多旋翼飞行器设计与控制

第八讲 可观性和卡尔曼滤波器

全权　副教授
qq_buaa@buaa.edu.cn
自动化科学与电气工程学院
北京航空航天大学

东方智慧

盲人摸象

核心问题

什么是可观性？如何设计卡尔曼滤波器？

大纲

1. 可观性
2. 卡尔曼滤波
3. 多速率采样卡尔曼滤波
4. 扩展卡尔曼滤波
5. 本讲小结

可观性

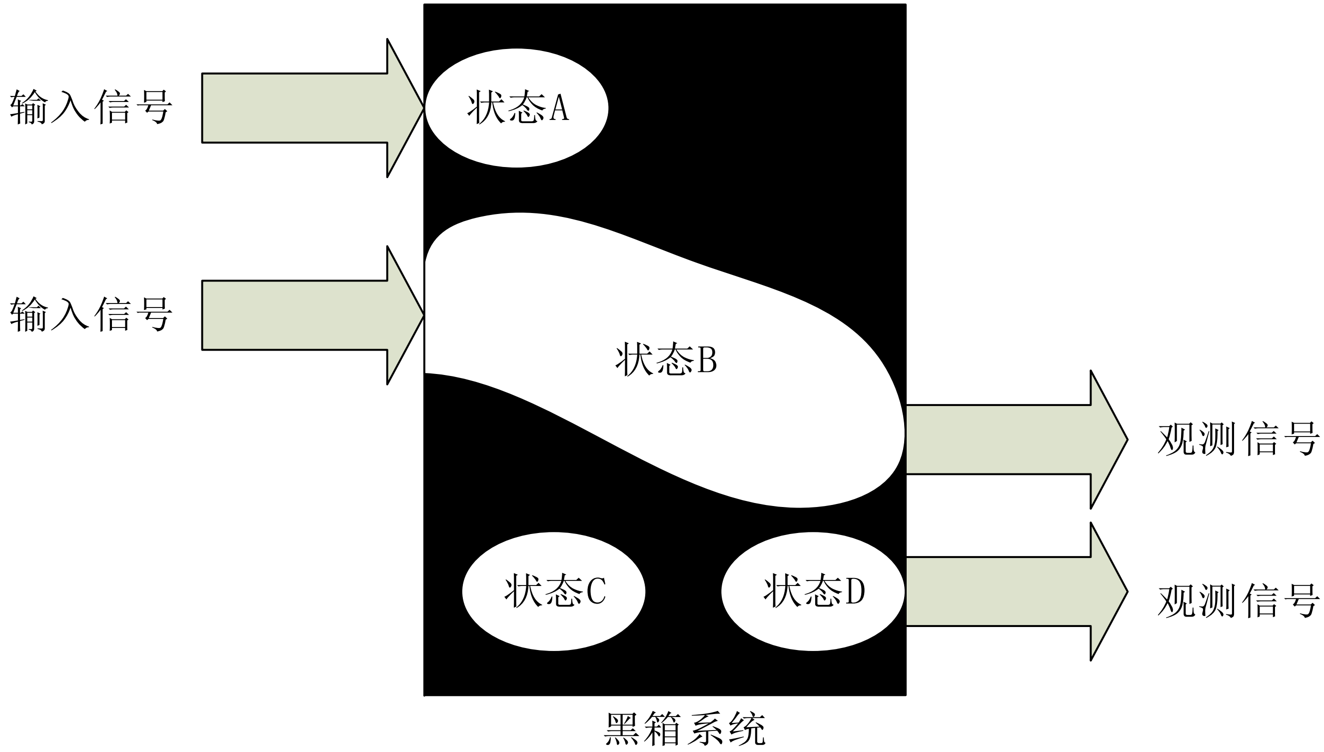
可观性就是回答"状态的变化能否由输出反映出来"

中医"望闻问切"
是否能瞧病？

网络大数据作为输出，能否观测
更有价值信息？

三个关键词：动态系统、状态、输出

可观性



直观地，状态A和状态C是不可观的

可观性

连续线性系统

（1）定义

考虑如下连续线性系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$$

其中 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{m}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{m}, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n\times m}$

定义1. 如果在有限时间间隔 $t_0 \le t \le t_{\mathrm{f}}$内，根据输出值$\mathbf{y}(t)$和输入值$\mathbf{u}(t)$，能够确定系统的初始状态 $\mathbf{x}(t_0)$的每一个分量，那么称此系统是完全可观的，简称可观测。

