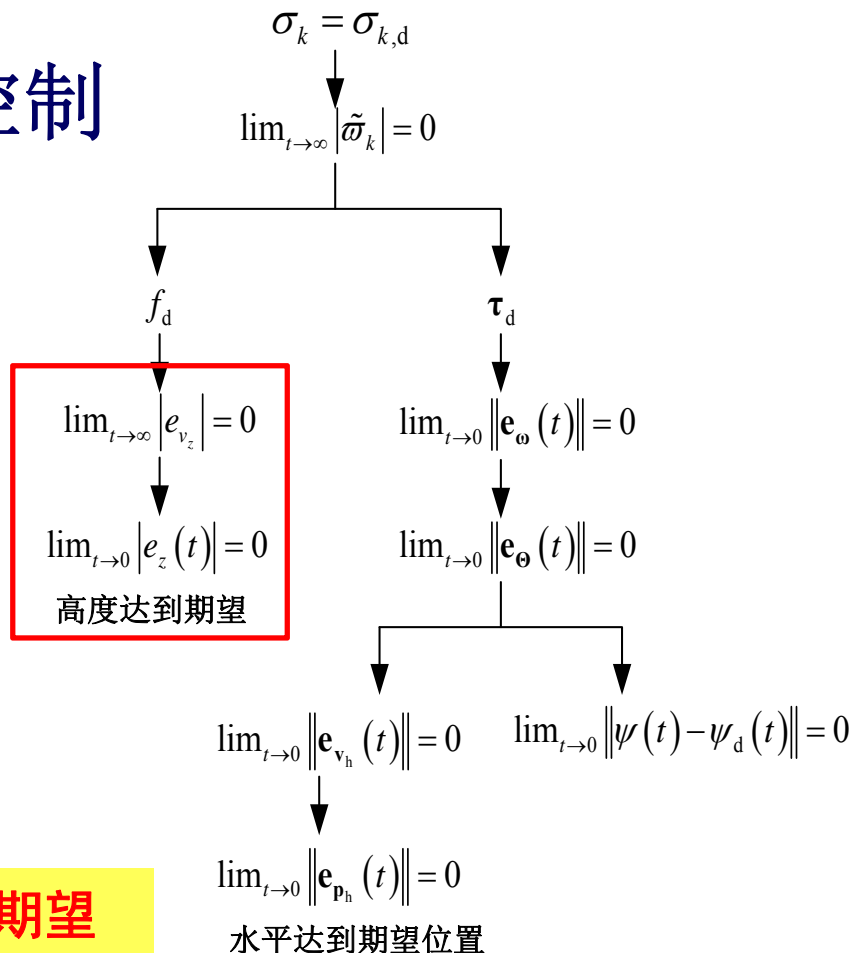


图11.4 多旋翼控制目标关系图



2. 位置控制

产生期望欧拉角的位置控制

(3) 加饱和的PID控制

传统PID $\Theta_{hd} = -g^{-1} \mathbf{A}_{\psi}^{-1} \left(-\mathbf{K}_{p_{hd}} \dot{\mathbf{p}}_h - \mathbf{K}_{p_{hp}} (\mathbf{p}_h - \mathbf{p}_{hd}) \right)$

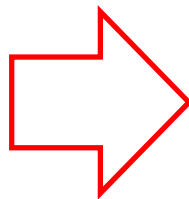
自驾仪PID $\Theta_{hd} = g^{-1} \mathbf{A}_{\psi}^{-1} \left(\mathbf{K}_{v_{hp}} \mathbf{e}_{v_h} + \mathbf{K}_{v_{hi}} \int \mathbf{e}_{v_h} + \mathbf{K}_{v_{hd}} \dot{\mathbf{e}}_{v_h} \right)$

控制器设计
就没意义了

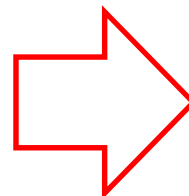
位置误差很大



角度误差很大

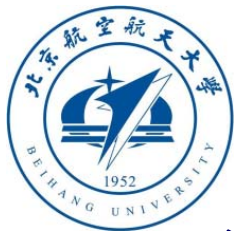


$$\Theta_{hd} \gg 2\pi$$



小角度假
设被破坏!

加饱和非常必要



2. 位置控制

□ 产生期望欧拉角的位置控制

(3) 加饱和的PID控制

考虑饱和之后，传统PID控制器变为

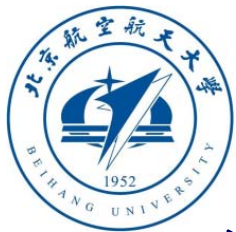
$$\Theta_{hd} = \text{sat}_{gd} \left(g^{-1} A_{\psi}^{-1} \left(K_{p_{hd}} \dot{p}_h + K_{p_{hp}} (p_h - p_{hd}) \right), a_0 \right)$$

其中 $a_0 \in \mathbb{R}_+$ 。保方向饱和函数 $\text{sat}_{gd}(x, a)$ 的定义见第十讲。同样地，在开源自驾仪PID设计中，我们增加对 e_{v_h} 和控制器右端项的限幅

$$e_{v_h} = \text{sat}_{gd} (v_h - v_{hd}, a_1)$$

$$\Theta_{hd} = \text{sat}_{gd} \left(g^{-1} A_{\psi}^{-1} \left(K_{v_{hp}} e_{v_h} + K_{v_{hi}} \int e_{v_h} + K_{v_{hd}} \dot{e}_{v_h} \right), a_2 \right)$$