三个关键词：动态系统、状态、输出

可观性

□ 连续线性系统

（2）直观解释

由系统方程可知

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{y}=\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}\\
&\dot{\mathbf{y}}=\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{u}\Rightarrow\dot{\mathbf{y}}-\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{u}=\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}\\
&\ddot{\mathbf{y}}=\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{2}\mathbf{x}+\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}+\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\dot{\mathbf{u}}\Rightarrow\ddot{\mathbf{y}}-\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}-\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\dot{\mathbf{u}}=\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{2}\mathbf{x}\\
&\vdots\\
&\mathbf{y}^{(n-1)}-\sum_{k=0}^{n-2}\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{n-2-k}\mathbf{B}\mathbf{u}^{(k)}=\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix}\mathbf{y}\\ \dot{\mathbf{y}}-\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{u}\\ \vdots\\ \mathbf{y}^{(n-1)}-\sum_{k=0}^{n-2}\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{n-2-k}\mathbf{B}\mathbf{u}^{(k)}\end{bmatrix}=\mathbf{O}_{\mathrm{v}}\mathbf{x}
$$

其中

$$
\mathbf{O}_{\mathrm{v}}=\begin{bmatrix}\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\\ \vdots\\ \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{n-1}\end{bmatrix}
$$

为什么不多求几阶导数？如：

$$
\mathbf{O}_{\mathrm{v}}'=\begin{bmatrix}\mathbf{O}_{\mathrm{v}}\\ \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{n}\end{bmatrix}
$$

可观性

连续线性系统

为什么不多求几阶导数？如：$\mathbf{O}'_{\mathrm{v}} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{\mathrm{v}} \\ \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{n} \end{bmatrix}$

根据凯利–哈密尔顿定理

$$\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{n} = \alpha_0\mathbf{C}^{\mathrm{T}} + \alpha_1\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} + \cdots + \alpha_n\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{n-1}$$

因此可观性矩阵的秩并不会增加

所以只求到（n-1）阶导数

可观性

□ 连续线性系统

（3）定理

进一步

利用此方程可以通过历史观测值y逆向唯一求解出状态x

$$\mathrm{rank}\,\mathbf{O}_v = n \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{O}_v^{-1}\begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \dot{\mathbf{y}} - \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{u} \\ \vdots \\ \mathbf{y}^{(n-1)} - \sum_{k=0}^{n-2}\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{n-2-k}\mathbf{B}\mathbf{u}^{(k)} \end{bmatrix}$$

定理1. 系统 $\begin{matrix} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \end{matrix}$ 可观测的充分必要条件 $\mathrm{rank}\,\mathbf{O}_v = n$。

可观性

连续线性系统

（4）例子

例1. 给出两个传感器GPS和加速度计，那么哪一个能够稳定地估计出一维运动小车的速度？

- GPS。为了简化起见，我们用GPS观测位置，一般用如下模型

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} p \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}^{\mathrm{T}}} \begin{bmatrix} p \\ v \end{bmatrix}$$

$y=x$，故位置状态x可通过输出 y直接求导得到，需要估计的是速度状态v

$$\mathbf{O}_{\mathrm{v}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

可观！
能够稳定地
估计小车的速度

其中 $x, v \in \mathbb{R}$ 分别表示位置和速度，$\varepsilon_1 \in \mathbb{R}$表示已知统计特性的噪声。

可观性

□ 连续线性系统

（4）例子

- 加速度计。为了简化起见，用加速度计估计速度，一般用如下模型

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{a} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} v \\ a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix}$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}^{\mathrm{T}}} \begin{bmatrix} v \\ a \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{O}_{\mathrm{v}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

不可观！
不能够稳定地
估计小车的速度

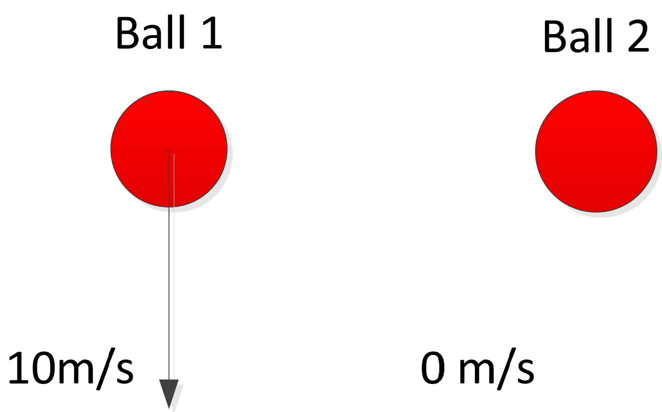
其中$v, a \in \mathbb{R}$分别表示速度和加速度，$\varepsilon_2 \in \mathbb{R}$表示已知统计特性的噪声。

可观性

连续线性系统

（4）例子

- 加速度计。



两个自由落体的小球加速度一样，但是初始速度不一样。无法从输出（加速度），观测出小球初始速度（状态）。不可观。

可观性

□ 离散线性系统

（1）定义

对于连续线性系统，可以通过采样周期 T_s 精确地将连续系统转化成离散系统。将连续系统模型转换成如下离散采样线性系统

$$\mathbf{x}_k = \boldsymbol{\Phi}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{u}_{k-1}$$
$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_k$$

其中 $\boldsymbol{\Phi} = e^{\mathbf{A}T_s}\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}'_{k-1},\ t \in \left[(k-1)T_s \quad kT_s\right], \mathbf{u}_{k-1} = \int_0^T e^{\mathbf{A}s}\mathbf{B}ds \cdot \mathbf{u}'_{k-1}$

定义2. 如果在有限时间间隔 NT_s内，根据输出值 $\mathbf{y}_k$ 和外界输入值 $\mathbf{u}_k$，能够确定系统的初始状态 $\mathbf{x}_0$ 的每一个分量，那么称此系统是完全可观的，简称可观测。

可观性

离散线性系统

（2）直观解释

$$\mathbf{y}_0=\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{y}_1=\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_1=\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi}\mathbf{x}_0+\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{u}_0\Rightarrow\mathbf{y}_1-\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{u}_0=\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi}\mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{y}_2=\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_2=\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi}\mathbf{x}_1+\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{u}_1\Rightarrow\mathbf{y}_2-\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{u}_1-\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi}\mathbf{u}_0=\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi}^2\mathbf{x}_0$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{y}_n-\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi}^{n-1-k}\mathbf{u}_k=\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi}^n\mathbf{x}_0$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{y}_0\\ \mathbf{y}_1\\ \vdots\\ \mathbf{y}_{n-1}-\sum_{k=0}^{n-2}\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi}^{n-2-k}\mathbf{u}_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi}\\ \vdots\\ \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi}^{n-1}\end{bmatrix}\mathbf{x}_0$$

（3）定理

定理2. 系统

$$\mathbf{x}_k=\mathbf{\Phi}\mathbf{x}_{k-1}+\mathbf{u}_{k-1}$$

$$\mathbf{y}_k=\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_k$$

可观测的充分必要条件是

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi}\\ \vdots\\ \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi}^{n-1}\end{bmatrix}=n$$

卡尔曼滤波器

□ 概述

卡尔曼滤波器是一种递推线性最小方差估计算法。它的最优估计需满足以下三个条件：

1）无偏性：即估计值的期望等于状态的真值；

若$\mathrm{E}\left(\hat{\vartheta}\right)=\vartheta$，那么意味着$\hat{\vartheta}$是参数$\vartheta$的无偏估计，否则为有偏估计，其中$\mathrm{E}(\cdot)$表示期望。

2）估计的方差最小；

若$\mathrm{D}\left(\hat{\vartheta}\right)=\mathrm{E}\left(\left(\hat{\vartheta}-\vartheta\right)^2\right)$，如果对于任意一个估计$\tilde{\vartheta}$，我们有$\mathrm{D}\left(\hat{\vartheta}\right)\le\mathrm{D}\left(\tilde{\vartheta}\right)$，那么称$\hat{\vartheta}$为最小方差估计，其中$\mathrm{D}(\cdot)$表示方差。

3）实时性。

卡尔曼滤波器

◻ 模型描述

假设线性离散系统模型如下：

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_k &= \mathbf{\Phi}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{\Gamma}_{k-1}\mathbf{w}_{k-1} \\ \mathbf{z}_k &= \mathbf{H}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k\end{aligned}$$

式中，过程噪声 $\mathbf{w}_{k-1}$和观测噪声 $\mathbf{v}_k$ 的统计特性为

自相关系数 $\mathbf{R}_{\mathbf{ww}}$

互相关系数 $\mathbf{R}_{\mathbf{wv}}$

系统噪声方差阵$\mathbf{Q}_k \geq \mathbf{0}$

观测噪声方差阵$\mathbf{R}_k > \mathbf{0}$

克罗内克δ函数

$$\delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases}$$

$$\mathrm{E}\left(\mathbf{w}_{k-1}\right) = \mathbf{0}, \mathrm{E}\left(\mathbf{v}_k\right) = \mathbf{0}, \mathbf{R}_{\mathbf{wv}}\left(k, j\right) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{ww}}\left(k, j\right) = \mathrm{E}\left(\mathbf{w}_k\mathbf{w}_j^{\mathrm{T}}\right) = \mathbf{Q}_k\delta_{kj} = \begin{cases} \mathbf{Q}_k, k = j \\ \mathbf{0}, \quad k \neq j \end{cases}$$