其中 $a_1, a_2 \in \mathbb{R}_+$ 。



2. 位置控制

□ 产生期望欧拉角的位置控制

(3) 加饱和的PID控制

下面讨论**保方向饱和函数** $\text{sat}_{\text{gd}}(\mathbf{x}, a)$ 和**传统饱和函数** $\text{sat}(\mathbf{x}, a)$ 的区别。虽然传统饱和函数限制的每个分量的绝对值不大于 a ，但它与 \mathbf{x} 的方向可能不同。而保方向饱和函数 $\text{sat}_{\text{gd}}(\mathbf{x}, a)$ 不仅可以限制最终向量每个分量的绝对值不大于 a ，还可以保证的方向与 \mathbf{x} 相同。

$$\text{传统饱和函数} \quad \text{sat}(\mathbf{x}, a) \triangleq \begin{bmatrix} \text{sat}(x_1, a) \\ \vdots \\ \text{sat}(x_n, a) \end{bmatrix}, \text{sat}(x_k, a) \triangleq \begin{cases} x_k, & |x_k| \leq a \\ a \cdot \text{sign}(x_k), & |x_k| > a \end{cases}$$

$$\text{保方向饱和函数} \quad \text{sat}_{\text{gd}}(\mathbf{x}, a) \triangleq \begin{cases} \mathbf{x}, & \|\mathbf{x}\|_{\infty} \leq a \\ a \cdot \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_{\infty}}, & \|\mathbf{x}\|_{\infty} > a \end{cases}$$



2. 位置控制

□ 产生期望欧拉角的位置控制

(3) 加饱和的PID控制

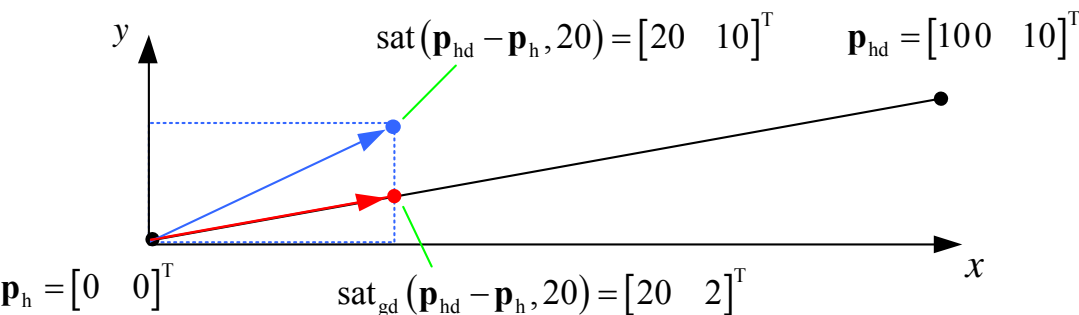


图11.4 两种饱和函数的作用效果对比图

传统饱和函数
导致方向偏离

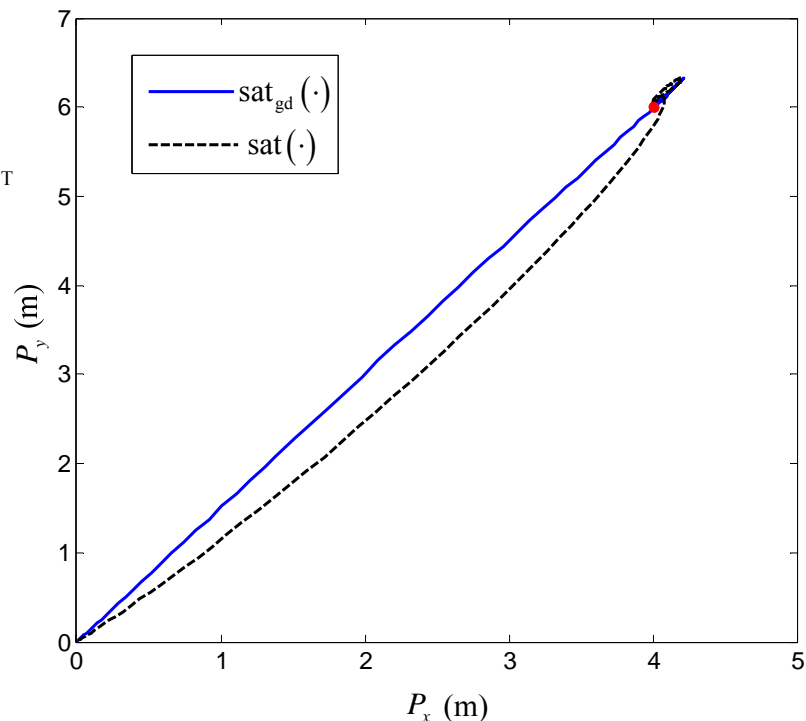
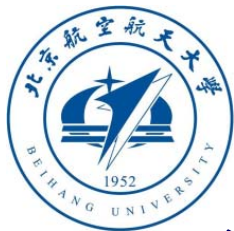