独立不相关

$$\mathbf{R}_{\mathbf{vv}}\left(k, j\right) = \mathrm{E}\left(\mathbf{v}_k\mathbf{v}_j^{\mathrm{T}}\right) = \mathbf{R}_k\delta_{kj} = \begin{cases} \mathbf{R}_k, k = j \\ \mathbf{0}, \quad k \neq j \end{cases}$$

卡尔曼滤波器

□ 模型描述

初始状态 $\mathbf{x}_0$的统计特性为

$$\mathrm{E}\left(\mathbf{x}_0\right)=\hat{\mathbf{x}}_0,\mathrm{cov}\left(\mathbf{x}_0\right)=\mathbf{P}_0$$ 其中，$\mathrm{cov}(\cdot)$表示协方差

还假设状态的初始值 $\mathbf{x}_0,\mathbf{u}_k$与 $\mathbf{w}_{k-1},\mathbf{v}_k,k\geq 1$, 均不相关，并且噪声向量 $\mathbf{w}_{k-1}$与 $\mathbf{v}_k$也不相关，即有：

$$\mathbf{R}_{\mathbf{xw}}\left(0,k\right)=\mathrm{E}\left(\mathbf{x}_0\mathbf{w}_k^{\mathrm{T}}\right)=\mathbf{0}$$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{xv}}\left(0,k\right)=\mathrm{E}\left(\mathbf{x}_0\mathbf{v}_k^{\mathrm{T}}\right)=\mathbf{0}$$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{uw}}\left(k,j\right)=\mathrm{E}\left(\mathbf{u}_k\mathbf{w}_j^{\mathrm{T}}\right)=\mathbf{0}$$

独立不相关

卡尔曼滤波器

□卡尔曼滤波器推导思路

目的：假设滤波器形式

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \mathbf{K}'_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + \mathbf{K}_k \mathbf{z}_k + \mathbf{K}''_k \mathbf{u}_{k-1}$$

其中 $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}$ 是 $\mathbf{x}_{k-1}$ 的最优线性估计（最小方差无偏估计）。求

$$\mathbf{K}'_k, \mathbf{K}_k, \mathbf{K}''_k$$

使得 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ 是 $\mathbf{x}_k$ 的最优线性估计。

卡尔曼滤波器

□卡尔曼滤波器推导思路

第一步：求$\mathbf{K}_k',\mathbf{K}_k''$使得$\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$是$\mathbf{x}_k$的无偏估计

因为 $\tilde{\mathbf{x}}_{k|k}=\mathbf{x}_k-\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{x}}_{k|k} &= \underline{\left(\boldsymbol{\Phi}_{k-1}-\mathbf{K}_k\mathbf{H}_k\boldsymbol{\Phi}_{k-1}-\mathbf{K}_k'\right)}\mathbf{x}_{k-1}+\mathbf{K}_k'\left(\mathbf{x}_{k-1}-\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}\right)\\
&+\left(\boldsymbol{\Gamma}_{k-1}-\mathbf{K}_k\mathbf{H}_k\boldsymbol{\Gamma}_{k-1}\right)\mathbf{w}_{k-1}+\underline{\left(\mathbf{I}_n-\mathbf{K}_k\mathbf{H}_k-\mathbf{K}_k''\right)}\mathbf{u}_{k-1}-\mathbf{K}_k\mathbf{v}_k
\end{aligned}
$$

又因为要求$\mathrm{E}\left(\tilde{\mathbf{x}}_{k|k}\right)=\mathbf{0}$，又已知$\mathrm{E}\left(\tilde{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}\right)=\mathbf{0},\mathrm{E}(\mathbf{v}_k)=\mathbf{0},\mathrm{E}(\mathbf{w}_{k-1})=\mathbf{0}$

不能要求$\mathrm{E}(\mathbf{x}_{k-1})=\mathbf{0},\mathrm{E}(\mathbf{u}_{k-1})=\mathbf{0}$，那么只能让

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\Phi}_{k-1}-\mathbf{K}_k\mathbf{H}_k\boldsymbol{\Phi}_{k-1}-\mathbf{K}_k' &= \mathbf{0}_{n\times n}\\
\mathbf{I}_n-\mathbf{K}_k\mathbf{H}_k-\mathbf{K}_k'' &= \mathbf{0}_{n\times n}
\end{aligned}
\quad\Rightarrow\quad
\begin{aligned}
\mathbf{K}_k' &= \boldsymbol{\Phi}_{k-1}-\mathbf{K}_k\mathbf{H}_k\boldsymbol{\Phi}_{k-1}\\
\mathbf{K}_k'' &= \mathbf{I}_n-\mathbf{K}_k\mathbf{H}_k
\end{aligned}
$$

卡尔曼滤波器

■卡尔曼滤波器推导思路

第一步：求 $\mathbf{K}'_k,\mathbf{K}''_k$ 使得 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ 是 $\mathbf{x}_k$ 的无偏估计

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}_{k-1}-\mathbf{K}_k\mathbf{H}_k\boldsymbol{\Phi}_{k-1}-\mathbf{K}'_k &= \mathbf{0}_{n\times n}\\ \mathbf{I}_n-\mathbf{K}_k\mathbf{H}_k-\mathbf{K}''_k &= \mathbf{0}_{n\times n}\end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned}\mathbf{K}'_k &= \boldsymbol{\Phi}_{k-1}-\mathbf{K}_k\mathbf{H}_k\boldsymbol{\Phi}_{k-1}\\ \mathbf{K}''_k &= \mathbf{I}_n-\mathbf{K}_k\mathbf{H}_k\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \hat{\mathbf{x}}_{k|k}=\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}+\mathbf{K}_k\left(\mathbf{z}_k-\hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}\right)$$

$$\begin{bmatrix}\text{状态}\\ \text{更新值}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\text{状态}\\ \text{预测值}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\text{卡尔曼}\\ \text{增益}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\text{新息}\\ \text{矢量}\end{bmatrix}$$

物理意义？

其中
$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} &= \boldsymbol{\Phi}_{k-1}\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}+\mathbf{u}_{k-1}\\ \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} &= \mathbf{H}_k\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}\end{aligned}$$

卡尔曼滤波器

□卡尔曼滤波器推导思路

第二步：求 $\mathbf{K}_k$ 使得 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ 是 $\mathbf{x}_k$ 的最小方差估计

也就是求解优化问题

$$\min_{\mathbf{K}_k} \operatorname{tr}\mathbf{P}_{k|k} = \min_{\mathbf{K}_k} \mathrm{E}\left(\operatorname{tr}\left(\tilde{\mathbf{x}}_{k|k}\tilde{\mathbf{x}}_{k|k}^{\mathrm{T}}\right)\right)$$

这里 $\mathbf{P}_{k|k} = \left(\mathbf{I}_n - \underline{\mathbf{K}}_k\mathbf{H}_k\right)\mathbf{P}_{k|k-1}\left(\mathbf{I}_n - \underline{\mathbf{K}}_k\mathbf{H}_k\right)^{\mathrm{T}} + \underline{\mathbf{K}}_k\mathbf{R}_k\underline{\mathbf{K}}_k^{\mathrm{T}}$

其中 $\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathrm{E}\left(\tilde{\mathbf{x}}_{k|k-1}\tilde{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{\mathrm{T}}\right)$

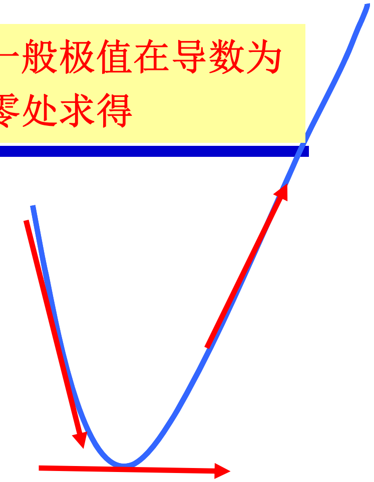
进一步可以得到 当作已知

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{\Phi}_{k-1}\mathbf{P}_{k-1|k-1}\mathbf{\Phi}_{k-1}^{\mathrm{T}} + \mathbf{\Gamma}_{k-1}\mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{\Gamma}_{k-1}^{\mathrm{T}}$$

卡尔曼滤波器

□卡尔曼滤波器推导思路

一般极值在导数为零处求得



第二步：求 $\mathbf{K}_k$ 使得 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ 是 $\mathbf{x}_k$的最小方差估计

也就是求解优化问题

$$\min_{\mathbf{K}_k} \mathrm{tr}\mathbf{P}_{k|k} = \min_{\mathbf{K}_k} \mathrm{E}\left(\mathrm{tr}\left(\tilde{\mathbf{x}}_{k|k}\tilde{\mathbf{x}}_{k|k}^{\mathrm{T}}\right)\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mathbf{A}}\mathrm{tr}\left(\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right) = 2\mathbf{A}\mathbf{B}$$

其中 $\mathbf{B} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}$，B是对称阵.