图11.5 饱和情况下多旋翼定点跟踪水平面运动轨迹

保方向的饱和函数可以保证多旋翼直线飞行，而传统饱和函数则不行



2. 位置控制

□ 产生期望欧拉角的位置控制

(3) 加饱和的PID控制

为了避免油门过大，同样需要加入饱和。在传统PID控制器设计中，我们需要对控制器的右端进行如下限幅

$$f_d = \text{sat}_{\text{gd}} \left(m \left(g + k_{p_z, d} \dot{p}_z + k_{p_z, p} (p_z - p_{z, d}) \right), a_3 \right)$$

其中 $a_3 \in \mathbb{R}_+$ 。同样地，在开源自驾仪PID设计中，我们增加对 e_{v_z} 和控制器的右端的限幅

$$e_{v_z} = \text{sat}_{\text{gd}} (v_z - v_{z, d}, a_4)$$

$$f_d = \text{sat}_{\text{gd}} \left(m \left(g + k_{v_z, p} e_{v_z} + k_{v_z, i} \int e_{v_z} + k_{v_z, d} \dot{e}_{v_z} \right), a_5 \right)$$

其中 $a_4, a_5 \in \mathbb{R}_+$ 。对于一维变量，保方向饱和函数 $\text{sat}_{\text{gd}}(\mathbf{x}, a)$ 和与传统饱和函数 $\text{sat}(\mathbf{x}, a)$ 的作用相同。



2. 位置控制

□ 产生期望旋转矩阵的位置控制

基于旋转矩阵描述的姿态运动学方程为

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \left[{}^b \boldsymbol{\omega} \right]_x$$

其中 $\mathbf{R} \in SO(3)$ 是旋转矩阵。系统期望的姿态控制指令为 \mathbf{R}_d 。因此位置控制器最好可以直接给出期望的旋转矩阵 \mathbf{R}_d 。

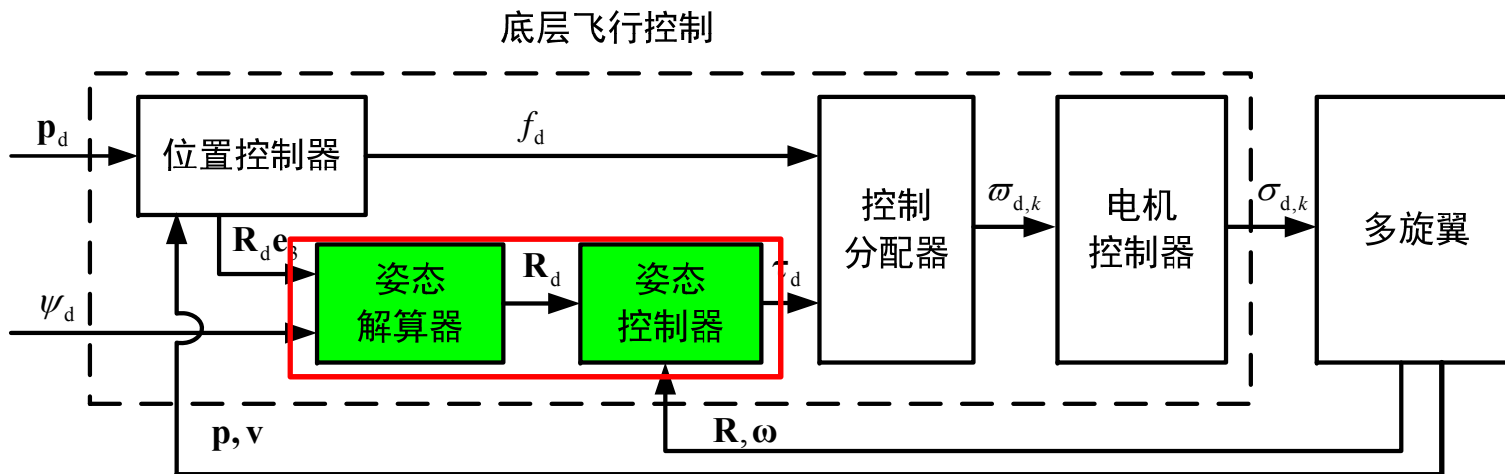


图11.6 基于旋转矩阵的的多旋翼闭环控制框图



2. 位置控制

□ 产生期望旋转矩阵的位置控制[2]

针对非线性耦合模型进行如下控制器设计

$$g\mathbf{e}_3 - \frac{f_d}{m}\mathbf{r}_{3,d} = \mathbf{a}_d$$

其中 $\mathbf{r}_{3,d} = \mathbf{R}_d\mathbf{e}_3$ 以及

$$\mathbf{a}_d = \begin{bmatrix} \text{sat}_{\text{gd}} \left(-\mathbf{K}_{vhp}\mathbf{e}_{v_h} - \mathbf{K}_{vhi} \int \mathbf{e}_{v_h} - \mathbf{K}_{vhd}\dot{\mathbf{e}}_{v_h}, a_1 \right) \\ \text{sat}_{\text{gd}} \left(-k_{vzp}e_{v_z} - k_{vzi} \int e_{v_z} - k_{vzd}\dot{e}_{v_z}, a_2 \right) \end{bmatrix}$$

多旋翼位置模型

$${}^e\dot{\mathbf{p}} = {}^e\mathbf{v}$$

$${}^e\dot{\mathbf{v}} = g\mathbf{e}_3 - \frac{f}{m}\mathbf{R}\mathbf{e}_3$$

期望的加速度
，需要加饱和

先求解期望的旋转矩阵 \mathbf{R}_d 。由上式可以得到

$$\mathbf{r}_{3,d} = \frac{g\mathbf{e}_3 - \mathbf{a}_d}{\|g\mathbf{e}_3 - \mathbf{a}_d\|}$$

[2] Lee, T, Leoky M, and McClamroch N H. Geometric tracking control of a quadrotor UAV on SE(3). In: Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control. Atlanta, Georgia, USA: IEEE, 2010. 5420–5425.