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \mathbf{K}_k}\mathrm{tr}\left(\mathbf{P}_{k|k}\right) = -2\mathbf{P}_{k|k-1}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}_k^{\mathrm{T}} + 2\mathbf{K}_k\left(\mathbf{H}_k\mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{H}_k^{\mathrm{T}} + \mathbf{R}_k\right) = \mathbf{0}_{n\times m}$$

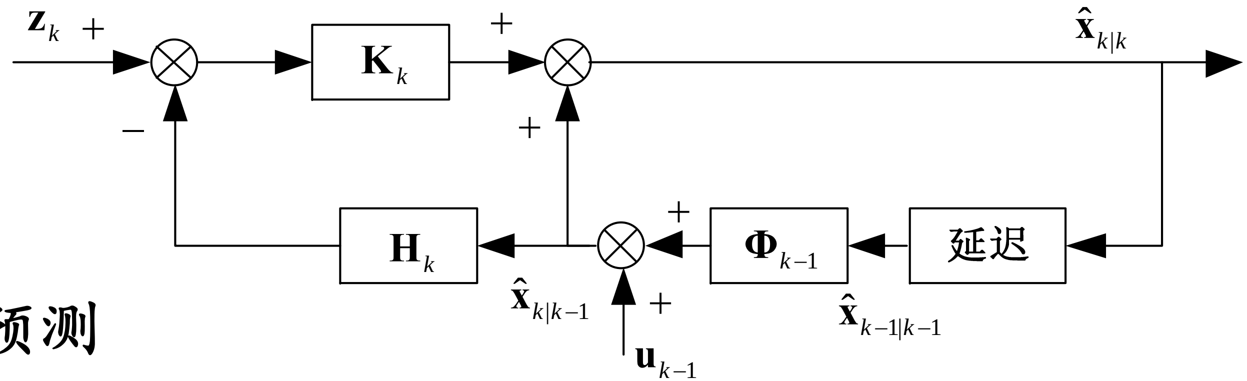
$$\Rightarrow \mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{H}_k^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{H}_k\mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{H}_k^{\mathrm{T}} + \mathbf{R}_k\right)^{-1}$$

$\mathbf{H}_k\mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{H}_k^{\mathrm{T}} + \mathbf{R}_k$ 正定矩阵

$$\Rightarrow \mathbf{P}_{k|k} = \left(\mathbf{I}_n - \mathbf{K}_k\mathbf{H}_k\right)\mathbf{P}_{k|k-1}$$

卡尔曼滤波器

卡尔曼滤波器算法总结



1. 状态预测

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \mathbf{\Phi}_{k-1}\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + \mathbf{u}_{k-1}$$

2. 误差协方差预测

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{\Phi}_{k-1}\mathbf{P}_{k-1|k-1}\mathbf{\Phi}_{k-1}^{\mathrm{T}} + \mathbf{\Gamma}_{k-1}\mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{\Gamma}_{k-1}^{\mathrm{T}}$$

3. 卡尔曼滤波器增益

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{H}_k^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{H}_k\mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{H}_k^{\mathrm{T}} + \mathbf{R}_k\right)^{-1}$$

4. 状态估计校正

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k\left(\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}\right)$$

其中 $\hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} = \mathbf{H}_k\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$

5. 误差协方差估计校正

$$\mathbf{P}_{k|k} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{H}_k\right)\mathbf{P}_{k|k-1}$$

卡尔曼滤波器

□ 其他说明

（1）一般来说，采样周期合理情况下，连续系统可观，离散化的系统也会可观。然而有时候采样周期选择不当，系统可能失去可控性及可观性。

（2）卡尔曼滤波器是一种最优的观测器，观测增益 $\mathbf{K}_k$ 是时变的。

（3） $\mathbf{H}_k\mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{H}_k^{\mathrm{T}}+\mathbf{R}_k$ 需要是非奇异的，否则 $\mathbf{K}_k=\mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{H}_k^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{H}_k\mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{H}_k^{\mathrm{T}}+\mathbf{R}_k\right)^{-1}$ 无法实现。

（4）如果 $(\mathbf{\Phi}_{k-1},\mathbf{H}_k)$ 不可观，那么卡尔曼滤波器仍然可以运行，只不过不可观的模态没有进行修正，只是递推罢了。极端情况 $\mathbf{H}_k=\mathbf{0}$ ，那么 $\mathbf{K}_k=\mathbf{0}$

整个系统完全不可观，那么

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{x}}_{k|k} &= \mathbf{\Phi}_{k-1}\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}+\mathbf{u}_{k-1}\\
\mathbf{P}_{k|k} &= \mathbf{\Phi}_{k-1}\mathbf{P}_{k-1|k-1}\mathbf{\Phi}_{k-1}^{\mathrm{T}}+\mathbf{\Gamma}_{k-1}\mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{\Gamma}_{k-1}^{\mathrm{T}}
\end{aligned}
$$

多速率卡尔曼滤波器

■ 模型

考虑一类多速率采样的线性离散系统：

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_k &= \mathbf{\Phi}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1}+\mathbf{u}_{k-1}+\mathbf{\Gamma}_{k-1}\mathbf{w}_{k-1}\\ \mathbf{z}_k &= \mathbf{H}_k\mathbf{x}_k+\mathbf{v}_k\end{aligned}$$

其中：状态和噪声的定义与前面相同，不同在于传感器观测。假设系统基本采样周期为 T_0，两种不同传感器的采样周期分别为 $T_i\left(i=1,2\right)$，且 $T_i\left(i=1,2\right)$ 为 T_0 的整数倍，即 $T_i=n_iT_0, n_i\in\mathbb{N}$。它们测量矩阵为 $\mathbf{H}_{ik}\in\mathbb{R}^{m_i\times n}$，噪声方差阵 $\mathbf{R}_{ik}\in\mathbb{R}^{m_i\times m_i}$（非奇异），$i=1,2$。令 αT_0 表示各观测数据的采样周期的最小公倍数。当没有观测量时，我们认为 $\mathbf{H}_k=\mathbf{0}$，为了保证算法不发生奇异问题，方差阵设置为单位阵（只要不是0的常数阵都可以）。

多速率卡尔曼滤波器

□ 模型改进

最终，观测阵$\mathbf{H}_k$以及观测噪声方差阵$\mathbf{R}_k$均以αT_0为周期变化，即

$$\mathbf{H}_k=\begin{cases}\mathbf{H}_{ik},\text{if }\mathrm{mod}(k,n_i)=0\ \&\ \mathrm{mod}(k,\alpha)\neq 0\\ \begin{bmatrix}\mathbf{H}_{1k}\\ \mathbf{H}_{2k}\end{bmatrix},\text{if }\mathrm{mod}(k,\alpha)=0\\ \mathbf{0},\qquad \text{else}\end{cases}\qquad \mathbf{R}_k=\begin{cases}\mathbf{R}_{ik},\text{if }\mathrm{mod}(k,n_i)=0\ \&\ \mathrm{mod}(k,\alpha)\neq 0\\ \mathrm{diag}(\mathbf{R}_{1k},\mathbf{R}_{2k}),\text{if }\mathrm{mod}(k,\alpha)=0\\ \mathbf{I},\qquad \text{else}\end{cases}$$

其中，表达式**mod(a，b)**是求余数操作，即**a**除以**b**之后的余数

在整个过程中，观测阵$\mathbf{H}_k$、观测噪声方差阵$\mathbf{R}_k$和观测量$\mathbf{z}_k$的维数在不断的变化，而$\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$和$\mathbf{P}_{k|k}$会根据每一步的信息更新而更新。它的推导过程就与经典的卡尔曼滤波器就相同了。

扩展卡尔曼滤波器

模型描述

假设非线性离散系统模型如下：

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{w}_{k-1}\right)$$
$$\mathbf{z}_k = \mathbf{h}\left(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k\right)$$

将非线性函数$\mathbf{f}(\cdot)$围绕(k-1)次滤波值$\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}$展开成Taylor级数的形式，并忽略二次以上的高阶项，得到

$$\mathbf{f}\left(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{w}_{k-1}\right) = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{0}) + \left.\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{w})}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{w}=\mathbf{0}} \left(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}\right)$$
$$+ \left.\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}}\right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{w}=\mathbf{0}} \mathbf{w}_{k-1}$$

扩展卡尔曼滤波器

模型描述

类似地，非线性函数$\mathbf{h}(\cdot)$在$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$处的线性化值为

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}_k,\mathbf{v}_k)=\mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1},\mathbf{0})+\left.\frac{\partial\mathbf{h}(\mathbf{x},\mathbf{v})}{\partial\mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1},\mathbf{v}=\mathbf{0}}(\mathbf{x}_k-\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})+\left.\frac{\partial\mathbf{h}(\mathbf{x},\mathbf{v})}{\partial\mathbf{v}}\right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1},\mathbf{v}=\mathbf{0}}\mathbf{v}_k$$

扩展卡尔曼滤波器

模型描述

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{\Phi}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{u}'_{k-1} + \mathbf{\Gamma}_{k-1}\mathbf{w}_{k-1}$$

$$\mathbf{z}'_k = \mathbf{H}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{v}'_k$$