2. 位置控制

□ 产生期望旋转矩阵的位置控制

但是为了满足 $\mathbf{r}_{3,d}^T \mathbf{r}_{3,d} = 1$ ，我们只需要得到方向

$$\mathbf{r}_{3,d} = \frac{g\mathbf{e}_3 - \mathbf{a}_d}{\|g\mathbf{e}_3 - \mathbf{a}_d\|}$$

至此，向量 $\mathbf{r}_{3,d}$ 已经确定。下面介绍两种获得 \mathbf{R}_d 的方法。一种基于小角度假设，另一种同样适用于大角度飞行。

(1) 小角度情况

然而 $\mathbf{R}_d = [\mathbf{r}_{1,d} \quad \mathbf{r}_{2,d} \quad \mathbf{r}_{3,d}]$ ，因此还要确定 $\mathbf{r}_{1,d}, \mathbf{r}_{2,d}$ 中的一个，我们就可以恢复出 \mathbf{R}_d 了。根据旋转矩阵的定义， $\mathbf{r}_1 \in \mathbb{R}^3$ 为

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi \\ \cos \theta \sin \psi \\ -\sin \theta \end{bmatrix}$$



2. 位置控制

□ 产生期望旋转矩阵的位置控制

因此，我们定义向量

$$\bar{\mathbf{r}}_{1,d} = \begin{bmatrix} \cos \psi_d \\ \sin \psi_d \\ 0 \end{bmatrix}$$

在姿态角变化不大的情况下，可认为 $\bar{\mathbf{r}}_{1,d} \approx \mathbf{r}_{1,d}$ 。这样通过 $\bar{\mathbf{r}}_{1,d}$ 和 $\mathbf{r}_{3,d}$ 可以将 $\mathbf{r}_{2,d}$ 定义为

$$\mathbf{r}_{2,d} = \frac{\mathbf{r}_{3,d} \times \bar{\mathbf{r}}_{1,d}}{\|\mathbf{r}_{3,d} \times \bar{\mathbf{r}}_{1,d}\|}$$

根据叉乘的定义，可以知道 $\mathbf{r}_{2,d} \perp \mathbf{r}_{3,d}$ 。进一步，定义 $\mathbf{r}_{1,d} = \mathbf{r}_{2,d} \times \mathbf{r}_{3,d}$ 。这样可得 $\mathbf{r}_{1,d} \perp \mathbf{r}_{3,d}$, $\mathbf{r}_{1,d} \perp \mathbf{r}_{2,d}$ 。至此，可得期望的姿态矩阵 \mathbf{R}_d 为

$$\mathbf{R}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{2,d} \times \mathbf{r}_{3,d} & \mathbf{r}_{2,d} & \mathbf{r}_{3,d} \end{bmatrix}$$

其满足 $\mathbf{R}_d^T \mathbf{R}_d = \mathbf{I}_3$ 。



2. 位置控制

□ 产生期望旋转矩阵的位置控制

(2) 大角度情况

向量 $\mathbf{r}_{3,d}$ 也可以表示为

$$\mathbf{r}_{3,d} = \begin{bmatrix} \cos\psi_d \sin\theta_d \cos\phi_d + \sin\psi_d \sin\phi_d \\ \sin\psi_d \sin\theta_d \cos\phi_d - \cos\psi_d \sin\phi_d \\ \cos\phi_d \cos\theta_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{bmatrix}. \quad (*)$$

上式的解为

$$\theta_d = \theta_{d,0} \text{ 或 } \theta_{d,1}$$

$$\phi_d = \phi_{d,0} \text{ 或 } \phi_{d,1}$$

其中

$$\theta_{d,0} = \arctan 2(\cos\psi_d a_{11} + \sin\psi_d a_{12}, a_{13})$$

$$\theta_{d,1} = \arctan 2(-\cos\psi_d a_{11} - \sin\psi_d a_{12}, -a_{13})$$

$$\phi_{d,0} = \arcsin(\sin\psi_d a_{11} - \cos\psi_d a_{12})$$

$$\phi_{d,1} = \phi_{d,0} - \text{sign}(\phi_{d,0})\pi.$$



2. 位置控制

□ 产生期望旋转矩阵的位置控制

尽管每个欧拉角有两个可能的取值，大多数情况下其真值可由式 (*) 唯一确定。进一步，可由期望的欧拉角 ϕ_d, θ_d, ψ_d 计算得到 R_d 。

下面进一步考虑期望拉力 f_d 的计算，因为 f_d 和 $\mathbf{r}_{3,d}$ 耦合在一起，因此我们进行如下处理。首先在 $g\mathbf{e}_3 - \frac{f_d}{m}\mathbf{r}_{3,d} = \mathbf{a}_d$ 两边同乘 $\mathbf{r}_{3,d}^T$ ，利用 $\mathbf{r}_{3,d}^T\mathbf{r}_{3,d} = 1$ 可以得到