其中：

$$\mathbf{\Phi}_{k-1} \triangleq \left.\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u}_{k-1},\mathbf{w})}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1},\mathbf{w}=\mathbf{0}_{n\times1}}$$

$$\mathbf{H}_k \triangleq \left.\frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x},\mathbf{v})}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1},\mathbf{v}=\mathbf{0}_{m\times1}}$$

$$\mathbf{\Gamma}_{k-1} \triangleq \left.\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u}_{k-1},\mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}}\right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1},\mathbf{w}=\mathbf{0}_{n\times1}}$$

$$\mathbf{u}'_k \triangleq \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1},\mathbf{u}_{k-1},\mathbf{0}_{n\times1}) - \mathbf{\Phi}_{k-1}\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}$$

$$\mathbf{z}'_k \triangleq \mathbf{z}_k - \mathbf{h}\left(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1},\mathbf{0}_{m\times1}\right) + \mathbf{H}_k\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$$

$$\mathbf{v}'_k \triangleq \left.\frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x},\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}}\right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1},\mathbf{v}=\mathbf{0}_{m\times1}} \mathbf{v}_k$$

其中 $\mathbf{v}'_k$ 的统计特性为 $\mathrm{E}\left(\mathbf{v}'_k\right)=\mathbf{0}$,

$$\mathbf{R}_{v'v'}(k,j) = \mathrm{E}\left(\mathbf{v}'_k\mathbf{v}'^{\mathrm{T}}_j\right) = \begin{cases}\mathbf{R}'_k, k=j\\ \mathbf{0}, \quad k\neq j\end{cases}$$

$$\mathbf{R}'_k = \left.\frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x},\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}}\right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1},\mathbf{v}=\mathbf{0}} \mathbf{R}_k \left(\left.\frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x},\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}}\right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1},\mathbf{v}=\mathbf{0}}\right)^{\mathrm{T}}$$

本讲小结

- 实际中我们如何选取传感器和如何布置传感器等大部分是靠经验，没有实际的理论来支持。从理论上可以进行可观度（**Degree of Observability**）的研究，即可观测的程度方面的研究。

- 在**Kalman**滤波方面的研究可以考虑更加实际的情况，比如：对于维数较高的模型减少计算量，减少对噪声特性的依赖，减少延迟等等。

资源

(1)可靠飞行控制研究组主页课程中心(全部课件下载)

http://rfly.buaa.edu.cn/course

(2) 关注可靠飞行控制研究组公众号 buaarfly(文章、资讯等)

(3) 多旋翼设计与控制交流QQ群:183613048

(4) 视频课程(MOOC)同步发布，网易云课堂搜索“多旋翼”

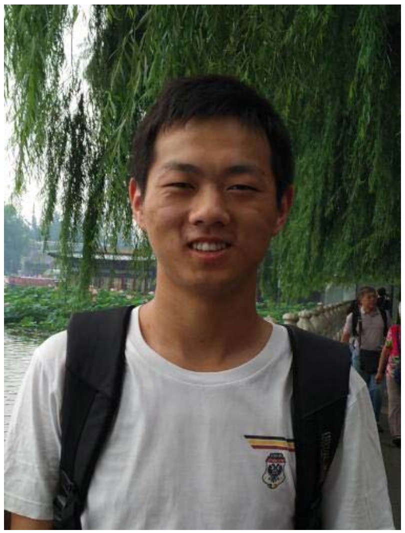
http://study.163.com/course/introduction/1003715005.htm

(5) 同名中文书本教材《多旋翼飞行器设计与控制》即将在电子工业出版社出版，敬请期待

(6) 有疑问可联系课程总助教戴训华，邮箱：dai@buaa.edu.cn

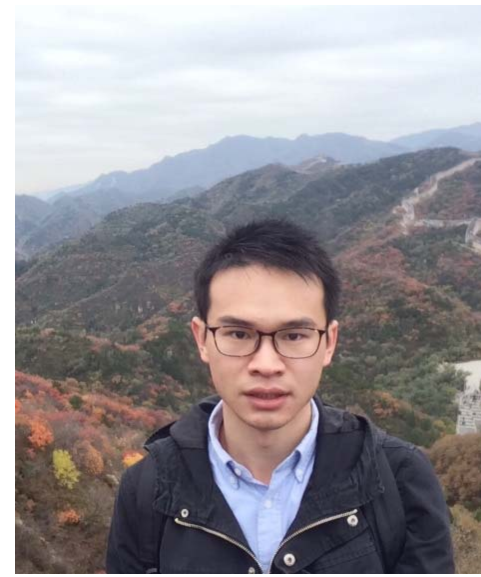
致谢

感谢控制组同学



郭正龙

邓恒



戴训华

为本节课程准备作出的贡献。

谢谢

更详细的内容可以参考我们的教材：《多旋翼飞行器设计与控制》，电子工业出版社。

中文版目前在亚马逊、当当、京东、天猫（电子工业出版社旗舰店）等网站有售。

英文版本*Introduction to Multicopter Design and Control*，在Springer出版，在亚马逊有售。