$$f_d = m\mathbf{r}_{3,d}^T (g\mathbf{e}_3 - \mathbf{a}_d)$$

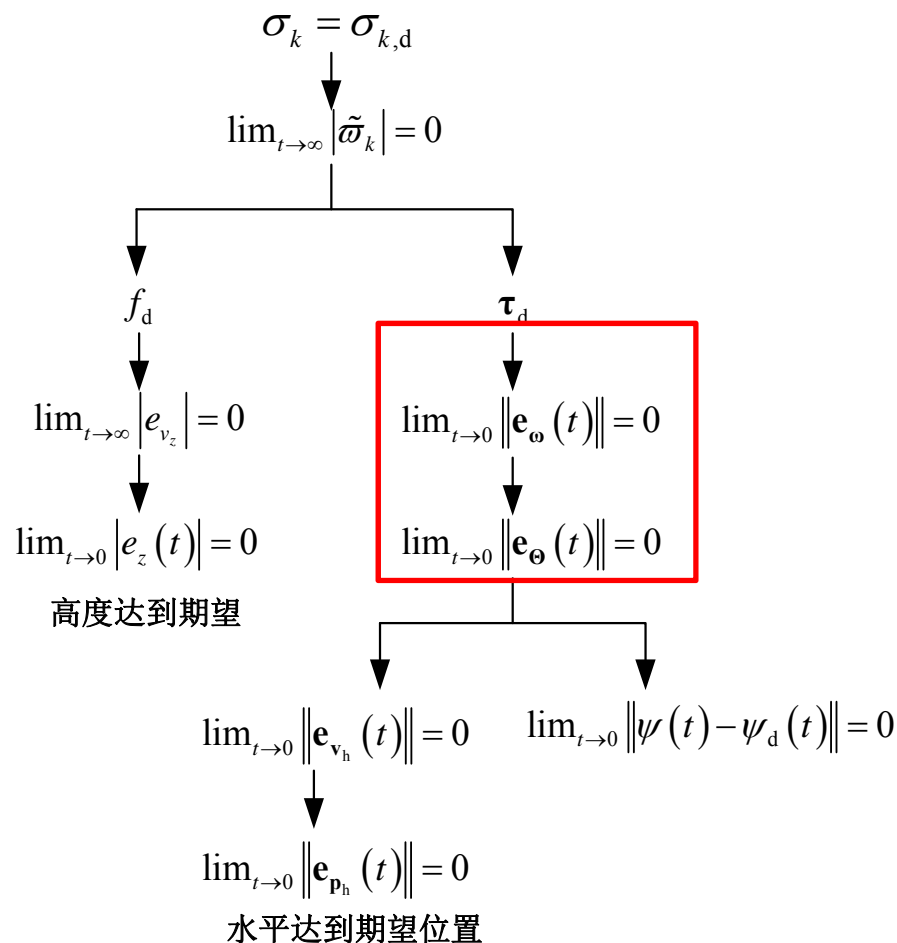
如果限定 $f_d \in [f_{\min}, f_{\max}]$ ，那么姿态控制器可以写为

$$f_d = \text{sat}_{\text{gd}} \left(m\mathbf{r}_{3,d}^T (g\mathbf{e}_3 - \mathbf{a}_d) - \frac{f_{\min} + f_{\max}}{2}, \frac{f_{\max} - f_{\min}}{2} \right) + \frac{f_{\min} + f_{\max}}{2}$$



3. 姿态控制

多旋翼采用**内外层控制**，外层控制器为内层控制器提供指令，即把位置通道控制器的输出 (Θ_{hd} 或 R_d) 作为姿态控制系统的参考值。后续的姿态控制的目标是实现 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\Theta_h(t) - \Theta_{hd}(t)\| = 0$ 或者 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|R^T R_d - I_3\| = 0$ 。不仅如此，一般要求姿态环的收敛速度比位置通道动态快4~10倍。从位置通道看来，可以认为姿态控制目标 $\Theta_h = \Theta_{hd}$ 或 $R(t) = R_d(t)$ 已经被实现了。因此，剩余的控制目标就传给了姿态控制。**只要姿态控制被很好地实现，水平位置跟踪的问题就可以被解决。**下面介绍姿态控制。



多旋翼控制目标关系图



3. 姿态控制

□ 基本概念

多旋翼姿态控制是位置控制的基础。常见的刚体姿态描述方法为欧拉角描述方法和旋转矩阵描述方法。

表11.1 姿态参数性能对比

姿态参数	优点	缺点
欧拉角	无冗余参数，物理意义明确	俯仰角为90度时存在奇异，存在大量超越函数运算，死锁；偏航角从 2π 到0的过渡问题。
旋转矩阵	无奇异，无超越函数运算，可用于连续旋转表示，全局且唯一，便于插值	六个冗余参数



3. 姿态控制

□ 基于欧拉角的控制器设计

姿态控制的目标是已知参考姿态角 $\Theta_d = [\Theta_{hd}^T \ \psi_d]^T$ ，设计控制器 τ_d 使得 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e_\Theta(t)\| = 0$ ，其中 $e_\Theta = \Theta - \Theta_d$ 。这里 Θ_{hd} 是由位置控制器给定的，而 ψ_d 是任务规划给定的。为了达到这个目的，我们先针对

$$\dot{\Theta} = \omega$$

设计角速度的期望为

$$\omega_d = -K_\Theta e_\Theta$$

其中 $K_\Theta \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ 是正定的常值对角矩阵，所有元素都大于0。以上两式构成了角度控制环。在 $\dot{\Theta}_d = \mathbf{0}_{3 \times 1}$ 的前提下，当 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\dot{e}_\Theta(t)\| = 0$ 可以使得 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e_\Theta(t)\| = 0$ 其中 $e_\omega = \omega - \omega_d$ 。接下来的任务是针对

设计期望的转矩

$$J\dot{\omega} = \tau$$

$$\tau_d = -K_{\omega p} e_\omega - K_{\omega i} \int e_\omega - K_{\omega d} \dot{e}_\omega$$

如何加入饱和？

其中 $K_{\omega p}, K_{\omega i}, K_{\omega d} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ 是正定常值对角矩阵。以上两式构成了角速度控制环。



3. 姿态控制

□ 基于旋转矩阵的控制器设计

控制器设计的思路为：根据旋转矩阵 \mathbf{R} 和期望旋转矩阵 \mathbf{R}_d 定义姿态误差矩阵为 $\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R}^T \mathbf{R}_d$ 。由上面的定义可知：当且仅当 $\mathbf{R} = \mathbf{R}_d$ 时， $\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{I}_3$ 。基于以上分析可以将基于旋转矩阵的多旋翼姿态跟踪控制的控制目标总结为 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\mathbf{R}}(t) - \mathbf{I}_3\| = 0$ 。

定义姿态跟踪误差为

$$\mathbf{e}_R = \frac{1}{2} \text{vex}(\mathbf{R}_d^T \mathbf{R} - \mathbf{R}^T \mathbf{R}_d)$$

角速度跟踪误差定义为

$$\mathbf{e}_\omega = \omega - \mathbf{R}^T \mathbf{R}_d \omega_d$$

小角度假设下 $\omega_d = \dot{\Theta}_d$ 为期望的角速度，一般情况下可忽略，则 $\mathbf{e}_\omega = \omega$ 。可以设计如下的PD控制器

$$\boldsymbol{\tau}_d = -\mathbf{K}_R \mathbf{e}_R - \mathbf{K}_\omega \mathbf{e}_\omega$$



3. 姿态控制

□ 基于旋转矩阵的控制器设计

其中 $\mathbf{K}_R, \mathbf{K}_\omega \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ 为正定增益矩阵。上面设计的PD控制器只可以在悬停位置的小范围内保证系统稳定。为了获得更大范围的稳定性，通过引入误差校正项，设计非线性控制器为：

$$\boldsymbol{\tau}_d = -\mathbf{K}_R \mathbf{e}_R - \mathbf{K}_\omega \mathbf{e}_\omega - \mathbf{J} \left([\boldsymbol{\omega}]_x \mathbf{R}^T \mathbf{R}_d \boldsymbol{\omega}_d - \mathbf{R}^T \mathbf{R}_d \dot{\boldsymbol{\omega}}_d \right)$$

此控制器可以保证在几乎任意旋转情况下系统指数稳定。实际中控制器后两项的值很小，直接忽略也可以获得满意的性能。但对于大机动飞行中后两项的值很大，对系统性能的影响很大，则必须予以考虑。具体可参考如下文献。

[3] Lee, T, Leoky M, and McClamroch N H. Geometric tracking control of a quadrotor UAV on SE(3). In: Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control. Atlanta, Georgia, USA: IEEE, 2010. 5420–5425.



4. 控制分配

□ 基本概念

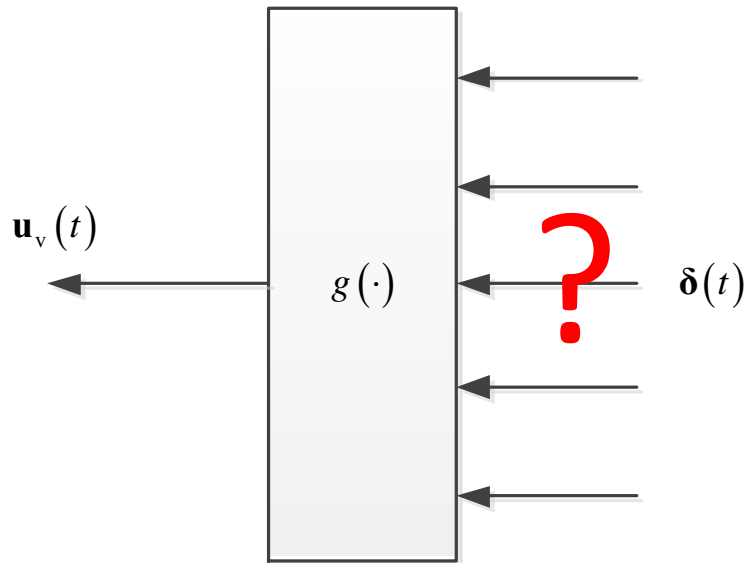
简单来说，控制分配问题可描述为：
给定 $u_v(t)$ ，寻找 $\delta(t)$ 使得

$$u_v(t) = g(\delta(t))$$

其中 $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为被控系统中执行机构控制输入到伪控制输入的映射。通常假设执行机构偏转量与其产生的控制力矩之间为线性函数关系，则可得到线性控制分配问题

$$u_v(t) = B\delta(t)$$

其中 $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 为控制效率矩阵。



控制分配示意图

- 上层控制和底层控制分离
- 有效分配，防止饱和
- 通过分配，提高对故障及损伤的鲁棒性
- ...



4. 控制分配

□ 多旋翼控制分配的自驾仪实现

+字形四旋翼和多旋翼的控制效率模型见第六讲：

$$\begin{bmatrix} f \\ \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_T & c_T & c_T & c_T \\ 0 & -dc_T & 0 & dc_T \\ dc_T & 0 & -dc_T & 0 \\ c_M & -c_M & c_M & -c_M \end{bmatrix}}_{M_4} \begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \\ \omega_4^2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} f \\ \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_T & c_T & \cdots & c_T \\ -dc_T \sin \varphi_1 & -dc_T \sin \varphi_2 & \cdots & -dc_T \sin \varphi_{n_r} \\ dc_T \cos \varphi_1 & dc_T \cos \varphi_2 & \cdots & dc_T \cos \varphi_{n_r} \\ c_M \delta_1 & c_M \delta_2 & \cdots & c_M \delta_{n_r} \end{bmatrix}}_{M_{n_r}} \begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \vdots \\ \omega_{n_r}^2 \end{bmatrix}$$

对于四旋翼来说， $M_4 \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ 可逆，可直接求逆得到控制分配矩阵 $P_4 = M_4^{-1}$ 。这种分配是唯一的。然而，对于螺旋桨数大于4的多旋翼，分配可以有无穷多种。分配过程中，可能让某个螺旋桨的转速达到饱和。因此，好的控制分配算法就十分重要。在开源的自驾仪中，一般的算法是通过**求伪逆**得到控制分配矩阵，即

$$P_{n_r} = M_{n_r}^\dagger$$

其中 $P_{n_r} \in \mathbb{R}^{n_r \times 4}$ ， $M_{n_r} \in \mathbb{R}^{4 \times n_r}$ 。



4. 控制分配

□ 多旋翼控制分配的自驾仪实现

在实际中，通过控制器得到期望拉力 f_d 和期望力矩 τ_d 后，进一步再通

$$\begin{pmatrix} \omega_{d,1}^2 \\ \omega_{d,2}^2 \\ \vdots \\ \omega_{d,n_r}^2 \end{pmatrix} = \mathbf{P}_{n_r} \begin{pmatrix} f_d \\ \tau_d \end{pmatrix}$$

与参数相关

可得到每个螺旋桨的期望转速 $\omega_{d,i}, i=1,2,\dots,n_r$ 。

在工程实际中， \mathbf{M}_{n_r} 中的参数未知，即 c_T, c_M, d （具体定义参见第六讲）未知时。那这又是如何进行控制分配的呢？





4. 控制分配

□ 多旋翼控制分配的自驾仪实现

要说明这个问题，首先定义控制效率矩阵为

$$\mathbf{M}_{n_r}(c_T, c_M, d) = \begin{bmatrix} c_T & c_T & \cdots & c_T \\ -dc_T \sin \varphi_1 & -dc_T \sin \varphi_2 & \cdots & -dc_T \sin \varphi_{n_r} \\ dc_T \cos \varphi_1 & dc_T \cos \varphi_2 & \cdots & dc_T \cos \varphi_{n_r} \\ c_M \sigma_1 & c_M \sigma_2 & \cdots & c_M \sigma_{n_r} \end{bmatrix}$$

它满足

$$\mathbf{M}_{n_r}(c_T, c_M, d) = \mathbf{P}_a \mathbf{M}_{n_r}(1, 1, 1)$$

其中 $\mathbf{P}_a = \text{diag}(c_T \quad dc_T \quad dc_T \quad c_M)$ 。因此，有如下关系

$$\mathbf{M}_{n_r}^\dagger(c_T, c_M, d) = \underbrace{\mathbf{M}_{n_r}^\dagger(1, 1, 1)}_{\text{已知参数}} \underbrace{\mathbf{P}_a^{-1}}_{\text{未知参数}}$$

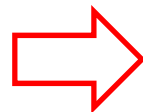


4. 控制分配

□ 多旋翼控制分配的自驾仪实现

以六旋翼为例， $M_6(c_T, c_M, d)$ 可以表示为

$$M_6(c_T, c_M, d) = \begin{bmatrix} c_T & c_T & c_T & c_T & c_T & c_T \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}dc_T}{2} & -\frac{\sqrt{3}dc_T}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}dc_T}{2} & \frac{\sqrt{3}dc_T}{2} \\ dc_T & \frac{dc_T}{2} & -\frac{dc_T}{2} & -dc_T & -\frac{dc_T}{2} & \frac{dc_T}{2} \\ c_M & -c_M & c_M & -c_M & c_M & -c_M \end{bmatrix}$$



$$M_6^\dagger(1,1,1) = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} & 1 & -1 \\ 1 & -\sqrt{3} & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & \sqrt{3} & -1 & 1 \\ 1 & \sqrt{3} & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

于是

$$\begin{pmatrix} \omega_{d,1}^2 \\ \omega_{d,2}^2 \\ \vdots \\ \omega_{d,6}^2 \end{pmatrix} = M_6^\dagger(1,1,1) P_a^{-1} \begin{pmatrix} f_d \\ \tau_d \end{pmatrix} = M_6^\dagger(1,1,1) \begin{pmatrix} f_d/c_T \\ \tau_{dx}/dc_T \\ \tau_{dy}/dc_T \\ \tau_{dz}/c_M \end{pmatrix}$$

自驾仪中，控制器都是PID控制器。可以通过调节PID参数来补偿未知量。

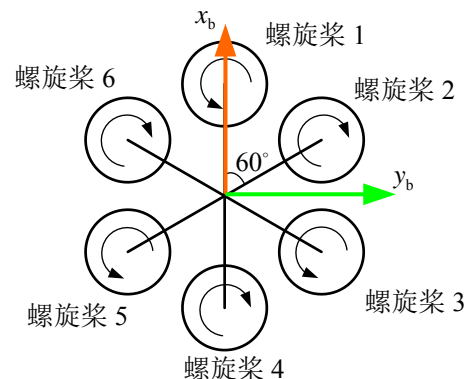


图11.7 常规布局的六旋翼



5. 电机控制

假设螺旋桨转速为 $\omega_k, k=1, 2, \dots, n_r$ 。下面给出基于电机油门指令的电机控制器设计。控制目标为：设计每个电机的油门指令 $\sigma_{d,k}$ 使得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\omega_k - \omega_{d,k}| = 0。$$

□ 闭环控制

以油门指令作为输入的动力单元模型见第六讲，为

$$\omega_k = \frac{1}{T_m s + 1} C_R \sigma_k + \omega_b$$

其中油门指令 σ_k 为输入，螺旋桨转速 ω_k 为输出。电机控制的目标是使控制误差 $\tilde{\omega}_k = \omega_k - \omega_{d,k}$ 最小化，设计控制器为

$$\sigma_{d,k} = -k_{\omega p} \tilde{\omega}_k - k_{\omega i} \int \tilde{\omega}_k - k_{\omega d} \dot{\tilde{\omega}}_k$$

其中 $k_{\omega p}, k_{\omega i}, k_{\omega d} \in \mathbb{R}_+$ 。



5. 电机控制

□ 开环控制

大多数开源自驾仪采用开环控制，在得到 f_d, τ_d 之后，期望螺旋桨转速 $\omega_{d,k}, k=1,2,\dots,n_r$ 可通过控制分配直接得到，其与电机油门指令成正比。因此，设计控制器如下

$$\sigma_{d,k} = a\omega_{d,k} + b$$

其中未知参数 a, b 可以通过位置和姿态控制器中的PID参数来补偿。



6. 本讲小结

1. 多旋翼控制器的设计基于特定的控制要求，在不同的控制要求下需要选用不同的数学模型和控制方法。
2. 多旋翼的控制器设计是相互嵌套的，最终的系统包含多个闭环反馈，各部分相互协调共同实现多旋翼的飞行控制。
3. 对一流的多旋翼来说，这是不够的。对于所有多旋翼都希望**减小振动和节省能量**；对于如海上起飞的多旋翼都希望具有一定的**抗风性**；对于用于拍摄的多旋翼，特别是无云台的多旋翼，需要**高精度悬停**；对于多旋翼表演等场合，需要多旋翼实现大机动飞行。那么，人们不禁会问：如何设计底层控制，使得多旋翼最大可能减少多旋翼振动、节省能量、在大风中起飞、高精度悬停、大机动飞行？最终，**我们需要进一步从实际问题出发，研究和设计适当的底层控制器。**



资源

(1) 可靠飞行控制研究组主页课程中心(全部课件下载)

<http://rfly.buaa.edu.cn/course>

(2) 关注可靠飞行控制研究组公众号 buaarfly(文章、资讯等)

(3) 多旋翼设计与控制交流QQ群:183613048

(4) 视频课程(MOOC)同步发布, 网易云课堂搜索 “多旋翼”

<http://study.163.com/course/introduction/1003715005.htm>

(5) 同名中文书本教材《多旋翼飞行器设计与控制》即将在电子工业出版社出版, 敬请期待

(6) 有疑问可联系课程总助教戴训华, 邮箱: dai@buaa.edu.cn

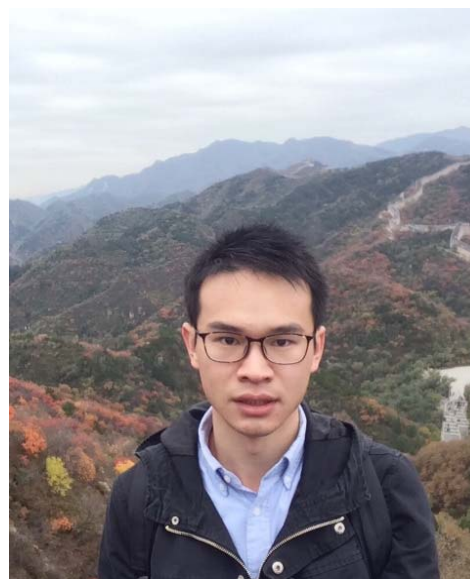


致谢

感谢控制组同学



任锦瑞



戴训华

为本节课程准备作出的贡献。



谢谢

更详细的内容可以参考我们的教材：《多旋翼飞行器设计与控制》，电子工业出版社。

中文版目前在亚马逊、当当、京东、天猫（电子工业出版社旗舰店）等网站有售。

英文版本 *Introduction to Multicopter Design and Control*，在Springer出版，在亚马逊有售。